REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat07pari

Math.
R

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉDIGÉE PAR MM.

E. HUMBERT
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

ET

G. PAPELIER
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

N. CHARRUIT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE LYON

E. DESSENON,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

P. LAMAIRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU COLLÈGE CHAPTAL

CH. RIVIÈRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE SAINT-LOUIS

H. VUIBERT,
RÉDACTEUR DU *Journal de Mathématiques élémentaires.*

TOME QUATRIÈME

ANNÉES 1896-97 & 1897-98

291727/33
9
30

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, rue des Écoles, 17.

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

POINTS D'INFLEXION DE LA TRANSFORMÉE PAR DÉVELOPPEMENT D'UNE COURBE C TRACÉE SUR UN CÔNE

par M. **H. Bordeux**, Professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Janson.

Je me propose, comme *exercice de calcul*, de montrer que ces points proviennent des points de la courbe C où le plan tangent au cône est normal au plan osculateur à la courbe C.

Je rapporte la courbe C à trois axes rectangulaires passant par le sommet du cône. Les coordonnées d'un des points (M) de cette courbe sont

$$x = f(s), \qquad y = \varphi(s), \qquad z = \psi(s),$$

s étant l'arc de la courbe C. (Je regarderai dans la suite s comme la variable principale.)

Soit M_1 l'homologue de M sur la transformée (D) de (C); j'appelle ρ et ω ses coordonnées polaires (le pôle étant le point S_1 homologue du sommet S du cône donné); ρ et ω sont deux fonctions de s définies par les équations

$$\left|\begin{array}{ll} (1) & \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ (2) & d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = ds^2. \end{array}\right.$$

On sait, en effet, que $S_1M_1 = SM$ et que l'arc de la transformée est égal à l'arc homologue de la proposée.

Les points d'inflexion de D sont définis par l'équation

$$\frac{d^2\dfrac{1}{\rho}}{d\omega^2} + \frac{1}{\rho} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\rho^2 + 2\frac{d\rho^2}{d\omega^2} - \rho\frac{d}{d\omega}\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right) = 0,$$

ou encore

$$(3) \qquad \rho^2 d\omega^3 + 2d\rho^2 d\omega - \rho d\omega d^2\rho + \rho d\rho d^2\omega = 0.$$

Je différencie l'équation (2) afin de calculer $d^2\omega$:

$$(4) \qquad d\rho d^2\rho + \rho d\rho d\omega^2 + \rho^2 d\omega d^2\omega = 0.$$

Après avoir remplacé $d^2\omega$ dans l'équation (3), j'obtiens l'équation

$$-\rho d\omega^2 ds^2 + d^2\rho(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2) = 0,$$

ou enfin

$$(5) \qquad d^2\rho - \rho d\omega^2 = 0.$$

Je calcule le premier membre de l'équation (5) en fonction de x, y, z et de leurs différentielles :

$$\rho d\rho = x dx + y dy + z dz,$$

$$d\rho^2 + \rho d^2\rho = ds^2 + x d^2x + y d^2y + z d^2z.$$

En remplaçant ds^2 par $d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$ et en simplifiant

$$\rho[d^2\rho - \rho\, d\omega^2] = x\, d^2x + y\, d^2y + z\, d^2z.$$

L'équation qui donne les valeurs de s correspondant aux points de la courbe qui deviennent des points d'inflexion dans la transformée est, dès lors,

$$(6) \qquad x\frac{d^2x}{ds^2} + y\frac{d^2y}{ds^2} + z\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Interprétons géométriquement ce résultat :

Le plan tangent en (x, y, z) au cône a pour équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Le plan osculateur à la courbe au même point a pour équation

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

La condition de perpendicularité de ces deux plans est

$$(dy\, d^2z - dz\, d^2y)(y\, dz - z\, dy) + \cdots = 0,$$

c'est-à-dire

$$(dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)(x\, dx + y\, dy + z\, dz) - (dx^2 + dy^2 + dz^2)(x\, d^2x + y\, d^2y + z\, d^2z) = 0.$$

Or

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{d(1)}{ds} = 0.$$

Donc l'équation précédente se réduit à

$$x\, d^2x + y\, d^2y + z\, d^2z = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation (6). C. Q. F. D.

EXTENSION A L'ESPACE D'UNE PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

par M. **G. Lapointe**, Professeur de Mathématiques Spéciales au lycée de Rouen.

On sait que le point de concours des hauteurs d'un triangle quelconque inscrit dans une hyperbole équilatère est situé sur la courbe.

On peut démontrer, pour l'espace, une propriété analogue. Cette propriété est la suivante :

Lorsqu'un tétraèdre orthocentrique est inscrit dans une cubique gauche à trois asymptotes rectangulaires, son orthocentre est sur la courbe.

Pour démontrer cette propriété, imaginons que x, y, z, coordonnées d'un point quelconque de la courbe, soient exprimées en fonction d'un paramètre t. Prenons pour axes trois axes rectangulaires parallèles aux asymptotes de la cubique et, pour simplifier, choisissons pour origine le point de la courbe correspondant à la valeur $t = \infty$ du paramètre. Alors les équations de la cubique seront de la forme

$$(1) \qquad x = \frac{A}{a+t}, \qquad y = \frac{B}{b+t}, \qquad z = \frac{C}{c+t},$$

A, B, C, a, b, c étant des constantes. Les trois constantes a, b, c seront d'ailleurs différentes, sans quoi la courbe serait plane.

Cherchons d'abord la condition pour que le tétraèdre ayant pour sommets quatre points quelconques de la courbe M_1, M_2, M_3, M_4, correspondant aux valeurs t_1, t_2, t_3, t_4 du paramètre t, soit orthocentrique. C'est là un problème bien connu dont la solution est la suivante :

Cherchons la condition pour que la droite M_1M_2, par exemple, qui joint deux sommets quelconques du tétraèdre, soit perpendiculaire à la droite M_3M_4, qui joint les deux autres.

Les cosinus directeurs de M_1M_2 sont proportionnels à

$$\frac{A}{a+t_1} - \frac{A}{a+t_2} = \frac{A(t_2-t_1)}{(a+t_1)(a+t_2)} \quad \text{et} \quad \frac{B(t_2-t_1)}{(b+t_1)(b+t_2)}, \quad \frac{C(t_2-t_1)}{(c+t_1)(c+t_2)}.$$

Par analogie, les cosinus directeurs de M_3M_4 sont proportionnels à

$$\frac{A(t_3-t_4)}{(a+t_3)(a+t_4)}, \quad \frac{B(t_3-t_4)}{(b+t_3)(b+t_4)}, \quad \frac{C(t_3-t_4)}{(c+t_3)(c+t_4)}.$$

Donc en exprimant que ces deux droites sont perpendiculaires et divisant par $(t_2-t_1)(t_3-t_4)$ supposé différent de 0, nous aurons la condition

$$(2) \qquad \frac{A^2}{(a+t_1)(a+t_2)(a+t_3)(a+t_4)} + \frac{B^2}{(b+t_1)(b+t_2)(b+t_3)(b+t_4)} + \frac{C^2}{(c+t_1)(c+t_2)(c+t_3)(c+t_4)} = 0.$$

Or cette relation est symétrique en t_1, t_2, t_3, t_4. Par suite, elle exprime que la droite joignant deux sommets quelconques du tétraèdre est perpendiculaire à la droite joignant les deux autres et par suite, d'après un résultat bien connu, que le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est orthocentrique. Donc la condition cherchée est (2).

Nous allons montrer qu'on obtient la même relation (2) en cherchant la condition pour qu'une hauteur quelconque du tétraèdre rencontre de nouveau la cubique.

Faisons par exemple le calcul pour la hauteur issue de M_1, et pour cela cherchons d'abord l'équation du plan $M_2M_3M_4$. Si

$$ux + vy + wz - 1 = 0$$

est l'équation de ce plan, l'équation

$$\frac{Au}{a+t} + \frac{Bv}{b+t} + \frac{Cw}{c+t} - 1 = 0$$

est l'équation aux t des points d'intersection de ce plan avec la cubique. Elle doit donc admettre les racines t_2, t_3, t_4. Alors en employant un procédé de calcul analogue à celui employé pour les quadriques homofocales, nous aurons l'identité

$$\frac{Au}{a+t} + \frac{Bv}{b+t} + \frac{Cw}{c+t} - 1 \equiv \frac{-(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)}{(a+t)(b+t)(c+t)}.$$

En multipliant les deux membres de cette identité par $a+t$ et remplaçant t par $-a$, nous aurons

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} Au &= \frac{(a+t_2)(a+t_3)(a+t_4)}{(b-a)(c-a)}, \\ Bv &= \frac{(b+t_2)(b+t_3)(b+t_4)}{(c-b)(a-b)}, \\ Cw &= \frac{(c+t_2)(c+t_3)(c+t_4)}{(a-c)(b-c)}. \end{aligned} \right.$$

Les équations de la hauteur issue de M_1 sont alors

$$(4) \qquad \frac{x - \dfrac{A}{a+t_1}}{u} = \frac{y - \dfrac{B}{b+t_1}}{v} = \frac{z - \dfrac{C}{c+t_1}}{w},$$

u, v, w ayant les valeurs (3).

Il faut maintenant exprimer que cette droite (4) coupe de nouveau la cubique. Un point quelconque de (4) a pour coordonnées

$$\frac{A}{a+t_1} + u\rho, \qquad \frac{B}{b+t_1} + v\rho, \qquad \frac{C}{c+t_1} + w\rho.$$

Donc on devra pouvoir déterminer θ et ρ de telle sorte que $\frac{A}{a+t_1} + u\rho = \frac{A}{a+\theta}$ et de même pour B et C.

Ces équations s'écrivent

$$\frac{A}{a+t_1}(\theta - t_1) + ua\rho + u\rho\theta = 0,$$

et

$$\frac{B}{b+t_1}(\theta - t_1) + vb\rho + v\rho\theta = 0,$$

$$\frac{C}{c+t_1}(\theta - t_1) + wc\rho + w\rho\theta = 0;$$

en exprimant que ces équations admettent en $\theta - t_1$, ρ, $\rho\theta$ des solutions non nulles (car $\theta - t_1 \neq 0$), nous aurons à égaler à zéro un déterminant qui se met immédiatement, en développant, sous la forme

$$\frac{A}{u(a+t_1)}(b-c) + \frac{B}{v(b+t_1)}(c-a) + \frac{C}{w(c+t_1)}(a-b) = 0.$$

D'où, en remplacant u, v, w par leurs valeurs (3) et divisant par la quantité non nulle $(b-c)(c-a)(a-b)$, nous aurons finalement

$$\frac{A^2}{(a+t_1)(a+t_2)(a+t_3)(a+t_4)} + \frac{B^2}{\dots\dots\dots\dots} + \frac{C^2}{\dots\dots\dots\dots} = 0,$$

c'est-à-dire justement la condition (2).

A cause de la symétrie, cette condition exprime donc que chaque hauteur rencontre de nouveau la cubique.

Donc les deux problèmes que nous nous sommes proposés sont équivalents. Par suite, si le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est orthocentrique, ses hauteurs rencontrent de nouveau la cubique, et réciproquement. Je dis maintenant que ces hauteurs rencontrent la cubique au même point ω.

En effet, si les deux hauteurs issues de M_1 et M_2, par exemple, rencontraient la cubique en des points différents α, β, comme, d'après ce qui précède, ces hauteurs sont dans un même plan, nous voyons que ce plan rencontrerait la cubique aux quatre points M_1, M_2, α, β, ce qui est impossible.

Donc, en résumé, si le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est orthocentrique, ses hauteurs rencontrent la cubique au même point ω, et la propriété énoncée est démontrée.

GÉOMÉTRIE

478. — *D'un point* M *du plan d'une ellipse on mène les tangentes à cette courbe; soient* P, Q *les points de contact. On désigne par* H *le point de rencontre des hauteurs du triangle* MPQ.

1° *Prouver que les points* M *et* H *sont conjugués par rapport au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits. En conclure la construction du point* H *au moyen de deux droites quand le point* M *est donné.*

2° *En conclure le lieu des points* M *pour lesquels le point* H *se trouve sur l'ellipse proposée.*

3° *On donne le point* H, *trouver le point* M. *Montrer que le problème comporte deux solutions* M, M′ *toujours réelles, que l'on obtient en coupant par une droite l'hyperbole des normales (hyperbole d'Apollonius) relative au point* H.

4° *Prouver que le triangle* HMM′ *est conjugué par rapport au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits.*

5° *Pouvait-on déduire cette dernière propriété de cette proposition générale que, s'il existe un triangle conjugué par rapport à une conique et inscrit dans une autre, il en existe une infinité ?*

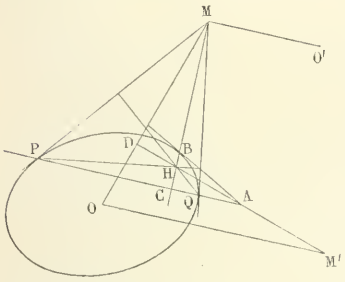
6° *Pourquoi les diamètres de l'ellipse qui passent en* M *et* M′ *sont-ils conjugués ?*

Nous nous appuierons sur les deux théorèmes que voici :

1° *Tout cercle circonscrit à un triangle polaire d'une conique est orthogonal au lieu des sommets des angles droits circonscrits ;*

2° *L'hyperbole d'Apollonius relative à un point, pour une conique donnée quelconque, est le lieu du point de rencontre d'une droite quelconque passant au point considéré avec le diamètre conjugué de la direction perpendiculaire à cette droite.*

Ces propriétés sont bien connues et d'ailleurs très faciles à établir.



1° Cela posé, soit O le centre de l'ellipse ; menons la droite MO, puis MO′ parallèle à la polaire du point M ; désignons en outre par A le pôle de la droite HM. Les deux faisceaux (M, PQOO′) et (H, QPAC) sont harmoniques ; or ils ont trois couples de rayons correspondants rectangulaires, MP et HQ, MQ et HP, MO′ et HC ; donc le quatrième couple, MO et HA, est aussi formé par deux rayons rectangulaires ; par suite le cercle décrit sur MA comme diamètre passe aux deux points C et D. Ce cercle étant circonscrit à un triangle polaire de l'ellipse, AMC, est orthogonal au cercle orthoptique et sa puissance par rapport au point O, OM.OD, est égale à $a^2 + b^2$. Ceci achève de montrer que AD, perpendiculaire à OM, est la polaire du point M par rapport au cercle orthoptique.

Quand le point M est donné, le point H est donc bien déterminé, puisqu'il est à l'intersection de deux droites : la polaire du point M par rapport au cercle orthoptique et la perpendiculaire abaissée de M sur la direction conjuguée de OM.

3° Si H est donné, le point M est à l'intersection des deux lieux suivants : la polaire du point H par rapport au cercle orthoptique, puis le lieu du point de rencontre d'une droite quelconque HM passant en H avec le diamètre conjugué de la direction perpendiculaire à HM ; ce dernier lieu est l'hyperbole d'Apollonius relative au point H.

Ayant le point M, il est facile d'avoir le point M′ : il suffit en effet de prendre le point de rencontre de la parallèle à la polaire du point M, menée par le point O, avec la droite AH, car le point M′ ainsi obtenu est sur l'hyperbole d'Apollonius du point H, et la droite OH, troisième hauteur du triangle OMM′, est perpendiculaire à MM′, ce qui prouve que la droite MM′ est la polaire du point H par rapport au cercle orthoptique.

La quatrième et la sixième partie sont alors évidentes : le triangle HMM′ est conjugué par rapport au cercle orthoptique, et les deux droites OM et OM′ sont, par construction même, deux diamètres conjugués de l'ellipse.

D'autre part, on sait que lorsqu'une conique S est harmoniquement circonscrite à une conique S′, tout point de S est sommet d'un triangle polaire de S′ inscrit dans S ; or l'hyperbole d'Apollonius du point H passe par les sommets du triangle formé par les axes de l'ellipse et la droite de l'infini, et ce triangle est évidemment un triangle polaire du cercle orthoptique ; donc elle passe aussi par les sommets d'un triangle polaire de ce cercle ayant pour sommets le point H et les points de rencontre de la polaire de ce point par rapport au cercle orthoptique ; ces deux nouveaux sommets sont les points M et M′ ; on voit ainsi que le triangle HMM′ est un triangle polaire du cercle orthoptique.

2° Il est alors facile de traiter la seconde partie. En effet, si le point H est sur l'ellipse, les deux points H et B coïncident, la droite HM′ est la tangente en H, la droite HM, la normale en H ; le lieu

du point M est donc la polaire réciproque de l'ellipse par rapport au cercle orthoptique, et le lieu du point M′ est le lieu des pôles des cordes normales à l'ellipse.

Remarque. — La solution analytique est facile ; nous ne la donnerons pas. Pour démontrer la première partie, on forme les équations des deux hauteurs PH et QH, en se donnant les coordonnées des points P et Q ; une simple soustraction de leurs premiers membres montre alors qu'elles se coupent sur la polaire du point M par rapport au cercle orthoptique.

Les autres questions se traitent naturellement sans difficulté

J.-B. FOULON (lycée de Lille).

Excellente solution de M. TURMEL (lycée de Rouen).

Solutions satisfaisantes de MM. E. BALLY (collège Stanislas), E. BARRÉ, à Douai ; A. CAUSSÉ, à Castres ; J. LHÉRIAUD (lycée de Toulouse).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

496. — *Trouver une courbe* (C) *passant par l'origine des coordonnées*, O, *et telle que le rayon de courbure en un point quelconque* M *de cette courbe ait même longueur que l'arc de courbe* OM.

Désignons par s l'arc compté à partir du point O, par α l'angle que fait la demi-tangente dirigée dans le sens des arcs croissant avec Ox, par ρ le rayon de courbure au point considéré sur la courbe ; nous aurons ou bien $\rho = \frac{ds}{d\alpha} = s$ ou bien $\rho = \frac{ds}{d\alpha} = -s$.

Dans le premier cas, nous avons $d\alpha = \frac{ds}{s}$, et, par suite, $\alpha = \mathrm{L}\, as$, a désignant une constante ; d'où $as = e^{\alpha}$. Prenons alors α pour variable indépendante et calculons x et y à l'aide des formules $dx = ds \cos\alpha$, $dy = ds \sin\alpha$, ou $a\,dx = e^{\alpha}\cos\alpha\, d\alpha$, $a\,dy = e^{\alpha}\sin\alpha\, d\alpha$; nous sommes ramenés ainsi à évaluer deux intégrales définies. Or en multipliant la seconde équation par i et l'ajoutant à la première, nous obtenons une équation immédiatement intégrable ,

$$ad(x+iy) = e^{\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,d\alpha,$$

ou

$$ad(x+iy) = e^{(i+1)\alpha}d\alpha\,;$$

cette équation donne

$$a[x - x_0 + i(y - y_0)] = \frac{e^{(i+1)\alpha}}{i+1},$$

en désignant par x_0 et y_0 des constantes arbitraires ; multiplions alors les deux membres par $i+1$ et égalons les parties réelles et les parties imaginaires, nous aurons

$$a(x - x_0) - a(y - y_0) = e^{\alpha}\cos\alpha,$$
$$a(x - x_0) + a(y - y_0) = e^{\alpha}\sin\alpha,$$

d'où, par addition et soustraction,

$$a(x - x_0) = \frac{e^{\alpha}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha),$$

$$a(y - y_0) = \frac{e^{\alpha}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha).$$

Restent à déterminer les deux constantes x_0 et y_0; pour cela, nous avons à exprimer que, pour $s = 0$, x et y sont nuls. Or s n'est nul que pour $\alpha = -\infty$, et, pour cette valeur, $x - x_0$ et $y - y_0$ sont nuls ; donc x_0 et y_0 doivent être nuls, et les équations de la courbe cherchée sont définitivement

$$(1)\qquad \begin{cases} ax = \dfrac{e^{\alpha}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha), \\[2ex] ay = \dfrac{e^{\alpha}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha). \end{cases}$$

L'équation en coordonnées polaires est facile à obtenir ; on a en effet $\rho^2 = x^2 + y^2$, par suite, $a^2\rho^2 = \frac{e^{2\alpha}}{2}$, d'où $a\rho = \frac{e^\alpha}{\sqrt{2}}$; les équations (1) s'écrivent alors

$$a\rho \cos\omega = \frac{e^\alpha}{\sqrt{2}} \cos\omega = \frac{e^\alpha}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha),$$

$$a\rho \sin\omega = \frac{e^\alpha}{\sqrt{2}} \sin\omega = \frac{e^\alpha}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha),$$

ou

$$\cos\omega = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin\omega = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right);$$

on peut donc prendre $\omega = \alpha - \frac{\pi}{4}$, et l'équation de la courbe en coordonnées polaires est

$$\rho = \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{\omega + \frac{\pi}{4}}$$

ou

$$\rho = he^\omega, \tag{2}$$

h désignant une constante. La courbe cherchée est donc une spirale logarithmique.

Si l'on part de l'équation $\frac{ds}{d\alpha} = -s$, on a successivement $\alpha = \mathrm{L}\frac{a}{s}$, $s = ae^{-\alpha}$, puis $dx = -ae^{-\alpha}\cos\alpha d\alpha$, $dy = -ae^{-\alpha}\sin\alpha d\alpha$. En changeant a en $\frac{1}{a}$, α en $-\alpha$ et y en $-y$, on retrouve les équations précédentes. La courbe actuelle ne diffère donc pas au fond de la précédente: c'est sa symétrique par rapport à Ox.

L. J. GOUJON (pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne).

---

501. — *On considère le réseau des coniques bitangentes à une conique fixe* (C) *et passant par un point fixe* A; *on demande :*

1° *Le lieu du point de rencontre de la tangente en* A *avec la corde des contacts;*

2° *De montrer que si l'on assujettit la corde des contacts à passer par un point fixe* P, *les coniques passent par un second point fixe* B;

3° *De trouver le lieu du point* B *quand le point* A *décrit une conique donnée.*

Prenons pour axes de coordonnées deux droites qui se coupent, quelconques, et désignons par $f(x, y) = 0$ l'équation de la conique (C) et par α, β les coordonnées du point A. L'équation générale des coniques du réseau est

$$\lambda f(x, y) + (ux + vy + w)^2 = 0,$$

avec la condition

$$\lambda f(\alpha, \beta) + (u\alpha + v\beta + w)^2 = 0,$$

qui relie les paramètres variables λ, u, v, w.

1° Si nous désignons par $\mathrm{P}(x, y)$ la fonction linéaire $ux + vy + w$ et par $\mathrm{F}(x, \alpha)$ la forme polaire de $f(x, y)$ relative au point A, nous aurons, pour équation de la tangente à la conique variable au point A,

$$\lambda \mathrm{F}(x, \alpha) + 2\mathrm{P}(x, y)\mathrm{P}(\alpha, \beta) = 0.$$

Cette équation montre que la tangente en A et la corde des contacts, $\mathrm{P} = 0$, se coupent constamment sur la polaire du point A par rapport à la conique (C), $\mathrm{F}(x, \alpha) = 0$.

2° Désignons maintenant par a et b les coordonnées du point fixe P et astreignons la corde des contacts de la conique variable à passer par ce point, nous aurons $ua + vb + w = 0$, et, par suite,

$w = -ua - vb$; en portant cette valeur dans l'équation de la conique, puis exprimant qu'elle passe au point (α, β), nous aurons, pour équation générale des coniques cherchées,

$$f(x, y)[u(\alpha - a) + v(\beta - b)]^2 - f(\alpha, \beta)[u(x - a) + v(y - b)]^2 = 0,$$

ou

$$u^2C_1 + 2uvC_2 + v^2C_3 = 0,$$

C_1, C_2, C_3 désignant les premiers membres des équations suivantes :

$$(\alpha - a)^2 f(x, y) - (x - a)^2 f(\alpha, \beta) = 0,$$
$$(\alpha - a)(\beta - b) f(x, y) - (x - a)(y - b) f(\alpha, \beta) = 0,$$
$$(\beta - b)^2 f(x, y) - (y - b)^2 f(\alpha, \beta) = 0.$$

Or il est facile de voir que ces trois coniques se coupent en un autre point fixe que le point A ; il suffit, pour cela, de les couper par la droite PA dont l'équation est

$$\frac{x - a}{\alpha - a} = \frac{y - b}{\beta - b} = \rho.$$

Les trois équations $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ se réduisent alors à une seule,

$$f(x, y) - \rho^2 f(\alpha, \beta) = 0;$$

par conséquent la droite considérée est une sécante commune aux trois coniques et celles-ci ont un point commun autre que le point A. Nous aurons le ρ de ce point en remplaçant, dans l'équation $f(x, y) - \rho^2 f(\alpha, \beta) = 0$, x et y par $a + \rho(\alpha - a)$, $b + \rho(\beta - b)$ et enlevant la racine $\rho = 1$ qui correspond au point A. Nous obtenons ainsi

$$f[a + \rho(\alpha - a),\ b + \rho(\beta - b)] - \rho^2 f(\alpha, \beta) = 0,$$

ou

$$f(a, b) + \rho[(\alpha - a)f'_a + (\beta - b)f'_b] + \rho^2[\varphi(\alpha - a, \beta - b) - f(\alpha, \beta)],$$

en désignant par $\varphi(x, y)$ l'ensemble des termes du second degré de $f(x, y)$. Cette équation se simplifie aisément et s'écrit

$$f(a, b) + \rho[F(a, \alpha) - 2f(a, b)] + \rho^2[f(a, b) - F(a, \alpha)] = 0,$$

ou

$$(1 - \rho)^2 f(a, b) + \rho F(a, \alpha)(1 - \rho) = 0;$$

le facteur $1 - \rho$ étant supprimé, il reste l'équation

$$(1) \qquad (1 - \rho)f(a, b) + \rho F(a, \alpha) = 0,$$

qui définit le ρ du point B.

Il est facile de montrer que ce point est le conjugué harmonique du point A par rapport au point P et au point de rencontre de la droite PA avec la polaire du point P par rapport à la conique $f(x, y) = 0$. En effet, la polaire de ce point a pour équation $xf'_a + yf'_b + f'_c = 0$; le ρ du point de rencontre de cette droite avec PA est donné par l'équation

$$[a + \rho_1(\alpha - a)]f'_a + [b + \rho_1(\beta - b)]f'_b + f'_c = 0,$$

ou

$$2f(a, b) + \rho_1[F(a, \alpha) - 2f(a, b)] = 0;$$

on a donc

$$\frac{2}{\rho_1} = 2 - \frac{F(a, \alpha)}{f(a, b)},$$
$$\frac{2}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{1}.$$

en appelant ρ le paramètre du point B. Comme 1 est le paramètre du point A, cette égalité démontre la relation annoncée.

3° Si l'on exprime que le point (α, β) décrit une conique $g(x, y) = 0$, on a la relation $g(\alpha, \beta) = 0$, et le lieu du point B s'obtiendra en éliminant α, β et ρ entre les quatre équations

$$x = a + \rho(\alpha - a), \qquad y = b + \rho(\beta - b),$$
$$g(\alpha, \beta) = 0 \qquad \text{et} \qquad (1 - \rho)f(a, b) + \rho F(a, \alpha) = 0.$$

Les deux premières donnent

$$\alpha = a + \frac{x-a}{\rho}, \qquad \beta = b + \frac{y-b}{\rho},$$

et, en portant ces valeurs dans les deux dernières, on obtient de suite

$$g\left(a + \frac{x-a}{\rho},\ b + \frac{y-b}{\rho}\right) = 0,$$

$$(1-\rho)f(a, b) + (a\rho + x - a)f'_a + (b\rho + y - b)f'_b + \rho f' = 0;$$

la dernière se transforme aisément en

$$\rho f(a, b) + F(x, a) - f(a, b) = 0;$$

d'ailleurs la première donne une relation du second degré en ρ,

$$\rho^2 g(a, b) + \rho[G(x, a) - 2g(a, b)] + g(x, y) - G(x, a) + g(a, b) = 0.$$

Il n'y a plus qu'à tirer ρ de la première relation et porter la valeur ainsi obtenue dans celle-ci pour avoir l'équation du lieu. On trouve ainsi

$$g(a,b)[f(a,b) - F(x,a)]^2 + f(a,b)[G(x,a) - 2g(a,b)][f(a,b) - F(x,a)] + \overline{f(a,b)}^2[g(x,y) - G(x,a) + g(a,b)] = 0,$$

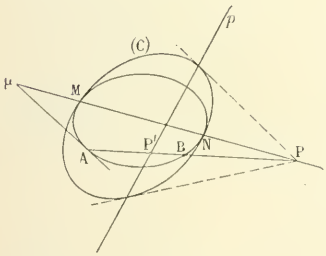
ou

$$\overline{f(a, b)}^2 g(x, y) + g(a, b)\overline{F(x, a)}^2 - f(a, b)G(x, a)F(x, a) = 0.$$

Cette équation montre que le lieu du point B est une conique qui rencontre la conique $g(x, y) = 0$ en deux points situés sur la droite $F(x, a) = 0$, c'est-à-dire sur la polaire du point P par rapport à la conique donnée $f(x, y) = 0$. L'autre sécante commune est la droite qui joint le point P au point de rencontre des polaires de ce point par rapport aux coniques f et g.

Très bonne solution : M. Auzeram, à Montpellier.
Solution satisfaisante : M. A. Causse, à Castres.

Solution géométrique. — 1° La tangente en A rencontre la corde des contacts en un point μ; la polaire de ce point est la même par rapport aux deux coniques, elle passe au point A; donc le point μ est sur la polaire de A par rapport à la conique (C) et décrit cette droite.



2° La polaire de P est aussi la même par rapport à la conique fixe et à la conique variable; la droite PA coupe donc la conique variable en un point B conjugué harmonique de A par rapport aux deux points fixes P et P'; donc ce point B est fixe aussi.

3° La correspondance qui existe entre A et B est la correspondance homologique dans laquelle le rapport anharmonique (PP'AB) a la valeur particulière -1; le lieu de B quand A décrit une conique est donc une conique homologique de celle-ci.

V. BERTRAND, Répétiteur au lycée de Douai.

Excellentes solutions de MM. Bally (collège Stanislas); Auzeram, à Montpellier; J. Lhériaud, à Toulouse.
Solution incomplète : M. E. Barré, à Valenciennes.

---

510. — *On considère les paraboles* P *qui, rapportées à des axes rectangulaires, ont pour équation générale*

$$(y - \lambda x)^2 - 2p\lambda^3 y = 0,$$

où p est une quantité donnée et λ un paramètre variable.

1° *Démontrer que par un point quelconque du plan, il passe trois axes des paraboles* P. *Lieu des points ω pour lesquels ces deux axes sont rectangulaires.*

2° *Ce lieu est un cercle* Γ. *A chaque point ω de ce cercle correspondent trois paraboles* P *dont les axes passent par ω. Les directrices de ces trois paraboles forment un certain triangle* ABC. *Lieu des sommets de ce triangle.*

3° *Lieu des milieux des côtés du triangle* ABC; *lieu de son centre de gravité.*

4° *Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* ABC; *enveloppe de ce cercle.*

5° *Lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* ABC; *enveloppe de ce cercle.*

1° La parallèle à l'axe menée par l'origine a pour équation $y - \lambda x = 0$; le coefficient angulaire des cordes perpendiculaires est donc $-\frac{1}{\lambda}$, et l'axe est le diamètre conjugué de cette direction; par suite, il a pour équation

$$f'_x - \frac{1}{\lambda} f'_y = 0,$$

ou bien, toutes réductions faites,

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda x - y) + p\lambda^3 = 0.$$

Si nous exprimons que cette droite passe en un point donné, (x, y), nous obtenons une équation du troisième degré en λ; par conséquent, il y a trois axes de parabole, réels ou non, qui passent en un point quelconque du plan. Si nous voulions séparer les points du plan par lesquels passent trois axes réels de ceux par lesquels passent deux axes imaginaires nous aurions à former l'enveloppe de ces axes, puis à construire cette courbe; dans le cas actuel, cette ligne est une hypocycloïde à trois rebroussements, et la question est facile à achever. Comme elle n'est pas demandée, nous ne la développerons pas davantage.

L'équation du troisième degré relative au point (x, y) est

$$\lambda^3(x + p) - \lambda^2 y + \lambda x - y = 0;$$

nous devons exprimer qu'elle a deux racines vérifiant la relation $\lambda_1\lambda_2 = -1$; pour cela, si le produit des racines n'est ni nul ni infini, il suffit d'exprimer que l'une des racines est égale à $-\frac{y}{x+p}$; nous trouvons ainsi les deux lieux étrangers $y = 0$, $x + p = 0$, et le cercle

$$(1) \qquad 2(x^2 + y^2) + 3px + p^2 = 0.$$

2° Soit (α, β) un point de ce cercle. Nous pouvons obtenir aisément les valeurs de λ qui correspondent à ce point : nous venons de voir, en effet, que l'une d'elles a pour valeur $\frac{-\beta}{\alpha + p}$; d'autre part, la somme des trois racines est $\frac{\beta}{\alpha + p}$; les deux autres ont donc pour somme $\frac{2\beta}{\alpha + p}$ et pour produit le nombre -1; par suite elles sont racines de l'équation

$$(2) \qquad (\alpha + p)\lambda^2 - 2\beta\lambda - (\alpha + p) = 0.$$

Cherchons maintenant l'équation de la directrice. Pour cela mettons l'équation de la parabole sous la forme focale. Cela se fait très rapidement en s'appuyant sur l'identité

$$(y - \lambda x)^2 + (\lambda y + x)^2 \equiv (\lambda^2 + 1)(x^2 + y^2);$$

nous pouvons alors écrire l'équation de la parabole sous la forme

$$(\lambda^2 + 1)(x^2 + y^2) - (\lambda y + x)^2 - 2p\lambda^3 y = 0,$$

puis,

$$(\lambda^2 + 1)[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] - (\lambda y + x)^2 - 2p\lambda^3 y + 2(\lambda^2 + 1)(\alpha x + \beta y) - (\lambda^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

et il suffit de déterminer α et β de façon que la dernière partie du premier membre soit un carré parfait. Nous obtenons ainsi successivement

$$\frac{\alpha(1 + \lambda^2)}{1} = \frac{\beta(\lambda^2 + 1) - p\lambda^3}{\lambda} = K,$$

et

$$K^2 - (1 + \lambda^2)(\alpha^2 + \beta^2) = 0;$$

or $K = \alpha(1 + \lambda^2)$, la dernière équation se réduit donc à $\alpha^2\lambda^2 - \beta^2 = 0$, et l'on en déduit $\beta = \alpha\lambda$ ou $\beta = -\alpha\lambda$; la première de ces deux équations donne le foyer qui est à l'infini sur l'axe et la seconde donne le foyer ordinaire; l'abscisse de ce point est fournie par $2\alpha(1 + \lambda^2) = -p\lambda^2$, et nous avons $K = -\frac{p\lambda^2}{2}$; par suite, l'équation de la directrice, qui était $\lambda y + x - K = 0$, est définitivement $\lambda y + x + \frac{p\lambda^2}{2} = 0$.

Les sommets du triangle ABC sont de deux espèces : l'un, A, est le point de rencontre des deux directrices rectangulaires qui correspondent aux racines de l'équation (2); les deux autres, B et C, sont les points de rencontre de ces directrices avec celle qui correspond à la valeur isolée de λ, $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha + p}$.

Nous aurons le lieu du point $A(x, y)$, en exprimant que la directrice passe en ce point et que l'équation en λ ainsi obtenue,

$$p\lambda^2 + 2\lambda y + 2x = 0,$$

a les mêmes racines que l'équation (2); nous avons ainsi

$$\frac{\alpha + p}{p} = \frac{\beta}{-y} = \frac{\alpha + p}{-2x},$$

et l'élimination de α et β entre ces équations et la relation qui relie α et β est toute faite : en égalant les deux rapports extrêmes on a de suite l'équation du lieu,

$$(3) \qquad 2x + p = 0.$$

Si nous appelons maintenant x et y les coordonnées du point B ou du point C, l'équation

$$p\lambda^2 + 2\lambda y + 2x = 0,$$

nous fournira d'abord la racine $\frac{-\beta}{\alpha + p}$, puis l'une des racines, t, de l'équation (2); en lui adjoignant la racine $-\frac{1}{t}$, nous aurons une équation du troisième degré,

$$(t\lambda + 1)(p\lambda^2 + 2\lambda y + 2x) = 0,$$

qui devra avoir les mêmes racines que l'équation

$$(\alpha + p)\lambda^3 - \beta\lambda^2 + \alpha\lambda - \beta = 0;$$

nous aurons ainsi les relations

$$\frac{\alpha + p}{pt} = \frac{-\beta}{2ty + p} = \frac{\alpha}{2y + 2tx} = \frac{-\beta}{2x}.$$

Entre ces équations et la relation

$$(\alpha + p)t^2 - 2\beta t - (\alpha + p) = 0,$$

nous devons éliminer les nombres α, β et t. Or le second et le quatrième rapport nous donnent

$$2ty - 2x + p = 0,$$

le premier et le quatrième, $\frac{\alpha + p}{\beta} = -\frac{pt}{2x}$; en portant cette valeur dans la dernière relation, nous obtenons

$$-\frac{pt^3}{2x} - 2t + \frac{pt}{2x} = 0,$$

ou

$$pt^2 + 4x - p = 0.$$

De là nous déduisons $x = p\frac{1 - t^2}{4}$, puis $y = -p\frac{1 + t^2}{4t}$; par suite, le lieu commun à B et à C est donné par les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} x = p\dfrac{1 - t^2}{4} \\ y = -p\dfrac{1 + t^2}{4t} \end{cases} \quad \text{ou} \quad p(2x - p)^2 + 4y^2(4x - p) = 0.$$

3° Représentons les coordonnées du point B par les formules (4); celles du point C s'obtiendront en changeant t en $-\frac{1}{t}$; celles du point A vérifient les deux équations

$$2x + p = 0 \qquad \text{et} \qquad pt^2 + 2ty + 2x = 0;$$

elles ont donc pour expression

$$x = -\frac{p}{2}, \qquad y = p\frac{1 - t^2}{2t};$$

par suite, les coordonnées des trois sommets peuvent être réunies dans le tableau suivant :

$$(A)\quad \begin{cases} x = \dfrac{-p}{2}, \\ y = p\dfrac{1-t^2}{2t}. \end{cases} \qquad (B)\quad \begin{cases} x = p\dfrac{1-t^2}{4}, \\ y = -p\dfrac{1+t^2}{4t}. \end{cases} \qquad (C)\quad \begin{cases} x = p\dfrac{t^2-1}{4t^2}, \\ y = p\dfrac{1+t^2}{4t}. \end{cases}$$

Il résulte immédiatement de là que le lieu du milieu de BC est $y = 0$. Le lieu du milieu de AB a pour équations

$$(5)\quad \begin{cases} x = -p\dfrac{1+t^2}{8}, \\ y = p\dfrac{1-3t^2}{8t}, \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad p(6x+p)^2 + 4y^2(8x+p) = 0.$$

Il est évident que ce lieu est aussi le lieu du milieu de AC.

4° Le cercle circonscrit au triangle rectangle ABC a son centre au milieu de l'hypoténuse BC. Le lieu de ce centre est donc l'axe des x, $y = 0$.

Si nous posons $\dfrac{1-t^2}{2t} = \mu$, les coordonnées du point A sont $\dfrac{-p}{2}$ et $p\mu$, celles du milieu de BC, $\dfrac{-p\mu^2}{2}$ et 0; le cercle circonscrit au triangle ABC a donc pour équation

$$\left(x + \frac{p\mu^2}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{4}(\mu^2-1)^2 + p^2\mu^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 - \frac{p^2}{4} + \mu^2\left(px - \frac{p^2}{2}\right) = 0.$$

Il est visible alors que ce cercle passe par deux points fixes et n'a pas d'enveloppe proprement dite.

5° Appelons A′ le milieu de BC; le cercle des neuf points du triangle ABC est le cercle décrit sur AA′ comme diamètre. Ce cercle a donc pour équation

$$\left[x + \frac{p}{4}(1+\mu^2)\right]^2 + \left(y - \frac{p\mu}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{16}(\mu^2-1)^2 + \frac{p^2\mu^2}{4},$$

ou

$$x^2 + \frac{px}{2}(1+\mu^2) + y^2 - p\mu y + \frac{p^2\mu^2}{4} = 0$$

Le lieu du centre de ce cercle a pour équations

$$(6)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{p}{4}(1+\mu^2), \\ y = \dfrac{p\mu}{2}, \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad y^2 + p\left(x + \frac{p}{4}\right) = 0;$$

c'est une parabole. L'enveloppe de ce cercle s'obtient en exprimant que son équation regardée comme étant du second degré en μ, a une racine double; nous trouvons ainsi

$$(2x+p)\left(x^2 + y^2 + \frac{px}{2}\right) - py^2 = 0,$$

équation qui se décompose en deux :

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = 0.$$

La première représente l'axe des y; c'est la véritable enveloppe. La seconde représente un cercle

de rayon nul ayant pour centre le point $x = -\frac{p}{2}$, $y = 0$. Au surplus, il est facile de voir que tous les cercles du système passent par ce point.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1896)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

I. — Algèbre.

266. — Démontrer la relation

$$C_{m+p}^{q} = C_m^q + C_p^1 C_m^{q-1} + C_p^2 C_m^{q-2} + \cdots + C_p^{q-1} C_m^1 + C_p^q.$$

267. — Démontrer que si m est impair $(x+y+z)^m - x^m - y^m - z^m$ est divisible par $(y+z)(z+x)(x+y)$.

268. — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'y + b'z = c', \\ a''z + b''u = c'', \\ a'''u + b'''x = c''', \end{cases} \qquad \begin{cases} bz - cy = \alpha, \\ cx - az = \beta, \\ ay - bz = \gamma. \end{cases}$$

269. — Etudier les séries dont les termes généraux sont :

$$\frac{1}{(n+a)^2 - b^2}, \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}, \quad \frac{1+n^2}{n!}, \quad \frac{n^2+1}{n^3+4n+1}, \quad \frac{n^2+1}{n^4+4n+1}, \quad \frac{1}{a+bx^n}, \quad \frac{\operatorname{Sin} n}{n},$$

$$\frac{\operatorname{Sin} n}{n^2}, \quad \frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{n}}{1-n^2}, \quad \frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}}{1-n}, \quad \frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}}{1+\sqrt{n}}, \quad \frac{\operatorname{L}n}{n^2}, \quad \frac{n}{(n^2+1)\operatorname{L}n}, \quad \frac{n+1}{n^2\operatorname{L}n}, \quad \frac{(n+1)\operatorname{L}n}{n^2}, \quad (-1)^n \frac{n}{n^2+2n-1},$$

$$\frac{1}{n(\operatorname{L}n)^\alpha}, \quad \frac{1}{n^\alpha(\operatorname{L}n)^\beta}, \quad \frac{a^n}{(n^2+1)\operatorname{L}n}, \quad \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}, \quad \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

270. — Etudier la série

$$\frac{1}{2^\mu - 1} - \frac{1}{2^\mu + 1} + \frac{1}{3^\mu - 1} - \frac{1}{3^\mu + 1} + \cdots + \frac{1}{n^\mu - 1} - \frac{1}{n^\mu + 1} + \cdots$$

pour les différentes valeurs de μ.

271. — Trouver à $\frac{1}{1000}$ près les sommes des séries dont les termes généraux sont $\frac{1}{1.3.5.\ldots.2n-1}$, $\frac{1}{n^{n-1}}$, $\frac{1}{n^n}$.

272. — Dérivées des fonctions :

$$\operatorname{arc\,cotg} x,\ \operatorname{arc\,cosec} x,\ \operatorname{arc\,sec} x,\ e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}},\ x^{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}},\ \operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax},\ \operatorname{arc\,sin} 2x\sqrt{1-x^2},\ \operatorname{arc\,cos}(2x^2-1),\ \operatorname{arc\,sin}(3x-4x^3),$$

$$(\cos x)^{\operatorname{L}(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x},\quad \sin(x^2+1)^{\operatorname{L}(1+\operatorname{arc\,tg} x)},\quad (\operatorname{arc\,sin} x)^{\operatorname{L}e^x\cos x} \times \frac{\operatorname{tg}^2 x}{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}},\quad (\operatorname{arc\,tg} x)^{\operatorname{L}(1+e^x)}.$$

273. — Dérivées d'ordre n des fonctions

$$e^{-x^2},\quad e^{\frac{1}{x}},\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \operatorname{arc\,sin} x,\quad [f(x)]^2,\quad \frac{1}{\cos x},\quad \varphi(e^x),\quad \varphi(u),$$ où u désigne une fonction de x.

274. — Soit y_1 la dérivée du produit xe^x, y_2 la dérivée de y_1x, y_3 celle de y_2x,... etc. Calculer y_n.

275. — Même question en remplaçant x par un polynome $f(x)$.

276. — Limites des fonctions

$\sqrt[n]{n!}$ pour n infini, $\left(1+\frac{n}{1+n^2}\right)^n$ pour n infini $\frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ pour $x = a$, $\frac{e^x \sin x - x}{\sin(\sin x)}$ pour $x = 0$, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$ pour $x = 0$, $\cos^m \frac{x}{m}$ pour m infini, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ pour n infini.

277. — Déterminer $a_1, a_2, \ldots, a_m$ en sorte que le produit $(x^m - a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} - \ldots)e^x$ ait pour dérivée $e^x x^m$.

278. — Étudier les variations des fonctions

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}},\quad x - \log x,\quad x^x \operatorname{L}x,\quad \frac{\operatorname{L}x}{1+x-\operatorname{L}x},\quad xe^{\frac{\operatorname{L}x+1}{x-1}},\quad xe^{\frac{x(x-2)}{x^2-1}},$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad (1+x)^{\frac{1}{x}},\quad \frac{x^3-x}{1+2x-2x^2},\quad e^{\frac{x^2}{x-1}},\quad xe^{\frac{1+x}{1-x}},\quad \log_x a.$$

279. — Trouver les maxima et minima de la fonction implicite y définie par l'équation $x^3 - 2xy + y^3 = 0$.

280. — Développer en séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes de x les fonctions

$$\mathrm{L}(a+bx), \qquad (a+bx)^m, \qquad x\mathrm{L}(a+x), \qquad \sin(ax+b), \qquad \cos(ax^2+b), \qquad \sin^3 x,$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}, \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, \qquad \frac{1}{(2-3x)^4}, \qquad \sqrt{1-2x}.$$

281. — Développer par la formule de Mac-Laurin la fonction $\operatorname{tg} x$; écrire le terme complémentaire. Le développement est-il valable pour $x = \frac{3\pi}{4}$?

282. — Appliquer la formule de Mac-Laurin pour obtenir la valeur de $\cos mx$ (m étant entier) en fonction de $\cos x$.

283. — Calculer le produit de n quantités connaissant leur somme, la somme de leurs carrés,..., etc., la somme de leurs puissances n^{es}.

284. — Calculer $\sum \frac{a^2b^2}{c}$ pour l'équation $x^4 - 3x + 1 = 0$.

285. — Calculer le produit des carrés des différences des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

286. — Calculer $\sum \frac{a}{b+c}$ et $\sum \frac{a^3}{b^2+c^2}$ pour l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$.

287. — Calculer $\sum \frac{a^2b^3}{c}$ pour l'équation $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

288. — Éliminer x entre les équations

$$\begin{cases} x^5 + px^3 + q = 0, \\ ax^2 + 2bx + c = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 + ax^2 + b = 0, \\ px^2 + qx + r = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^4 + px^2 + q = 0, \\ x^3 + p'x + q' = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0, \\ x^2 + p'x + q' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 + px^2 + qx + r = 0, \\ x^2 + p'x + q' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 + px + q = 0, \\ ax^3 + bx^2 + c = 0. \end{cases}$$

289. — Étudier le nombre de racines réelles des équations

$$x^5 + x^3 - x + 1 = 0, \qquad x^5 - 2x^3 + x - 4 = 0, \qquad x^8 + 2x^4 - 6x^2 + 1 = 0,$$
$$x^4 - x + 1 = 0, \qquad x^5 - 10x + 1 = 0, \qquad x^4 - x + 1 = 0, \qquad x^4 - x^3 - 1 = 0,$$
$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0, \qquad x^8 - 8x^7 + 2 = 0, \qquad (x-2)^7 + x^2 - 2x + 1 = 0,$$
$$x^9 - 3x^3 + 2 = 0, \qquad x^3 + 6x^2 - 3x - 1 = 0, \qquad x^{10} - 20x + 1 = 0,$$
$$2x^4 + 3x^2 - 2x - 1 = 0, \qquad 2x^4 - 3x^2 - 2x - 1 = 0, \qquad x^3 + x^2 - 1 = 0,$$
$$e^x = ax + b, \qquad e^{x^2 + x\mathrm{L}x} + 11e^{(x^2 + x\mathrm{L}x)} - 8 = 0,$$
$$x - \operatorname{tg} x = 0, \qquad \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \mathrm{L}\,\frac{1 + \sin^2 x}{\cos x} - 1 = 0,$$

290. — Discuter le nombre des racines réelles des équations

$$x^7 + ax^5 + bx^3 + c = 0, \qquad x^3 + ax^2 + b = 0 \qquad x^7 + ax^6 + bx^3 + c = 0,$$
$$(n-h)x^n - nx^{n-h} + 4 = 0, \qquad x^{11} + px + q = 0, \qquad x^9 + px^5 + q = 0,$$
$$x^5 + px^2 + q = 0, \qquad x^8 + \lambda x^5 + \mu x^2 - 1 = 0, \qquad x^8 + x^5 + x^2 + a = 0,$$
$$x^6 + ax + b = 0, \qquad x^6 + ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

291. — Appliquer le théorème de Rolle à l'équation bicarrée.

292. — Résoudre algébriquement les équations

$$x^4 + 1 = 0, \qquad x^6 + 1 = 0, \qquad x^8 + 1 = 0, \qquad x^{12} - 1 = 0, \qquad x^{15} + 1 = 0, \qquad x^4 - 3 = 0,$$
$$x^3 - 28 = 0, \qquad x^{12} + 1 = 0, \qquad x^5 + 1 = 0, \qquad (x+1)^7 - x^7 - 1 = 0.$$

293. — Démontrer que l'équation $(x+1)^{6n+4} - x^{6n+4} - 1 = 0$ admet comme racines les racines cubiques imaginaires de l'unité.

294. — Condition pour que l'équation du cinquième degré ait une racine triple et une racine double.

295. — Écrire que l'équation $x^4 + 6px^2 + 4qx + r = 0$ a deux racines distinctes.

296. — Résoudre $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ sachant qu'elle a une racine double.

297. — Condition pour que $x^6 + ax^2 + b = 0$ ait une racine double.

298. — Résoudre l'équation $x^4 + 3x^2 - 2x + p = 0$ sachant que le produit de deux racines est égal à 1.

299. — Si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, l'équation $f(x)f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$ a toutes ses racines imaginaires.

300. — Condition pour que l'équation $ax^5 + bx^3 + c = 0$ ait une racine double.

301. — Condition pour que l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ait deux racines doubles.

302. — On donne une équation algébrique $f(x) = 0$; soit α une racine de la dérivée, si $f(\alpha)f''(\alpha) > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a au moins deux racines imaginaires. Déduire de là que si dans une équation il manque un terme entre deux termes dont les coefficients sont de même signe, l'équation a au moins deux racines imaginaires.

303. — Peut-on résoudre une équation du troisième degré dont les racines sont en progression arithmétique ?

304. — Sachant que l'équation $x^7 + px^6 + qx + r = 0$ a une racine triple, calculer cette racine et simplifier l'équation.

305. — Démontrer que les polynomes qui apparaissent dans les dérivées d'ordre n des fonctions e^{-x^2} et $e^{\frac{1}{x}}$ ont toutes leurs racines réelles.

306. — En posant $z = x + \frac{1}{x}$, démontrer que $x^n + \frac{1}{x^n}$ est une fonction entière de z qui a toutes ses racines réelles.

307. — Soit $\Delta^p f(x)$ la différence d'ordre p de la fonction $f(x)$ relative à l'accroissement h de la variable. Démontrer que $\frac{\Delta^p f(x)}{h^p}$ a pour limite $f^p(x)$ quand h tend vers zéro.

308. — Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 connaissant $u_0 = 1$, $\Delta u_0 = -2$, $\Delta^2 u_0 = 2$, $\Delta^3 u_0 = 3$, $\Delta^4 u_0 = 0$.

309. — Calculer un polynome du cinquième degré qui prenne les mêmes valeurs que le polynome $x^4 + 3x + 1$ pour les valeurs -2, -1, 0, 1, 2 de la variable et qui s'annule pour $x = 4$.

310. — Démontrer que

$$n^p - \frac{n}{1}(n-1)^p + \frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^p - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(n-3)^p + \cdots$$

est nul si p est un entier inférieur à n, et est égal à $n!$ si $p = n$.

Trouver une fonction entière de x qui prenne les mêmes valeurs que $\sin x$ pour $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = 2\pi$.

II. — Trigonométrie.

311. — On donne $\cos a$, calculer $\operatorname{tg} 6a$.

312. — On donne $\operatorname{tg} a$, calculer $\cos 7a$.

313. — On donne $\operatorname{tg} a = 5$, calculer $\cos \frac{3a}{4}$.

314. — Sachant que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, calculer $\operatorname{tg} \frac{\pi}{16}$.

315. — Calculer $\cos \frac{a}{2}$ connaissant $\sin 3a$.

316. — Rendre calculable par logarithmes $\cos^2 p - \sin^2 q$. Vérifier que cette expression est symétrique par rapport à p et q.

317. — Démontrer que toute fonction entière de $\sin x$ et $\cos x$ peut être mise sous la forme

$$A + A' \sin x + A'' \sin 2x + \ldots + B + B' \cos x + B'' \cos 2x + \ldots,$$

le développement étant limité.

318. — Résoudre les équations :

$$\sin 3x + \sin 2x = 0, \qquad \sin 2x + \cos(x - a) = 0, \qquad \cos x + \operatorname{tg} x = 2, \qquad \sin 4x + 2 \sin 2x + 3 \sin x = 0,$$
$$\cos^4 x - 4 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0, \qquad \sin 6x - 2 \sin 4x + 2 \sin 2x - 1 = 0$$

319. — Résoudre le système : $\sec x - \sec y = m$, $x + y = a$.

320. — Résoudre trigonométriquement les équations :

$$2x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0, \qquad x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

321. — Les tangentes des angles d'un triangle rectiligne vérifient une certaine relation. La trouver. Si trois angles vérifient cette relation, sont-ils les angles d'un triangle ?

322. — Résoudre un triangle rectiligne connaissant $a + b$, c, C.

323. — Trouver la valeur numérique de $(1 + i)^m + (1 - i)^m$.

324. — Résoudre l'équation $(1 + ix)^m + (1 - ix)^m = 0$.

325. — Calculer $(1 + 2)^m + (1 + 2j)^m + (1 + 2j^2)^m$, j et j^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité.

326. — $f(x)$ étant un polynome et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ désignant les racines m^{es} de l'unité, calculer

$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \cdots + f(\alpha_m).$$

327. — Calculer $(x + a\alpha)^m \left(x + \frac{a}{\alpha}\right)^m$, α désignant une racine m^e de l'unité.

III. — Géométrie analytique à deux dimensions.

328. — Construire les courbes qui ont pour équations en coordonnées rectilignes :

$$y = x \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \qquad y^2 - 2xy - 3x^2 + x^4 - x^5 = 0, \qquad x^8 - y^6 - x^4 + y^5 = 0, \qquad (x^2 - 4)(y^2 - 4) + x^3 + y^3 = 0,$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{1 + 3x - x^3}, \qquad x^3y^3 - x^4 - y^4 + 1 = 0, \qquad x^2y^2 - 2(x - 2)y + 4x - 7 = 0,$$

$$x^7y^4 - 3xy + 1 = 0, \qquad x^3y + y^4 + x = 0, \qquad x^2(x - y)^3 + x^3 + y = 0, \qquad x^2y^3 + x^3 - y = 0,$$
$$4y^2 - 4x^2y - x^5 = 0, \qquad x^5 - x^3y^2 + y^3 - x^2y = 0, \qquad x^3y - x^3 - x^2 - y^2 = 0, \qquad x^6 - y^6 + 6x^2y^2 + y^3 = 0,$$
$$y^6 - x^3 + x - y = 0, \qquad x^3y - xy^3 + 2xy - 1 = 0, \qquad x^4y^2 - x^2y^4 + 2xy - 1 = 0, \qquad x^5 - x^2y + y^2 = 0,$$
$$x^4 + x^3 + x - y = 0, \qquad xy^4 + x^3 - y^3 - x = 0, \qquad xy^3 - x^2y + 1 = 0, \qquad x^4y^2 - 2x^3y - 1 = 0,$$

$$x^2y^3 + x^3 + y^2 = 0, \qquad x^5 - x^3y^2 + y^3 - y = 0, \qquad x^5y - xy^5 + y^3 - 1 = 0, \qquad y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{x}} - x,$$

$$x^5 - y^5 - 4y = 0, \qquad y = \frac{x^m - 1}{x^2 - 1}, \qquad y = x + 1 + \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1}, \qquad y = \sqrt{5x^2 + 7} - \sqrt{7x^2 - 9},$$

$$x^3y^2 - x^5 + y^4 = 0, \qquad x^7y - 2xy^3 + 1 = 0, \qquad x^3y^2 - xy + 1 = 0, \qquad x^3y^2 + x^4 - y^4 = 0,$$
$$x^3y^2 - x^3 - y^3 = 1, \qquad x^4 - y^4 + x^2 + 3xy + 2y^2 = 0, \qquad 5x^2y^2 + y^3 - 2x = 0, \qquad x^3 + y^3 - 3mxy + 1 = 0,$$

$$y = \frac{1}{2x - 1 - \sqrt{x^2 + 1}}, \qquad x^5y^2 - 3x^2 + y^3 = 0, \qquad x^5y - 3xy^4 + 1 = 0, \qquad y = x^4 - x + 1,$$
$$x^2y^3 - 5x^4y + 1 = 0, \qquad x^2y^2 - x^2 + y^2 + 2xy = 0, \qquad xy^5 - x^3y^3 + x^2 + y^2 = 0,$$

$$y^5 - x^5 + y - x = 0, \qquad x^5 - xy^4 + y^3 - x = 0, \qquad x^4 - xy^3 + y^2 - 1 = 0,$$
$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \qquad y = \frac{x^4 - 3x^2 - 1}{x^3 + 4x}, \qquad y = \pm x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad y = \frac{x^m - 1}{x - 1},$$
$$x^4 - y^4 + (x - y)(2x + y + 1)^2 = 0, \qquad x(x - y)^2 + (2x + y + 1)^2 = 0, \qquad x^5 - y^5 + y - x = 0,$$
$$x^5 + x^2y^3 - x + y = 0, \qquad x^4 - x^2y^2 + y^3 - x = 0, \qquad x^4 - y^4 - 4xy + x + y = 0,$$
$$(x^2 + y^2)(x^2 - 4y^2)^2 - 4xy = 0, \qquad x^5 + y^5 - 5a^2x^2y = 0, \qquad x^7 + y^7 = a^7, \qquad x^3y^7 - 2xy^5 + 1 = 0,$$
$$y^3 - 2xy^2 + x^2y + 5y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 4x + 1 = 0, \qquad x^4 - 2xy + y^2 = 0, \qquad x(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 = 0,$$
$$x^7 - y^7 + 2xy = 0, \qquad x^4y - 2x^3 + 2y^3 - x = 0, \qquad x = \frac{y^3 - y^2}{(y + 1)^2}, \qquad x = \frac{y - 2}{y^4 - 1},$$
$$y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}, \qquad (x + y)^4 - (x - y)^2 + 1 = 0.$$
$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\mathrm{L}t}{1 + t - \mathrm{L}t}, \\ y = \dfrac{t - \mathrm{L}t}{1 + t - \mathrm{L}t}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1 + t}{t^2}, \\ y = \dfrac{1 - t^2}{t^2}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t}{t^2 - 1}, \\ y = \dfrac{t + 2}{(t - 1)(t - 2)}. \end{array}\right.$$

329. — Construire les courbes qui ont pour équations en coordonnées polaires :

$$\rho^2 \cos\omega - 4\rho + \sin\omega = 0, \qquad \rho^3 - 3\rho\cos\omega + 1 = 0, \qquad \rho = \sqrt{\frac{\sin 3\omega}{\cos 2\omega}}, \qquad \rho^2 = \frac{1 - \sin\omega}{\cos\omega},$$
$$\rho = \frac{\cos 3\omega}{\sin 2\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin\omega}{1 - 2\cos\omega}, \qquad \frac{m}{\rho} = a\omega^2 + b\omega + c, \qquad \rho = \frac{\sin\omega}{\omega}, \qquad \rho^2 = \frac{3}{3 + 2\sin 2\omega},$$
$$\rho^3 - 4\rho\,\mathrm{tg}\,\omega + 8 = 0, \qquad \rho = \frac{2}{3 + 4\sin\omega}, \qquad \rho = \frac{2}{2\sin\omega + \cos\omega + 1}, \qquad \rho^3 - 3\rho = \frac{1}{\sin\omega},$$
$$\rho = \frac{\sin\omega + \cos\omega}{\sqrt{1 + \cos 2\omega}}, \qquad \rho = \frac{1 + 2\cos\omega}{\sin\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin\omega}{\omega - \alpha}, \qquad \rho = \frac{1 - 2\sin\omega}{3 + 4\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\omega},$$
$$2\rho^3 - 3\rho^2\,\mathrm{tg}\,\omega + 1 = 0, \qquad \rho^2 = \frac{\mathrm{tg}\,\omega}{1 + \sin\omega}, \qquad \rho^3 - 3\rho\sin\omega + 2\,\mathrm{tg}\,\omega = 0, \qquad \rho = \frac{\omega - \pi}{\omega + \frac{\pi}{4}},$$
$$\rho = \frac{1}{1 - \mathrm{tg}\,2\omega}, \qquad \rho^3\cos^2\omega - 3\rho^2\sin\omega - 1 = 0, \qquad \rho^4 - 4\rho^2 + \mathrm{tg}\,\omega = 0, \qquad \rho^2 = \frac{2}{\sin 2\omega - \cos 2\omega},$$
$$\rho^3 - \rho^2 = \mathrm{tg}\,\omega, \qquad \rho^2 - 2\rho\sin\omega + \mathrm{tg}\,\omega = 0, \qquad \rho^2 = \frac{1}{\sin 2\omega + \cos 2\omega}, \qquad \rho = \frac{1 - \cos\omega}{\pi^2 - \omega^2},$$
$$\rho^2\cos\omega - 4\rho + 2\omega\,\mathrm{tg}\,\omega = 0, \qquad \rho^2 = \frac{\mathrm{tg}\,\omega}{1 + \sin\omega}, \qquad \rho^2\cos^3\omega - \rho\cos^2\omega - \sin\omega = 0,$$
$$\rho^2\omega - 2\rho + 1 = 0, \qquad \rho^2\cos\omega + 4\rho\sin\omega - 1 = 0, \qquad \rho^2 + 2\rho(\cos\omega - \sin\omega) + 3 = 0.$$
$$\left\{\begin{array}{l} \rho = \dfrac{2t}{1 - t^2}, \\ \sin\omega = \dfrac{1 - 2t^2}{1 + t^2}. \end{array}\right.$$

330. — Trouver les asymptotes des courbes :

$$y = \sqrt{\frac{x^4 + 2}{x + 1}} - \sqrt{x^2 + x + 1}, \qquad \rho^3\cos^3\omega + 2\rho^2\sin\omega + 2 = 0, \qquad \rho^2\cos 3\omega - 2\rho\cos\omega + \sin\omega = 0.$$

331. — Trouver l'angle des deux droites $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$; choisir le signe quand on prend les demi-droites situées au-dessus de Ox.

332. — Que représente l'équation $\alpha P^5 + \beta PQ^4 + \gamma Q^5 = 0$, P et Q désignant des fonctions linéaires?

333. — Un cercle roule dans un cercle de rayon double, lieu d'un point du cercle mobile.

334. — Équation d'une tangente commune aux deux cercles

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0.$$

335. — Sachant que l'équation générale du deuxième degré $f(x, y) = 0$ représente deux droites, reconnaître si un point (α, β) est dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus.

336. — On donne un cercle de diamètre AB et un point P. Une sécante quelconque menée par le point P rencontre le cercle aux points C et D. Lieu du point de rencontre de AC et BD.

337. — Soit OAB un triangle rectangle en O. On mène une droite quelconque OL sur laquelle on projette A en A′, B en B′. Trouver le lieu d'un point M situé sur OL et tel que l'on ait $\overline{OM}^2 = \overline{OA'}.\overline{OB'}$.

338. — Trouver une courbe telle que l'ordonnée soit moyenne proportionnelle entre la normale et la sous-normale.

339. — Écrire l'équation d'une courbe du troisième degré n'ayant pas d'asymptote.

340. — Écrire que la droite $ux + vy + w = 0$ est asymptote d'une courbe du m^e degré $f(x, y) = 0$.

341. — Condition pour que deux courbes soient tangentes. Application aux deux courbes $\cos x = e^y$ et $ux + vy + 1 = 0$

342. — On considère la courbe $x(x^2-y^2)+x^2+y^2-1=0$. Trouver le lieu des milieux des cordes parallèles à $x-y=0$.

343. — Soit la courbe $xy^2-2x^2y+3=0$. Trouver le diamètre des cordes parallèles à une direction donnée.

344. — Tangentes par un point extérieur à la courbe $x^3y^2=a^5$. Leur nombre.

345. — Concavité et convexité pour la courbe $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$.

346. — Lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée dans la courbe $y^2=x^3$.

347. — Tangentes issues d'un point à la courbe $y^2=x^3$.

348. — Une courbe du cinquième degré peut-elle avoir deux branches paraboliques ?

349. — Déterminer une courbe de façon que la sous-tangente soit égale au double de l'abscisse.

350. — Calculer l'équation du grand axe de l'ellipse $x^2+2xy+5y^2-8x=0$ (*).

351. — Foyer de la parabole $x^2-6xy+9y^2-4x=0$.

352. — Equation d'une directrice de la conique $x^2-4xy+6y-1=0$.

353. — Foyer et directrice de la conique $(2x-y+1)^2+x-y=0$.

354. — Foyers de l'hyperbole $xy=1$.

355. — On donne la parabole $y^2-2x=0$ rapportée à un diamètre et à une tangente faisant 45° avec ce diamètre. Trouver l'équation de la tangente au sommet.

356. — Trouver les longueurs des tangentes issues du point (α, β) à la conique $x^2-4xy+3y^2-4x=0$.

357. — Déterminer la position de l'origine par rapport à la courbe $x^2+xy-3x-6y+1=0$.

358. — Etant donnée la conique $2x^2+4xy-y^2+4x-1=0$, mener par le point $x=1$, $y=-1$ une droite qui soit partagée en deux parties égales par ce point.

359. — Asymptotes de la conique $2x^2-4xy-y^2+2x-6y+1=0$.

360. — On donne l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, trouver un point tel que les tangentes issues de ce point à l'ellipse aient des longueurs données p et q.

361. — Longueurs des tangentes menées du point $(-1, 3)$ à la conique $2x^2-4xy+4x-4y=0$.

362. — Foyer de la parabole $x^2-4xy+4y^2+4x=0$.

363. — Foyers de la courbe $2xy+y^2-4x=0$.

364. — Equation de l'axe transverse de l'hyperbole $x^2-2xy-4y=0$.

365. — Foyer de la parabole $y^2-2px+q=0$, les axes de coordonnées faisant l'angle 60°.

366. — Calculer l'équation d'une directrice des coniques : $2x^2-2xy+2y^2-x=0$, $ax^2+cy^2+2dx+2ey=0$, $x^2-2xy+4y=0$.

367. — La conique $x^2-2xy+4x-2y+1=0$ étant rapportée à des axes faisant 45°, calculer la distance d'un foyer à la directrice correspondante.

368. — Sommets de la conique $x^2-4xy+3y^2-6x=0$.

369. — On donne la conique $2x^2+4xy+y^2-8x=0$, on mène le diamètre parallèle à la droite $x-y=0$. Longueur de ce diamètre. Déterminer sur ce diamètre un point d'où l'on voit la conique sous un angle droit.

370. — Trouver la distance des foyers réels de la conique $3x^2-4xy+2y^2+4x-1=0$, (l'angle des axes étant égal à 60°).

371. — On donne l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ et une droite $ux+vy+w=0$, trouver l'équation du cercle admettant pour diamètre la corde interceptée sur la droite par la conique.

372. — Etant donnée la conique $f(x, y)=0$ (*), écrire que la droite $ux+vy+w=0$ est : 1° axe; 2° directrice; 3° l'un des diamètres conjugués égaux; 4° asymptote.

373. — Calculer la longueur de la corde interceptée sur la droite $ux+vy+w=0$ par la conique $f(x, y)=0$.

374. — On donne une conique $f(x, y)=0$ et une direction de droite $ux+vy=0$. Trouver la corde parallèle de longueur maximum.

375. — Lieu des points d'où l'on peut mener à la conique $f(x, y)=0$ des tangentes faisant l'angle α (axes obliques). Cas particuliers $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

376. — L'équation générale $f(x, y)=0$ représentant une parabole, trouver l'équation de la tangente au sommet.

377. — Condition pour que les droites joignant le centre de la conique $f(x, y)=0$ aux points de rencontre avec la droite $ux+vy+w=0$ soient des diamètres conjugués.

378. — Equation de l'ensemble des tangentes à la conique $f(x, y)=0$ aux points où elle est coupée par la droite $ux+vy+w=0$. Cette équation est de la forme $f(x, y)+\lambda(ux+vy+w)^2=0$, déterminer λ en cherchant dans quel cas λ est nul ou infini.

379. — Trouver les sommets et les foyers de la conique $ax^2+cy^2+f=0$, les axes de coordonnées faisant l'angle de 30°.

380. — On donne la conique $f(x, y)=0$; déterminer les tangentes qui font avec leur diamètre conjugué l'angle de 45°.

(*) Sauf avis contraire les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.

(*) Dans les questions relatives aux coniques, $f(x, y)$ représente le premier membre de l'équation générale du second degré :

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F.$$

381. — Longueur du segment intercepté sur la droite $ux + vy + w = 0$ par les tangentes menées du point (α, β) à la conique $f(x, y) = 0$.

382. — Mener à la conique $f(x, y) = 0$ deux tangentes parallèles qui soient à la distance d l'une de l'autre.

383. — On donne l'équation d'une conique $f(x, y) = 0$, les axes de coordonnées faisant l'angle θ. Former l'équation de cette conique rapportée à un axe et à la tangente en un sommet situé sur cet axe.

384. — L'équation $f(x, y) = 0$ représentant une hyperbole, trouver l'équation de l'hyperbole conjuguée. — Quelle est celle de ces courbes qui est dans l'angle aigu des asymptotes.

385. — Mener à l'hyperbole $ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ une tangente telle que les longueurs interceptées sur les asymptotes à partir du centre soient dans un rapport donné.

386. — On donne une parabole rapportée à un diamètre et à une tangente à l'extrémité. — Calculer l'équation d'un cercle ayant pour centre le foyer et passant par le sommet.

387. — Étant donnée la conique $f(x, y) = 0$, calculer : 1° la distance des deux foyers F et F' ; 2° la distance des deux directrices ; 3° l'équation du cercle décrit sur FF' comme diamètre.

388. — On suppose que $f(x, y) = 0$ représente une hyperbole, trouver le produit des distances d'un point de la courbe aux asymptotes.

389. — Étant donnée une conique $f(x, y) = 0$ et un point P (α, β), trouver la longueur de la corde qui a son milieu au point P.

390. — Trouver l'équation d'une directrice de la conique $ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$.

391. — On donne une ellipse $f(x, y) = 0$, trouver deux diamètres conjugués dont les longueurs soient dans le rapport k.

392. — On donne une conique à centre $f(x, y) = 0$, trouver l'équation d'une conique concentrique et homothétique, le rapport d'homothétie étant égal à k.

393. — On donne une conique $f(x, y) = 0$ et un point A (α, β), trouver le rapport des distances du point A aux deux extrémités du diamètre qui passe par ce point.

394. — Foyer de la parabole $(y - \lambda x)^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ (axes obliques).

395. — Écrire que l'équation $f(x, y) = 0$ représente deux droites parallèles distantes d'une longueur l.

396. — Étant donnée la conique $f(x, y) = 0$ trouver l'ensemble des diamètres conjugués faisant l'angle α.

397. — L'équation $f(x, y) = 0$ représentant une hyperbole, calculer l'aire comprise entre les deux asymptotes et une perpendiculaire à l'axe menée par le foyer.

398. — On donne une conique $f(x, y) = 0$ et un point (α, β). Aire du triangle formé par les deux tangentes issues du point et la corde des contacts.

399. — Lieu du point (α, β) tels que les tangentes issues du point (α, β) à la conique $f(x, y) = 0$ rencontrent Ox en des points distants d'une longueur l. Chercher les points où le lieu rencontre la conique.

400. — Par le centre d'une ellipse on mène deux diamètres parallèles à deux diamètres conjugués d'une conique $f(x, y) = 0$; enveloppe de la corde qui joint les extrémités.

401. — Enveloppe des cordes de longueur constante d'une hyperbole rapportée à ses axes.

402. — On donne une ellipse et deux tangentes ; équation d'une ellipse homothétique, tangente aux deux droites et à l'ellipse.

403. — Équation d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués en grandeur et en position.

404. — Étant donné deux coniques $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$, condition pour que les tangentes à la conique F menées par le centre de f soient deux diamètres conjugués de f.

405. — On considère les coniques circonscrites à un triangle rectangle et telles que les normales aux points communs concourent en un même point. Trouver le lieu de ce point.

406. — On donne cinq points d'une conique, trouver le pôle de la droite qui joint deux points.

407. — Équation générale des coniques inscrites dans un rectangle.

408. — Construire une parabole connaissant : 1° le foyer, une tangente et un point ; 2° trois points et la direction de l'axe.

409. — Lieu des centres des coniques ayant pour sommets deux points donnés. Lieu des foyers.

410. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point (α, β) sur les tangentes à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

411. — Lieu des seconds foyers des coniques ayant un foyer donné et tangentes à deux droites.

412. — On considère deux coniques passant par un point (α, β) ; équation générale des coniques passant par les trois autres points.

413. — Démontrer que la distance d'un point M d'une hyperbole à un foyer est égale à la distance du point M à la directrice correspondante, cette distance étant comptée parallèlement à une asymptote.

414. — Une tangente variable à une ellipse de centre O rencontre les axes de la courbe en deux points A et B. Trouver le minimum de l'aire du triangle AOB.

415. — Trouver les tangentes communes aux coniques

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx = 0, \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey + F = 0.$$

416. — Soit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, écrire l'équation d'une autre conique ayant un axe commun avec l'ellipse. Déterminer une tangente commune aux deux courbes.

417. — Lieu des points tels que les tangentes à une conique soient parallèles à deux diamètres conjugués d'une autre conique.

418. — Lieu des points situés à la distance d de la parabole. Y a-t-il des points doubles ? Les déterminer directement.

419. — Enveloppe des asymptotes des coniques passant par quatre points.

420. — Sur la normale en M à une ellipse, on prend les longueurs MP, MP' telles que $\overline{MP}^2 = \overline{MP'}^2 = MF.MF'$. Lieu des points P et P'.

421. — Lieu des foyers des coniques ayant avec une conique donnée en un point donné le contact le plus élevé possible.

422. — Trouver le centre d'une hyperbole dont on donne trois points et les directions asymptotiques.

423. — Dans un triangle ABC, AB est fixe et l'angle A est triple de l'angle B ; trouver le lieu du point C.

424. — On donne une parabole et une circonférence ayant son centre sur l'axe ; on mène deux tangentes parallèles à la circonférence. Lieu des centres des sécantes communes à la parabole et à ces tangentes.

425. — Lieu des foyers des ellipses ayant pour centre un point C, qui passent par un point M et qui touchent une droite Δ parallèle à CM.

426. — Trouver l'équation d'une conique connaissant son centre O, un diamètre OA, la direction du diamètre conjugué et une tangente.

427. — Etant donné une ellipse rapportée à ses axes, déterminer un cercle tangent à cette ellipse en un point donné et passant par un deuxième point donné ; trouver le quatrième point de rencontre.

428. — Enveloppe de la droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, quand on a $a^p + b^p = k^p$. Construire dans le cas où $p = 1$.

429. — Enveloppe de la droite $m^2(x - y) + 2m(x + y + 1) - x + 2y = 0$.

430. — On mène par le foyer d'une parabole une corde quelconque sur laquelle on décrit un cercle comme diamètre. Enveloppe de ce cercle.

431. — Enveloppe de la droite $u^3(x - a) + 3ux - 2y = 0$, trouver le troisième point de rencontre de cette droite et de son enveloppe.

432. — Trouver un point équidistant d'une hyperbole et d'une asymptote.

433. — Par les extrémités d'un diamètre d'une ellipse on mène des parallèles à deux directions fixes. Lieu du point de rencontre.

434. — On donne une ellipse et une droite Δ parallèle au petit axe. D'un point A pris sur Δ on mène une tangente AT à l'ellipse. Lieu du milieu de AT.

435. — Diamètres conjugués communs à deux coniques.

436. — Enveloppe des cercles $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, c étant fixe, a et b variables vérifiant l'équation $f(a, b) = 0$.

437. — Relation qui existe entre six points d'une conique. Démontrer que pour que les six points x_i, y_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ soient sur une conique il faut et il suffit qu'il existe six nombres λ_i tels que l'on ait $\Sigma\lambda_i\varphi(x_i, y_i) = 0$, $\varphi(x, y)$ étant une fonction quelconque du second degré.

438. — Enveloppe des cordes d'une ellipse de longueur $2l$.

439. — Equation d'une conique dont on donne deux diamètres conjugués en position, une tangente et un point.

440. — On donne deux droites $2x + y = 0$, $x - y + 1 = 0$; ce sont deux diamètres conjugués d'une ellipse dont les longueurs sont 1 et 2. Equation de cette conique.

441. — Parmi les coniques passant par quatre points, trouver celle dont le rapport des axes est égal à k.

442. — Par un point A on mène une droite qui rencontre une hyperbole en N et les asymptotes en M et M'. Evaluer le produit $\overline{NM}.\overline{NM'}$. Variation de ce produit. — Cas où le point A est sur la courbe.

443. — On donne une ellipse et deux tangentes fixes. Trouver une troisième tangente telle que le triangle qu'elle forme avec les deux autres soit maximum.

444. — On donne deux ellipses ayant mêmes axes en position. Déterminer une tangente à l'une d'elles telle que la corde interceptée dans l'autre ait une longueur donnée.

445. — Enveloppe des normales à la parabole $y^2 - 2px = 0$, les axes de coordonnées faisant l'angle 30°.

446. — Enveloppe de la perpendiculaire à l'extrémité du diamètre d'une ellipse.

447. — Enveloppe des circonférences dont le centre parcourt une ellipse et qui passent par le centre de l'ellipse.

448. — Enveloppe des circonférences dont le centre décrit une conique et qui coupent orthogonalement un cercle.

449. — Construire une parabole passant par quatre points.

450. — Tangentes communes aux paraboles $y^2 - 2px - p^2 = 0$, $x^2 - 2qy - q^2 = 0$.

451. — Lieu des pôles des tangentes à la courbe $ax^2 + by^2 + c = 0$ par rapport au cercle $x^2 + y^2 = 1$.

452. — On donne l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Trouver l'équation d'une ellipse ayant mêmes foyers et passant par le point (α, β). Si ce point se déplace sur une parallèle à Oy, trouver l'enveloppe de ces ellipses.

453. — Lieu des points qui sont à une distance donnée de leurs polaires par rapport à une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

454. — Enveloppe des normales à la courbe $\rho = \omega$.

455. — On donne une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et un point P (α, β). Quelle est celle des cordes passant par le point P dont la longueur est maximum?

IV. — Géométrie analytique à trois dimensions.

456. — Trouver le symétrique d'un point par rapport à un plan, ou par rapport à une droite.

457. — On donne la droite $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$, on fait tourner un point M (α, β, γ) autour de la droite d'un angle θ ; trouver les coordonnées du point après la rotation.

458. — Perpendiculaire commune aux deux droites

$$\begin{cases} y = mx, \\ z = k, \end{cases} \qquad my + x = p, \quad z = 0.$$

459. — Perpendiculaire commune à Oz et à la droite $\dfrac{x-a}{\alpha} = \dfrac{y-b}{\beta} = \dfrac{z-c}{\gamma}$.

460. — Perpendiculaire commune à Oz et à la droite $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'y + D' = 0$.

461. — On donne les coordonnées de trois points, trouver les coordonnées du sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes passent par les trois points.

462. — Sachant que l'équation générale du deuxième degré $f(x, y, z) = 0$ représente deux plans, trouver l'angle de ces deux plans ; reconnaître si un point (a, b, c) est situé dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus.

463. — La même équation $f(x, y, z) = 0$ représentant deux plans parallèles, trouver la distance de ces deux plans et reconnaître si un point (a, b, c) est situé entre ces deux plans.

464. — Lieu des droites qui font des angles égaux avec deux droites fixes.

465. — Lieu engendré par un cercle de rayon constant rencontrant trois droites fixes.

466. — Si un quadrilatère gauche est coupé par un plan, le produit de quatre segments non consécutifs est égal au produit des quatre autres.

467. — Soient δ et δ' les distances d'un point M à deux droites. Lieu du point M tel que l'on ait $\lambda\delta^2 + \lambda'\delta'^2 = K$.

468. — Lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à n droites fixes soit constante.

469. — Lieu des droites s'appuyant sur deux circonférences données et sur une droite.

470. — Équation du cercle passant par trois points A, B, C situés respectivement sur les axes de coordonnées. Déterminer le centre.

471. — Équation de la surface engendrée par une droite rencontrant trois droites données.

472. — Démontrer que la surface $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(x^2 + y^2 + z^2)$ est de révolution.

473. — Équation d'un cylindre de révolution connaissant son axe et son rayon.

474. — Lieu des sommets des cônes de révolution contenant la parabole $y^2 - 2px = 0$, $z = 0$.

475. — Lieu des milieux des cordes parallèles à la direction $(\alpha, \beta, 0)$ dans la surface $zf(x, y, z) + g(x, y, z) = 0$, f et g étant des fonctions du second degré.

476. — Équation de la surface de révolution engendrée par la parabole $z = 0$, $(bx - ay)^2 + ax + by + c = 0$ tournant autour de son axe.

477. — Démontrer que les sections de deux cônes supplémentaires par un plan quelconque sont polaires réciproques.

478. — On donne deux cônes de révolution, on considère deux génératrices rectangulaires appartenant chacune à un cône. Lieu de leur perpendiculaire commune.

479. — Lieu des perpendiculaires communes aux génératrices d'un cône de révolution et à une droite fixe.

480. — Surface engendrée par la courbe $x = \sin z$, $y = 0$ tournant autour de Oz. Courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à la direction (α, β, γ). Sa projection sur le plan des xy.

481. — Lieu des droites qui touchent trois sphères.

482. — Équation du cylindre dont la section droite a pour équations $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $ux + vy + wz + h = 0$.

483. — Équations générales d'un cercle. Lieu des cercles s'appuyant sur trois droites, le centre décrivant une droite donnée.

484. — On considère la surface $1 = xyz + (y + z)(z + x)(x + y)$. Quelle est son intersection avec les droites parallèles au plan $x + y + z = 0$? Lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée de ce plan.

485. — On donne la surface $(x + y + z)^3 - x^3 - {}^3y - z^3 = 1$. Lieu des centres des moyennes distances des points de rencontre avec une droite de paramètres directeurs $1, 1, \dfrac{1}{2}$.

486. — On donne un cercle dans le plan des xy ayant pour centre l'origine, et une droite quelconque. Lieu des normales au cercle qui rencontrent la droite.

487. — Lieu de la perpendiculaire commune à une génératrice quelconque d'un cône de révolution et à la droite conjuguée de cette génératrice par rapport à une sphère.

488. — Lieu des centres des moyennes distances des points d'intersection de la surface $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 1 = 0$ avec des droites de paramètres directeurs (α, β, γ). Cas où l'on a $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

489. — On donne la surface $z(x^2 + y^2 + xy) + y^2 - 1 = 0$. Lieu des milieux des cordes parallèles à la direction $(\alpha, \beta, 0)$.

490. — Étant données deux courbes dans l'espace, peut-on leur mener un normale commune, un plan normal commun?

491. — On donne une parabole et une droite non située dans son plan. Lieu des normales qu'on peut mener à la parabole des différents points de la droite.

492. — Surface de révolution engendrée par une parabole tournant autour de sa tangente au sommet.

493. — Écrire qu'une droite est normale à une courbe. Combien de conditions?

494. — Étudier les quadriques :

$$x^2 + 4zx - 2xy + 4y - 8z + 1 = 0, \quad \text{(longueur des axes d'une section droite)},$$

$$x^2 + 2xy + 4y^2 - 2y - 2z + 1 = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy + 4x - 2z = 0,$$

$$yz + x + y + z - 1 = 0 \quad \text{(sommet)}, \quad yz + zx + xy + x + y + z = 0,$$

$$2yz + zx + xy - 1 = 0 \quad \text{(ombilics)}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - y^2 - zx - xy = 1,$$

$$(2x + 3y - 1)(2y - 4z + 1) - 4x + 12z = 0 \quad \text{(sommet)}, \qquad y^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 2z = 0,$$

$$3(x^2+y^2+z^2-R^2)=(x+y+z)^2, \qquad (x-y)^2+2z^2=x+y+1,$$
$$(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=2(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z) \quad \text{(paramètre de la section principale)},$$
$$x^2-y^2-z^2+4xy+4yz-8=0 \quad \text{(plans cycliques et plans principaux)},$$
$$3x^2-3y^2+z^2-2yz-4zx+8xy-8x+6y+2z=0 \quad \text{(la rapporter à ses plans principaux)},$$
$$z=\alpha x+\beta y+\gamma\pm\sqrt{xy+ax+by+c}, \qquad (x+y+z^2)-2mxy=0,$$
$$x^2+y^2+z^2-2xy+4y=0 \quad \text{(plans cycliques)}, \qquad z(y-x)=ax \quad \text{(axe)},$$
$$x^2+y^2+z^2+2a(yz+zx+xy)+2b(x+y+z)+c=0 \quad \text{(ce sont des quadriques de révolution, trouver les méridiennes)},$$
$$yz+zx+xy=1 \quad \text{(axes)},$$
$$(x+y+z)^2-2x+6y+4z=0 \quad \text{(génératrice principale et paramètre)},$$
$$x^2-2y^2-3yz+3zx+xy+4z=0 \quad \text{(génératrices rectilignes)}.$$

495. — Discuter la nature des quadriques représentées par les équations

$$Ax^2+A''z^2+2Byz+2Cx+D=0, \qquad Ax^2+2Byz+2C''x+2C'z+D=0,$$
$$Ax^2+2B'zx+2B''xy+2C'y=0, \qquad A'y^2+A''z^2+2Byz+2Cx+2C'y+2C''z=0,$$
$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2Cx+2C''z=0, \qquad Ax^2+A'y^2+2Byz+2Cx+D=0,$$
$$PQ-RS=0, \qquad PQ+R=0 \quad \text{(P, Q, R, S étant des fonctions linéaires)},$$
$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2z)x+c(z^2+2xy)=1, \qquad x^2+y^2+z^2-2ayz-2bzx-2cxy=1,$$
$$Ayz+Bzx+Cxy+Dx+Ey+Fz=0, \qquad x^2(2a^2+b^2)+y^2(2b^2+a^2)+z^2(a^2+b^2)+2abxy=(a^2+b^2)^2.$$

496. — Conditions pour que l'équation générale du deuxième degré $f(x, y, z)=0$ représente : 1° deux plans parallèles ; 2° deux plans perpendiculaires ; 3° un cylindre hyperbolique ; 4° un cylindre elliptique réduit à une droite ; 5° un hyperboloïde à deux nappes ; 6° un cylindre parabolique ; 7° un cylindre elliptique réel.

497. — Sachant que $f(x, y, z)=0$ (*) représente une quadrique réglée, on lui mène un plan tangent parallèle au plan des yz, trouver l'angle des génératrices suivant lequel le plan tangent coupe la surface.

498. — On donne une quadrique $f(x, y, z)=0$ et un point $P(\alpha, \beta, \gamma)$. Mener par ce point un plan tel que le point P soit centre de la section.

499. — On donne un paraboloïde $f(x, y, z)=0$; trouver : 1° les équations des génératrices passant par le sommet ; 2° les coordonnées des foyers des sections principales ; 3° le produit des distances de ces foyers au plan tangent au sommet.

500. — On donne une quadrique passant par l'origine ; trouver l'angle des génératrices passant par ce point.

501. — On donne un hyperboloïde à deux nappes, $f(x, y, z)=0$, et un diamètre de paramètres directeurs α, β, γ. Condition pour que ce diamètre soit réel.

502. — Sachant que $f(x, y, z)=0$ représente un cylindre parabolique, trouver : 1° le paramètre ; 2° le plan principal ; 3° le lieu des foyers des sections droites ; 4° le plan tangent au sommet.

503. — Trouver la région intérieure du paraboloïde $f(x, y, z)=0$.

504. — Sachant que l'équation $f(x, y, z)=0$ représente un paraboloïde elliptique, par le foyer d'une section principale on mène un plan perpendiculaire à l'axe, qui détermine dans ce paraboloïde une ellipse dont on demande l'aire et les longueurs d'axes.

505. — Sachant que $f(x, y, z)=0$ représente un cylindre elliptique, trouver : 1° l'équation d'un plan principal ; 2° les rayons des cercles tracés sur ce cylindre.

506. — Écrire que la droite $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d=0$ est 1° axe, 2° diamètre conjugué des sections circulaires de la quadrique $f(x, y, z)=0$.

507. — Écrire que le point (α, β, γ) est 1° sommet ; 2° ombilic de la quadrique $f(x, y, z)=0$.

508. — Condition pour que le plan $ux+vy+wz+p=0$ coupe l'ellipsoïde $f(x, y, z)=0$ suivant une ellipse réelle.

509. — Condition pour que $f(x, y, z)=0$ représente un paraboloïde de révolution de paramètre p.

510. — Écrire que la droite $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ est génératrice du cône asymptote de la quadrique $f(x, y, z)=0$.

511. — Montrer que par un choix convenable d'axes on peut ramener l'équation générale du deuxième degré à la forme $Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx=0$.

512. — Sachant que $f(x, y, z)=0$ représente un paraboloïde elliptique trouver les plans parallèles aux plans directeurs et passant par l'axe.

513. — Écrire que la droite $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$ est tangente à la quadrique $f(x, y, z)=0$.

514. — Écrire que deux droites

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0, \\ a'x+b'y+c'z+d'=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0, \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0, \end{cases}$$

sont conjuguées par rapport à la quadrique $f(x, y, z)=0$.

515. — Trouver l'angle des plans cycliques réels de la quadrique $f(x, y, z)=0$.

516. — Étant donnée une quadrique à centre $f(x, y, z)=0$, calculer la longueur du diamètre qui a pour paramètres directeurs α, β, γ.

517. — Longueur de la corde interceptée dans la quadrique $f(x, y, z)=0$ par la corde $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.

(*) Dans les questions relatives aux quadriques, $f(x, y, z)$ représente le premier membre de l'équation générale du deuxième degré : $Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D$.

518. — Démontrer que pour qu'une quadrique soit réglée, il faut que le discriminant H du premier membre soit positif.

519. — Équation des plans asymptotes du cylindre $f(x, y, z) = 0$.

520. — Nature de la section de la quadrique $f(x, y, z) = 0$ par le plan $ux + vy + wz + p = 0$.

521. — On donne une quadrique $f(x, y, z) = 0$. Abaisse-t-on le problème de la recherche des plans principaux si on donne un point dans un plan principal ?

522. — Équation de l'ensemble des plans tangents menés à la quadrique $f(x, y, z) = 0$ par la droite $ux + vy + wz + p = 0$, $u'x + v'y + w'z + p' = 0$.

523. — Sachant que $f(x, y, z) = 0$ représente un cylindre hyperbolique, reconnaître si le cylindre est dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus de ses plans asymptotes.

524. — Conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(x, y, z) = 0$ représente un cylindre de révolution de rayon R.

525. — On donne une quadrique, trouver la distance des plans tangents à cette quadrique parallèles au plan des xy.

526. — Écrire que $f(x, y, z) = 0$ représente un paraboloïde elliptique dont les paramètres principaux sont égaux à 1 et à 2.

527. — Écrire que deux quadriques $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ ont un plan principal commun.

528. — Lieu des axes des cônes circonscrits à un ellipsoïde et ayant leurs sommets sur une droite passant par le centre.

529. — Équation générale des quadriques normales à une droite.

530. — On donne un ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Minimum de l'angle d'un diamètre avec son plan diamétral conjugué.

531. — Lieu des normales à un hyperboloïde en tous les points d'une génératrice.

532. — Étant données deux quadriques, peut-on mener une tangente à l'une qui soit normale à l'autre ?

533. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les plans tangents à deux quadriques.

534. — Étant donnée une quadrique $f(x, y, z) = 0$, peut-on déterminer λ de façon que $f(x, y, z) + \lambda = 0$ soit réglée ?

535. — On donne un ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$; on mène les normales aux extrémités du diamètre $x = y = z$. Trouver la distance de ces normales.

536. — Lieu des normales menées à un ellipsoïde par tous les points d'une droite. Même question en remplaçant l'ellipsoïde par une ellipse ou une parabole.

537. — On donne un tétraèdre ABCD. Trouver l'équation du paraboloïde passant par les arêtes AB, CD, AD, BC en prenant pour axes de coordonnées les droites joignant les milieux des arêtes opposées.

538. — Équation générale des quadriques passant par deux droites. Comment se coupent deux de ces quadriques ?

539. — Équation générale des quadriques contenant les axes Ox, Oy et admettant Oz pour diamètre conjugué du plan des xy. A priori, combien cela fait-il de conditions ?

540. — Lieu des axes des cylindres circonscrits à un ellipsoïde et dont l'aire des sections droites est donnée.

541. — Équation du plan coupant l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ suivant un cercle de rayon R.

542. — On donne une ellipse et un point P. On considère une quadrique telle que le plan de cette ellipse soit plan polaire de P, on donne de plus un plan parallèle au plan de l'ellipse qui soit tangent à la quadrique. Équation générale.

543. — Lieu des centres des sphères bitangentes au cône $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

544. — Lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes s'appuient sur une ellipse.

545. — On coupe l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ par le plan $ux + vy + wz = 0$; trouver l'équation de la section dans son plan. Condition pour que ce soit un cercle.

546. — Lieu des axes des paraboloïdes équilatères passant par deux droites.

547. — Lieu des milieux des cordes d'une quadrique qui passent par un point.

548. — Quadriques passant par les côtés d'un quadrilatère gauche, paraboloïde du faisceau.

549. — Condition pour qu'une génératrice d'un hyperboloïde soit perpendiculaire à un plan cyclique.

550. — Le produit des sinus des angles d'une génératrice avec les plans de sections circulaires est constant.

551. — Lieu des foyers des sections d'une quadrique par des plans passant par une normale.

552. — Condition pour que le plan $ux + vy + wz = 0$ coupe le cône $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2$ suivant deux génératrices rectangulaires.

553. — Lieu des perpendiculaires communes aux génératrices de l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ et à la droite $x = \alpha$, $y = \beta$.

554. — Le parallélépipède construit sur trois génératrices de même système d'un hyperboloïde a un volume constant.

555. — Exprimer qu'une quadrique passe par Oz, que le plan tangent à l'origine est le plan des xz, et le plan tangent à l'infini le plan des yz. Variation du plan tangent le long de Oz. Équation d'une deuxième quadrique se raccordant avec la première suivant Oz.

556. — On donne une quadrique et des cordes parallèles à une direction donnée ; on les divise en trois parties égales. Lieu des points de division.

557. — Écrire que les deux quadriques $f(x, y, z) = 0$, $f_1(x, y, z) = 0$ sont tangentes en un point de l'axe des x.

558. — Si dix points (x_i, y_i, z_i) sont sur une même quadrique, on peut trouver dix nombres λ tels que $\varphi(x, y, z)$ étant une fonction du deuxième degré quelconque on ait $\Sigma\lambda_i\varphi(x_i, y_i, z_i) = 0$.

559. — Une quadrique est-elle déterminée par un cône circonscrit, le centre et un plan tangent. — Combien de solutions?

560. — On assujettit un hyperboloïde de révolution à contenir deux droites et à passer par un point. Est il déterminé? Trouver son axe.

561. — On assujettit une quadrique à être inscrite dans un cône. Combien de conditions? On ajoute la courbe de contact, et un point. Trouver le plan tangent en ce point.

562. — Combien faut-il de conditions pour déterminer un cylindre de révolution?

563. — On assujettit une surface du troisième ordre à contenir un cercle; combien de conditions?

564. — On assujettit une surface du m^e degré à contenir une droite; combien de conditions?

565. — Comment se coupent deux quadriques qui ont: 1° deux génératrices communes; 2° une génératrice commune et mêmes plans tangents en tous les points de cette génératrice; 3° une génératrice commune et qui se touchent en un point situé en dehors de cette génératrice?

566. — Comment se coupent deux paraboloïdes qui ont: 1° un plan directeur commun; 2° un plan directeur commun et une génératrice commune parallèle à ce plan; 3° un plan directeur commun et une génératrice commune non parallèle à ce plan.

V. — Géométrie descriptive.

567. — Mener par une droite rencontrant la ligne de terre un plan tel que l'angle de ses traces ait pour bissectrice la droite donnée.

568. — On donne une droite et un point; faire tourner le point autour de la droite d'un angle donné.

569. — Soit un segment de droite donné par ses projections. Construire un carré dont le segment soit la diagonale et dont le plan fasse avec le plan horizontal un angle de 45°.

570. — Angle d'une droite avec le plan bissecteur du deuxième dièdre.

571. — Trouver dans un plan donné par ses traces une droite dont les projections soient confondues.

572. — On donne un cône défini par sa trace horizontale (un cercle), par la projection horizontale et la cote de son sommet. Construire la trace horizontale d'un cône égal ayant pour sommet un point donné.

573. — On donne un cercle dans le plan horizontal, c'est la directrice d'un cylindre dont on donne deux points. Construire la direction des génératrices.

574. — On donne un cône défini par sa trace horizontale (un cercle), par la projection horizontale et la cote de son sommet. On donne en outre une droite définie par sa trace horizontale, sa projection horizontale et son angle avec le plan horizontal; c'est l'axe d'un cylindre de révolution de rayon donné. Construire une normale commune au cône et au cylindre.

575. — On donne un cône de sommet (s, s') et ayant pour base un cercle C situé dans le plan horizontal. Trouver les contours apparents du cône supplémentaire. Déterminer les projections d'un point de ce cône; lui mener un plan tangent par un point extérieur.

576. — On donne un cône ayant pour directrice un cercle horizontal. Par un point donné sur ce cône, mener la section antiparallèle.

577. — On donne un cercle dans le plan vertical, une conique dans le plan horizontal; les deux courbes peuvent elles être situées en général sur un même cône du deuxième degré?

578. — Déterminer toutes les directions de sections circulaires d'un cône ayant pour directrice un cercle horizontal.

579. — Intersection de deux surfaces coniques ou cylindriques ayant pour directrice commune une conique située dans un plan quelconque. Cas où la conique est dans le plan bissecteur du deuxième dièdre.

580. — Intersection de deux cônes ayant pour bases deux coniques tangentes dans le plan horizontal, la ligne des sommets passant par le point de contact. Points à l'infini.

581. — Intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont verticaux.

582. — Intersection de deux cônes ayant leurs génératrices parallèles.

583. — Intersection d'une sphère avec un plan passant par un point et parallèle au deuxième plan bissecteur.

584. — On donne un hémisphère limité par un cercle horizontal. On l'éclaire par des rayons parallèles. Ombre propre et ombre portée.

585. — Un cercle horizontal tourne autour d'un axe de front. Déterminer un point de la surface, le plan tangent, un point du contour apparent horizontal et vertical. Section plane de la surface.

586. — Mener à une surface de révolution engendrée par une courbe quelconque tournant autour d'un axe quelconque un plan tangent dont le point de contact soit sur un parallèle donné. Déterminer un point d'intersection de la surface avec un plan quelconque.

587. — On donne une droite de front et une parabole dont l'axe est dirigé suivant cette droite. Mener au paraboloïde de révolution qui a cette courbe pour méridienne un plan tangent parallèle au plan bissecteur du deuxième dièdre.

588. — On donne les projections de deux droites qui ne se rencontrent pas, l'une d'elles tourne autour de l'autre. Intersection de la surface engendrée par un plan de bout et par une verticale rencontrant l'axe.

589. — Contour apparent d'un tore dont l'axe est de front.

590. — On fait tourner un cercle horizontal autour d'une droite quelconque. Contours apparents de la surface engendrée.

591. — On donne un cylindre de révolution par son axe et son rayon. Plans tangents par un point, parallèles à une droite. Intersection avec une droite, avec un plan.

592. — Mêmes questions pour le cône de révolution défini par son axe et une génératrice. Contours apparents de ce cône.

593. — Construire un cylindre de révolution d'axe donné tangent à un cône de révolution.

594. — Normale commune à une droite et à un cône ou à un cylindre de révolution.

595. — Contours apparents d'un cône de révolution tangent au plan horizontal. Trouver les contours apparents du cône supplémentaire.

596. — Déterminer l'axe, l'angle au sommet et les contours apparents d'un cône de révolution tangent au plan horizontal, au plan vertical et à un plan de profil.

597. — Une droite B tourne autour d'une droite A et engendre une surface gauche de révolution. On donne sur l'axe la projection horizontale d'un point de la surface, trouver la projection verticale.

598. — On donne un hyperboloïde de révolution défini par son axe vertical et une génératrice de front. Trouver le plan polaire d'un point, le pôle d'un plan de bout. Mener à la surface un plan tangent par un point, de manière que le point de contact soit sur un méridien donné.

599. — On donne un paraboloïde hyperbolique ayant un plan directeur horizontal et deux génératrices A et B non parallèles à ce plan. Section plane, asymptotes. Trouver une génératrice horizontale faisant avec A un angle donné.

600. — On donne une parabole dans le plan horizontal, qui a son axe perpendiculaire au plan vertical. C'est la projection d'une courbe située dans un plan de bout. On fait tourner cette courbe autour d'un axe vertical passant par le foyer de la parabole. Contour apparent de la surface.

601. — Intersection de deux ellipsoïdes de révolution engendrés par deux ellipses situées dans un même plan ayant un foyer commun et tournant autour de leurs grands axes.

602. — Intersection de deux paraboloïdes hyperboliques ayant un plan directeur horizontal commun.

603. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à une nappe (axe vertical) avec un cône dont les génératrices sont parallèles aux génératrices de la surface.

604. — On donne un cercle dans le plan horizontal, et deux points (a, a') et (b, b'). Une quadrique passe par le cercle et par le point (a, a') et a pour centre le point (b, b'). Est-elle déterminée ? Construire les génératrices qui passent par le point (a, a').

605. — D'un point donné par ses projections on abaisse des perpendiculaires sur les horizontales qui s'appuient sur deux droites données. Tangente en un point. — Degré du lieu.

606. — Contour apparent horizontal d'un hyperboloïde à une nappe défini par trois génératrices.

607. — Intersection d'une sphère et d'un cône dont l'axe est dans le plan horizontal du centre de la sphère.

608. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est horizontal et d'un cylindre de révolution, ces deux surfaces ayant une génératrice commune.

609. — Une quadrique est déterminée par un plan principal, une section plane et un point. Construire le plan tangent en ce point.

610. — Une quadrique est définie par un cercle horizontal et deux droites rencontrant le cercle. Trouver un point du contour apparent horizontal et la tangente.

611. — On donne trois droites dont l'une est verticale et une autre de front. Construire le plan polaire d'un point par rapport à la surface définie par les trois droites.

612. — On donne un cône ayant pour directrice un cercle dans le plan horizontal. Existe-t-il une quadrique ayant le cône comme cône asymptote et passant par un point ? Plan tangent en ce point. Section par un plan horizontal passant par ce point.

613. — On donne deux droites A et B, ce sont les génératrices d'un paraboloïde hyperbolique dont le plan directeur est horizontal. On fait tourner A autour de B, intersection de la surface obtenue et du paraboloïde.

614. — On donne une ellipse dans un plan de front, c'est une section principale d'un ellipsoïde dont les plans horizontaux sont cycliques. On se donne les projections d'une droite. Mener par cette droite des plans tangents à la surface.

615. — On donne deux cercles horizontaux et une droite qui les rencontre. On considère la quadrique qui passe par les deux cercles et par la droite. Trouver le point de cette droite qui est sur le contour apparent horizontal.

616. — On donne un cône ayant pour directrice un cercle horizontal. On considère une quadrique inscrite dans le cône suivant le cercle et passant par un point. On considère un plan tangent au cône, trouver les génératrices de la surface situées dans ce plan.

QUESTIONS PROPOSÉES

573. — Soit C la courbe de contact du cône de sommet quelconque donné M, circonscrit à un ellipsoïde, à axes inégaux, E.

1° Montrer que l'on peut trouver sur C une infinité de groupes de trois points α, β, γ, tels que les tétraèdres de sommets M, α, β, γ soient orthocentriques (hauteurs concourantes).

2° Trouver l'enveloppe des plans des faces de ces tétraèdres.

3° Montrer que ces tétraèdres ont tous même orthocentre ω et que les points M et ω sont conjugués par rapport à une quadrique fixe S.

4° Lieu des centres des sphères circonscrites à ces tétraèdres.

5° Trouver le lieu des points M pour lesquels les points ω correspondants sont sur l'ellipsoïde donné E.

6° On donne le point ω, trouver le point M ; montrer que ce problème comporte 3 solutions $M_1M_2M_3$ toujours réelles.

7° Prouver que le tétraèdre $\omega M_1M_2M_3$ est conjugué par rapport à la quadrique S.

8° En désignant par O le centre de E, montrer qu'en général aucun des tétraèdres $\omega M_1M_2M_3$, $OM_1M_2M_3$

n'est orthocentrique. En remplaçant l'ellipsoïde E par un hyperboloïde de centre O, à quelle condition doit satisfaire cet hyperboloïde pour que le tétraèdre $OM_1M_2M_3$ soit orthocentrique ? G. Lapointe.

574. — On donne une parabole et on considère un point M quelconque dans son plan ; de ce point on mène les deux tangentes MA et MB à la parabole, qui touchent cette courbe en A et B ; et on demande :

1° L'équation du cercle circonscrit au triangle MAB et le lieu décrit par le centre de ce cercle quand son rayon reste constant ;

2° De dire ce que devient ce cercle quand le point M vient sur la parabole et de trouver le lieu de son centre quand le point M décrit la parabole ;

3° De trouver, dans ces conditions, l'enveloppe du cercle mobile.

On construira les courbes ainsi trouvées. E. H.

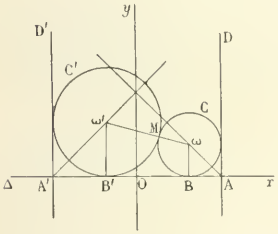
575. — On considère une courbe plane quelconque et les tangentes en deux de ses points M et M'; on mène en outre les normales en ces points et on prend leurs points de rencontre N et N' avec les tangentes en M' et M. Quelle est la limite du point de rencontre de NN' avec MM', quand M' tend vers M ? Lieu de ce point quand M décrit la courbe donnée, dans le cas particulier où cette courbe est une ellipse. Lognon.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

515. — *On donne deux droites* D *et* D' *perpendiculaires à une troisième droite* Δ *également donnée. Deux cercles variables* C *et* C' *sont tangents le premier aux droites* D *et* Δ, *le second aux droites* D' *et* Δ ; *ces deux cercles sont en outre tangents entre eux. On demande le lieu du point de contact.*

Prenons pour axe des x la droite Δ et pour axe des y une parallèle aux droites D et D' et située à égale distance de ces droites ; soit a l'abscisse de D et $-a$ celle de D'.



Considérons deux cercles C et C' satisfaisant aux conditions de l'énoncé ; le centre ω du cercle C est situé sur l'une des bissectrices

$$(1) \qquad Y = \varepsilon(X - a), \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

de l'angle DAΔ ; de même le centre ω' du cercle C' est situé sur l'une des bissectrices

$$(2) \qquad Y = \varepsilon'(X + a), \qquad (\varepsilon' = \pm 1)$$

de l'angle D'AΔ.

La droite ω'ω passe par le point de contact M des deux cercles. Soient (x, y) les coordonnées du point M, et l, m les cosinus directeurs de la direction ωω'. Un point quelconque de la droite ω'ω a pour coordonnées

$$X = x + l\rho,$$
$$Y = y + m\rho;$$

en écrivant que ce point est situé sur la droite (1), nous aurons la valeur de ρ relative au point ω. Nous obtenons ainsi

$$y + m\rho = \varepsilon(x + l\rho - a).$$

d'où

$$\rho = \frac{\varepsilon x - y - \varepsilon a}{m - \varepsilon l}.$$

Or cette valeur de ρ est égale à l'ordonnée du point ω, on a donc

$$y + m\rho = \rho \qquad \text{ou} \qquad \rho = -\frac{y}{m-1},$$

et par suite

$$\frac{\varepsilon x - y - \varepsilon a}{m - \varepsilon l} = -\frac{y}{m-1},$$

ou

(3) $$-ly + m(x-a) - x + \varepsilon y + a = 0.$$

D'autre part le ρ du point ω' est donné par la relation

$$y + m\rho = \varepsilon'(x + l\rho + a),$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{\varepsilon' x - y + \varepsilon' a}{m - \varepsilon' l},$$

et cette valeur est égale à l'ordonnée du point ω' changée de signe; on aura donc

$$\frac{\varepsilon' x - y + \varepsilon' a}{m - \varepsilon' l} = -\frac{y}{m+1},$$

ou

(4) $$-ly + m(x+a) + x - \varepsilon' y + a = 0.$$

En raisonnant ainsi nous supposons implicitement que les ordonnées des points ω et ω' sont positives. Si elles sont négatives, on a un calcul identique, seulement l et m désignent les cosinus directeurs de la direction $\omega\omega'$.

On aura l'équation du lieu en éliminant l et m entre les équations (3), (4) et la suivante

(5) $$l^2 + m^2 = 1.$$

Des équations (3) et (4) on tire sans difficulté

$$m = -\frac{2x - (\varepsilon + \varepsilon')y}{2a}, \qquad l = -\frac{2x^2 - (\varepsilon + \varepsilon')xy - a(\varepsilon - \varepsilon')y - 2a^2}{2ay};$$

portons ces valeurs dans l'équation (5), nous obtenons

(6) $$[2x^2 - (\varepsilon + \varepsilon')xy - a(\varepsilon - \varepsilon')y - 2a^2]^2 + y^2[2x - (\varepsilon + \varepsilon')y]^2 - 4a^2y^2 = 0.$$

Premier cas. $\varepsilon + \varepsilon' = 0$. Les bissectrices (1) et (2) sont perpendiculaires.

L'équation du lieu devient

$$(x^2 - \varepsilon ay - a^2)^2 + x^2y^2 - a^2y^2 = 0.$$

Si dans cette équation on donne à ε successivement les valeurs $+1$ et -1, elle représente deux courbes symétriques par rapport à Ox. Construisons l'une d'elles, par exemple celle qui correspond à la valeur $\varepsilon = -1$.

L'équation s'écrit dans cette hypothèse

$$x^2y^2 + 2ay(x^2 - a^2) + (x^2 - a^2)^2 = 0.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy ; nous en construisons la moitié, en ne donnant à x que des valeurs positives.

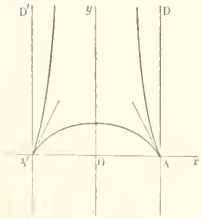
A chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y qui sont réelles si l'on a

$$a^2(x^2 - a^2)^2 - x^2(x^2 - a^2)^2 > 0$$

ou

$$(a^2 - x^2)^3 > 0,$$

cette inégalité exprime que x doit être moindre que a en valeur absolue.



Quand x varie de 0 à a les deux valeurs de y correspondantes sont positives et varient l'une de $+\infty$ à 0, l'autre de $\frac{a}{2}$ à 0.

En transportant l'origine au point $A(a, 0)$ on reconnaît que ce point est un point de rebroussement de première espèce, et que la tangente a pour équation $y + 2x = 0$.

Il est alors facile de construire la courbe.

Deuxième cas. $\varepsilon - \varepsilon' = 0$. Les bissectrices (1) et (2) sont parallèles.

En remplaçant dans l'équation (6) ε' par ε, elle devient

$$(x^2 - \varepsilon xy - a^2)^2 + y^2(x - \varepsilon y)^2 - a^2y^2 = 0,$$

et, comme précédemment, aux deux valeurs de ε correspondent deux courbes symétriques par rapport

a Ox. En faisant $\varepsilon = 1$, nous avons l'équation

$$(x^2 - xy - a^2)^2 + y^2(x - y)^2 - a^2y^2 = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)(x - y)^2 - a^2(2x^2 - 2xy + y^2) + a^4 = 0.$$

Pour construire cette courbe, posons $y = tx$; nous obtenons l'équation bicarrée suivante

$$x^4(1 + t^2)(1 - t)^2 - a^2x^2(2 - 2t + t^2) + a^4 = 0.$$

Pour que cette équation ait ses racines réelles, il faut qu'on ait

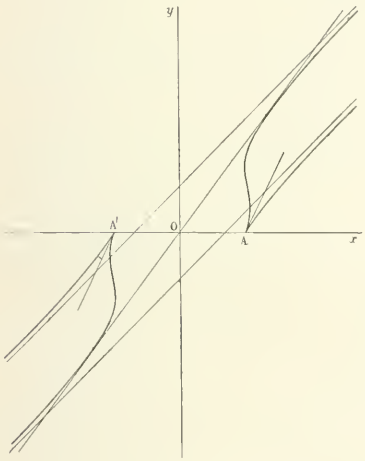
$$(2 - 2t + t^2)^2 - 4(1 + t^2)(1 - t)^2 > 0$$

ou

$$t^2(3t - 4) < 0,$$

ce qui exige que t soit compris entre 0 et $\frac{4}{3}$.

A chaque valeur de t l'équation précédente fait correspondre deux valeurs positives de x^2 et par suite quatre valeurs réelles de x deux à deux égales et de signes contraires. Considérons seulement les valeurs positives, leurs valeurs remarquables sont indiquées dans le tableau suivant



t	0		$1 - \varepsilon$	$1 + \varepsilon$		$\frac{4}{3}$
x_1	a	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	$\frac{3a}{\sqrt{5}}$
x_2	a	$+$	a		$+$	$\frac{3a}{\sqrt{5}}$

Le point A est encore un point de rebroussement de première espèce, la tangente ayant pour coefficient angulaire 2.

La courbe admet deux asymptotes parallèles qui ont pour équation

$$y - x - \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$$

$$y - x + \frac{a}{\sqrt{2}} = 0.$$

Le lieu complet se compose des deux courbes que nous avons construites et de leurs symétriques par rapport à Ox.

---

498. — *On donne une parabole et on considère son axe,* Ox, *et sa tangente au sommet,* Oy. *La tangente en un point variable* M *de cette parabole rencontre ces deux droites en* A *et* B ; *la normale au même point* M *les rencontre en* A' *et* B'. *On demande les lieux des centres des cercles circonscrits aux triangles* OAB *et* OA'B', *les enveloppes de ces cercles et le lieu de leur second point de rencontre.*

Soient $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole rapportée à ses axes habituels, et α, β les coordonnées du point M choisi sur la parabole. La tangente en ce point a pour équation

$$px - \beta y + p\alpha = 0 ;$$

par conséquent le cercle qui passe à l'origine et aux points de rencontre de cette droite avec les axes a pour équation une certaine combinaison linéaire de l'équation des deux axes $xy = 0$, avec celle du

couple de droites formé par la tangente à la parabole au point M et une droite passant à l'origine cette équation est donc

$$(px - \beta y + p\alpha)(ux + vy) + \lambda xy = 0\,;$$

en exprimant que le coefficient de xy est nul, on a $\lambda = u\beta - pv$; on égale ensuite les coefficients de x^2 et de y^2 et on a $pu + \beta v = 0$, d'où $\frac{u}{-\beta} = \frac{v}{p}$, et il suffit de remplacer u et v par les quantités proportionnelles, $-\beta$, p; on a ainsi finalement

$$(px - \beta y + p\alpha)(-\beta x + py) - (\beta^2 + p^2)xy = 0,$$

ou enfin

(1) $$\beta(x^2 + y^2) + \alpha\beta x - p\alpha y = 0.$$

Telle est l'équation du premier cercle.

Les coordonnées du centre de ce cercle sont données par les deux équations

$$x = -\frac{\alpha}{2}, \qquad y = \frac{p\alpha}{2\beta},$$

et si l'on tient compte de la relation $\beta^2 = 2p\alpha$, on a de suite l'équation du lieu des centres

(2) $$4y^2 + px = 0.$$

Ce lieu est une parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, ayant pour paramètre $\frac{p}{8}$ et tournant sa concavité vers les x négatives.

Nous aurons l'enveloppe du cercle (1) en remplaçant dans son équation α par $\frac{\beta^2}{2p}$, supprimant le facteur β et exprimant que l'équation du second degré en β qui reste est un carré parfait; nous avons ainsi

(3) $$8x(x^2 + y^2) - py^2 = 0,$$

équation qui représente une cissoïde de Dioclès.

La normale au point (α, β) a pour équation

$$\frac{x - \alpha}{-p} = \frac{y - \beta}{\beta},$$

ou

$$\beta x + py - \beta(\alpha + p) = 0\,;$$

le cercle analogue au premier qui correspond à cette droite a donc pour équation

$$[\beta x + py - \beta(\alpha + p)](ux + vy) + \lambda xy = 0\,;$$

on déterminera λ en annulant le coefficient de xy, puis, les quantités proportionnelles à u et v, en égalant le coefficient de x^2 au coefficient de y^2; on aura successivement

$$\lambda = -(pu - \beta v), \qquad \frac{u}{p} = \frac{v}{\beta},$$

puis, pour équation du cercle,

$$[\beta x + py - \beta(\alpha + p)](px + \beta y) - (\beta^2 + p^2)xy = 0,$$

ou

(4) $$p(x^2 + y^2) - (\alpha + p)(px + \beta y) = 0.$$

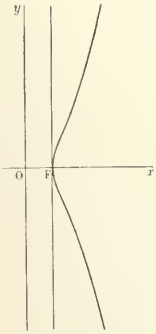
Les coordonnées du centre de ce cercle sont fournies par les équations

$$x = \frac{\alpha + p}{2}, \qquad y = \frac{\beta(\alpha + p)}{2p};$$

en éliminant α et β entre ces deux équations et la relation $\beta^2 = 2p\alpha$, on a de suite l'équation du lieu de ce point

(5) $$2x^2(2x - p) - py^2 = 0.$$

Pour obtenir la forme de cette courbe, il suffit de remarquer qu'elle est symétrique par rapport à Ox, que y n'est réel que si $x > \frac{p}{2}$; que y croît de 0 à $+\infty$, quand x croît de $\frac{p}{2}$ à $+\infty$, que la branche infinie est une branche parabolique parallèle à Oy, et enfin que la première tangente $\left(\text{au point } x = \frac{p}{2},\ y = 0\right)$ est parallèle à Oy.



Pour avoir l'enveloppe du cercle (4), il faut d'abord y remplacer α par $\frac{\beta^2}{2p}$, et éliminer ensuite β entre cette équation et celle qu'on obtient en prenant la dérivée par rapport à β ; ce calcul est assez compliqué et conduit à une équation peu simple, difficile à interpréter. Il vaut mieux résoudre ces deux équations par rapport à x et y et évaluer les coordonnées en fonction de β, ce qui se fera rationnellement puisque sur chacun des cercles il y a deux points limites dont l'un est toujours à l'origine et, par suite, facile à éliminer du calcul. En remplaçant α par $\frac{\beta^2}{2p}$, l'équation (4) devient

$$x^2 + y^2 - \left(1 + \frac{\beta^2}{2p^2}\right)(px + \beta y) = 0;$$

la dérivée par rapport à β donne alors

$$\frac{\beta}{p^2}(px + \beta y) + y\left(1 + \frac{\beta^2}{2p^2}\right) = 0,$$

ou

$$x = -\frac{(3\beta^2 + 2p^2)y}{2p\beta};$$

en portant cette valeur de x dans la première équation et supprimant la solution $y = 0$, on obtient l'y du point qui décrit l'enveloppe,

$$y = -\frac{\beta(\beta^2 + 2p^2)^2}{9\beta^4 + 16p^2\beta^2 + 4p^4};$$

d'où

$$x = \frac{(3\beta^2 + 2p^2)(\beta^2 + 2p^2)^2}{2p(9\beta^4 + 16p^2\beta^2 + 4p^4)}.$$

En posant $\beta = pt$, on a finalement les deux équations de l'enveloppe à l'aide d'un paramètre t

$$(6) \qquad \begin{cases} x = p\dfrac{(3t^2 + 2)(t^2 + 2)^2}{2(9t^4 + 16t^2 + 4)}, \\ y = -\dfrac{pt(t^2 + 2)^2}{9t^4 + 16t^2 + 4}. \end{cases}$$

Nous avons maintenant à construire cette courbe. Pour cela, il faut étudier les variations simultanées des deux fonctions x et y. Or on voit de suite que si l'on change t en $-t$, x ne change pas, y change simplement de signe ; donc la courbe est symétrique par rapport à Ox et, en tenant compte de cette symétrie, il suffit de faire varier t de 0 à $+\infty$. Alors x est toujours positif, y toujours négatif; pour $t = 0$, $x = p$, $y = 0$; pour $t = +\infty$, $x = +\infty$, $y = -\infty$, $\frac{y}{x} = 0$: il y a donc une branche infinie parabolique dans la direction Ox.

Prenons maintenant les dérivées de x et de y ; elles ont pour expressions

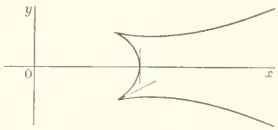
$$x' = \frac{pt(t^2+2)(3t^2-2)(9t^4+20t^2+12)}{(9t^4+16t^2+4)^2},$$

$$y' = -\frac{p(t^2+2)(3t^2-2)(3t^4-4)}{(9t^4+16t^2+4)^2};$$

elles s'annulent pour $t = +\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $t = +\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$. Le coefficient angulaire de la tangente a pour valeur

$$\mu = \frac{y'}{x'} = -\frac{1}{t}\cdot\frac{3t^4-4}{9t^4+20t^2+12}.$$

Rien n'est alors plus aisé que de construire un tableau renfermant les variations de x et de y et les principales valeurs de μ, puis, ensuite, d'en déduire la forme de la courbe.



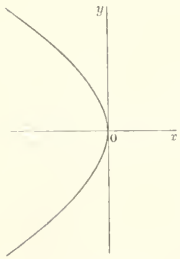
t	x'	x	y'	y	μ
0		p		0	∞
	—	décroît	—	décroît	
$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	min > 0	0	min < 0	+
	+	croît	+	croît	
$\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$			0	Max < 0	0
	+	croît	—	décroît	négatif
$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$	0

Pour obtenir le lieu du second point de rencontre des deux cercles, on remplace dans l'équation de chacun d'eux α par $\frac{\beta^2}{2p}$; on obtient ainsi

$$2p(x^2+y^2) - p\beta y + \beta^2 x = 0,$$

$$2p(x^2+y^2) - \left(2p + \frac{\beta^2}{p}\right)(px+\beta y) = 0;$$

on retranche la seconde équation de la première, on supprime le facteur β^2+p^2, et il reste la nouvelle équation $2px+\beta y = 0$, qui donne $\beta = -\frac{2px}{y}$; il n'y a plus qu'à porter cette valeur de β dans la première équation pour avoir l'équation du lieu ; on trouve ainsi



(7) $$y^2(x^2+y^2) + pxy^2 + 2px^3 = 0.$$

Cette équation représente une quartique symétrique par rapport à Ox, ayant un point triple à l'origine et une seule branche réelle en ce point et tangente à Oy, cette courbe a pour direction asymptotique double l'axe des x; les branches infinies correspondantes sont paraboliques. Si l'on prend pour inconnue principale y, l'équation (7) est une équation bicarrée, qui n'admet de racines réelles que pour les valeurs négatives de x; alors à chacune d'elles correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires. On aperçoit facilement la forme de cette courbe; on peut d'ailleurs l'étudier plus complètement en posant $y = tx$ et calculant x et y en fonction de t.

Bonnes solutions, sauf pour certaines courbes dont les formes sont inexactes : MM. J. Goujon, A. Langlois et C. Verchère, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne ; J. Blandin, à Melay ; Auzeram, à Montpellier.
Solution incomplète : M. Pégorier, à Toulouse.

---

499. — *Une ellipse de grandeur constante tourne autour de son centre; trouver l'enveloppe des tangentes parallèles à la bissectrice de l'angle que fait un des axes avec une direction fixe.*

Prenons pour axes deux droites rectangulaires passant au centre de l'ellipse, l'une d'elles Ox étant parallèle à la direction donnée; désignons par a^2 et b^2 les carrés des longueurs des demi-axes et par α l'angle que fait l'un d'eux avec l'axe des x. Si nous rapportons momentanément l'ellipse à ses axes, elle

aura pour équation $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0$, et, comme les formules inverses de transformation de coordonnées sont

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

l'équation de l'ellipse rapportée aux axes fixes Ox et Oy, est

$$\frac{(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}{a^2}+\frac{(x\sin\alpha-y\cos\alpha)^2}{b^2}-1=0.$$

La tangente qui fait avec Ox l'angle $\frac{\alpha}{2}$ a pour équation $y = x\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+p$, p étant déterminé par la condition que cette droite rencontre l'ellipse en deux points confondus. Or l'équation aux abscisses des points de rencontre de la droite avec l'ellipse est

$$\frac{\left(\frac{x\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+p\sin\alpha\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{x\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}-p\cos\alpha\right)^2}{b^2}-1=0,$$

ou, en prenant pour inconnue $X=\frac{x}{\cos\frac{\alpha}{2}}$,

$$\left(\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{a^2}+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{b^2}\right)X^2+2p\left(\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{a^2}-\frac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{b^2}\right)X+p^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)-1=0;$$

en écrivant que cette équation a une racine double $(AC-B^2=0)$, on trouve aisément

$$p^2 = b^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

L'équation de la tangente envisagée est donc

$$y = tx+\sqrt{b^2+a^2t^2},$$

t étant mis à la place de $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Il passe deux de ces droites par un point du plan, et l'on obtient leur enveloppe en exprimant que l'équation en t ainsi trouvée,

$$(x^2-a^2)t^2-2xyt+y^2-b^2=0,$$

a une racine double. Ce calcul donne immédiatement l'équation demandée,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Solutions géométriques. — L'ellipse enveloppe et l'ellipse mobile, dans une quelconque de ces positions, sont symétriques l'une de l'autre, par rapport aux deux bissectrices de l'angle formé par les grands axes ; elles ont donc pour tangentes communes des parallèles à ces bissectrices, ce qui rend le résultat trouvé évident.

P. OLLAGNIER, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne.

Toutes les ellipses du faisceau ont même cercle principal, le cercle décrit de O comme centre avec a comme rayon. Soient F le foyer de l'ellipse dans la position où son grand axe est parallèle à la direction, et F′ ce même foyer dans une autre position quelconque ; la droite FF′ est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle des grands axes, elle rencontre le cercle principal en deux points D et D_1, et les deux perpendiculaires à FF′ menées par ces points sont deux tangentes communes parallèles à la bissectrice de l'angle des grands axes. L'enveloppe de ces droites est donc la première ellipse.

Solutions analogues : MM. J. Goujon et A. Langlois, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne ; Vercherre, à Saint-Etienne ; J. Blandin, à Melay ; A. Caussé, à Castres.

Nous avons aussi reçu de bonnes solutions analytiques de MM. J. Goujon, A. Langlois, P. Ollagnier, du pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne ; A. Caussé, à Castres ; Vercherre, à Saint-Etienne ; M. Malplat ; J. Blandin, à Melay ; Auzeram, à Montpellier.

QUESTIONS PROPOSÉES

576. — On considère un cercle fixe rapporté à deux diamètres rectangulaires Ox et Oy, puis un cercle mobile tangent à Oy et ayant son centre sur le cercle fixe. Lieu des centres de similitude de ces deux cercles.

P. Sicard (lycée de Marseille).

577. — Par deux points donnés A et B on mène deux droites parallèles a et b et on considère le cercle C tangent à ces deux droites et à AB. On demande de trouver, lorsque les droites a et b tournent autour de A et B :

1° Le lieu du centre du cercle C ;

2° Les lieux des points de contact du cercle C avec les deux droites a et b ;

3° L'enveloppe du cercle C.

A. Goulard, professeur au lycée de Marseille.

578. — Dans un triangle ABC on désigne par G le centre de gravité, par I le centre du cercle inscrit, par A′, B′, C′ les milieux des côtés BC, CA, AB, et par a, b, c les longueurs des trois côtés. Démontrer que l'on a

$$9\overline{GI}^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2 + 2\left(\overline{IA'}^2 + \overline{IB'}^2 + \overline{IC'}^2\right).$$

Jorge F. d'Avillez.

579. — On prend sur le grand axe d'une ellipse de centre O un point I tel que $OI = \frac{a^2\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2}$, $2a$ et $2b$ étant les longueurs des axes de l'ellipse.

Par ce point I on mène une corde variable AB dont le pôle par rapport à l'ellipse est C. Montrer que le lieu de l'orthocentre du triangle ABC est une ellipse semblable à l'ellipse donnée et passant par l'un de ses foyers.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons d'Algèbre élémentaire, par C. BOURLET, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée Henri IV. Paris, Armand Colin et Cie.

C'est avec un véritable plaisir que je signale à l'attention des professeurs et des élèves l'ouvrage que vient de publier M. Bourlet. Tout est à louer dans ce volume : l'ordre, la clarté, la rigueur et le choix réfléchi des exercices. Je me bornerai à signaler les innovations faites par l'auteur.

M. Bourlet procède d'abord à une introduction rationnelle et systématique des nombres positifs et négatifs, puis il expose d'une façon régulière et complète les règles du calcul algébrique (*). Dans cette exposition, l'auteur pose a priori les définitions relatives aux nombres algébriques et aux deux opérations directes ; il ne fait usage des segments que pour montrer immédiatement une application commode des nouveaux symboles numériques et aussi pour faciliter certaines démonstrations relatives aux sommes algébriques. Peut être eût-il mieux valu déduire l'addition des nombres algébriques de celle des segments et montrer constamment aux élèves comment les règles nouvelles ne sont que des extensions, des prolongements, pour ainsi dire, de définitions ou de propriétés déjà établies. Mais je me hâte d'ajouter que cela est secondaire et que, de toute façon, il faut en arriver à définir les opérations nouvelles. Toute cette partie de l'ouvrage est d'ailleurs traitée avec un soin méticuleux et une entière rigueur.

Ensuite, dès le début de la théorie des équations, immédiatement après l'étude de l'équation du premier degré à une inconnue, l'auteur expose les principes de la géométrie analytique ; il montre, à ce propos, l'utilité des nombres algébriques, la merveilleuse application que Descartes en a ainsi faite ; puis, il établit l'équation de la ligne droite, et familiarise de suite les élèves avec la représentation géométrique des fonctions.

En troisième lieu, M. Bourlet introduit la notion de dérivée et donne les règles qui permettent de prendre les dérivées des fonctions que l'élève de mathématiques élémentaires rencontre ordinairement dans les applications. Il montre l'usage que l'on peut faire de la dérivée dans l'étude des variations d'une fonction et donne les applications usuelles. Je suis absolument de l'avis de M. Bourlet sur ce point : il y a tout intérêt pour les élèves à ce que les choses soient ainsi présentées, d'abord parce que cette méthode est plus simple au fond que les procédés artificiels employés d'ordinaire dans les classes de mathématiques élémentaires, ensuite parce que c'est une méthode générale dont ils feront constamment usage dans la suite. Je crois toutefois qu'il faut aussi appliquer à ces exemples simples, directement, sans parler encore de dérivées, toutes les définitions relatives aux fonctions continues, croissantes, décroissantes, etc., et les étudier d'abord ainsi : il est très important que les débutants soient rompus à tous ces procédés et familiarisés avec toutes ces idées.

Enfin, l'auteur définit les logarithmes à l'aide de l'exponentielle et tourne d'une façon très logique et très habile la difficulté de l'exposant incommensurable.

Je ne puis m'étendre davantage sur cet ouvrage. Je dois cependant dire, pour terminer, que tous les professeurs ont intérêt à le connaître et que les élèves qui l'étudieront avec soin n'y puiseront que des idées justes et fécondes. E. B.

(*) M. X. Automari avait déjà procédé ainsi dans un ouvrage destiné aux élèves de mathématiques élémentaires : le Manuel du baccalauréat publié par la librairie Nony.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

7e Année. N° 2. Novembre 1896.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR L'ÉQUATION GÉNÉRALE DES CONIQUES

QUI PASSENT PAR L'INTERSECTION DE DEUX AUTRES

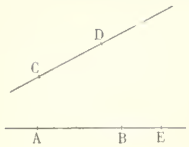
1. Dans une note que nous avons publiée antérieurement (n° de novembre 1894), nous avons montré que l'on peut, sans le secours de l'équation en λ, traiter très complètement et avec une entière rigueur le problème de l'intersection de deux coniques. Les considérations géométriques dont nous nous sommes servi sont tout à fait accessoires et peuvent être évitées; elles n'ont été mises là que pour simplifier le langage et ne pas alourdir l'exposition. Nous avons alors été conduit à l'énoncé général suivant, qui comprend tous les cas :

Deux coniques se coupent en général en quatre points, réels ou imaginaires conjugués deux à deux, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie; accidentellement, elles se coupent en une infinité de points : ceci arrive quand ces deux courbes se réduisent à deux couples de droites ayant une droite commune, ou bien quand elles se confondent, ou enfin quand l'une d'elles est identiquement nulle.

En partant de là et en considérant le cas où plusieurs points de rencontre coïncident en un seul, comme un cas limite du cas où deux coniques auraient le même nombre de points communs très rapprochés les uns des autres, il est facile de démontrer rigoureusement que, sauf un cas exceptionnel, l'équation générale des coniques qui rencontrent deux coniques $S = 0$, $S' = 0$, comme elles se rencontrent elles-mêmes, est $S + \lambda S' = 0$, λ désignant un paramètre variable qui peut prendre une valeur infinie. Nous aurons à distinguer le cas où les deux courbes données sont des coniques propres du cas où l'une d'elles est impropre; si les deux coniques ne sont pas impropres, nous nous appuierons sur la théorie des contacts.

2. Supposons d'abord que les quatre points de rencontre des coniques S et S' soient distincts les uns des autres; ne faisons sur eux aucune autre hypothèse, et désignons-les par A, B, C, D.

Il est d'abord évident que, quel que soit λ, l'équation $S + \lambda S' = 0$ représente une conique qui passe aux quatre points A, B, C, D. Il faut donc montrer seulement que toute conique, Σ, passant aux quatre points, peut être représentée par l'équation $S + \lambda S' = 0$, pour une certaine valeur de λ; à cet effet, prenons sur la conique Σ un point E, quelconque, mais distinct des points A, B, C, D, et exprimons que la conique $S + \lambda S' = 0$ passe en ce point, nous aurons une relation qui nous donnera λ; si nous désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point E et par S_0, S'_0 ce que deviennent les fonctions S et S', quand on y fait $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, cette relation s'écrit $S_0 + \lambda S'_0 = 0$, et donne, pour λ, la valeur $\lambda_0 = -\frac{S_0}{S'_0}$; la conique $S - \frac{S_0}{S'_0} S' = 0$ a dès lors cinq points communs avec la conique Σ, et elle coïncide avec elle, à moins que les deux coniques ne soient deux systèmes de droites ayant une droite commune. Par conséquent toutes les coniques propres qui passent aux quatre points A, B, C, D sont bien représentées par l'équation $S + \lambda S' = 0$, quand on fait



varier λ. Il n'y a doute que pour les coniques impropres qui passent aux quatre points A, B, C, D; soit le couple de droites AB, CD, qui constitue l'une d'elles; le point E est alors un point de l'une des droites, de AB par exemple, et la conique $S - \frac{S_0}{S'_0} S' = 0$, qui passe aux cinq points A, B, C, D, E, se compose nécessairement des deux droites AB et CD; elle coïncide donc avec la conique Σ, qui était à représenter.

Remarque. — On peut objecter au raisonnement précédent que la relation $S_0 + \lambda S'_0 = 0$ ne détermine λ que si S'_0 est différent de 0. Mais si S'_0 est nul, la conique Σ, qui est à représenter, est la conique S' elle-même, et cette conique correspond à la valeur $\frac{1}{\lambda} = 0$, puisque l'équation $S + \lambda S' = 0$ peut s'écrire $\frac{1}{\lambda} S + S' = 0$. On obtient donc la conique S' en donnant à λ une valeur infinie; or des considérations algébriques familières à tous nos lecteurs conduisent à dire que l'équation $S_0 + \lambda S'_0 = 0$ donne pour λ une valeur infinie, quand S'_0 est nul. D'ailleurs on eût évité cette objection en rendant l'équation homogène, c'est-à-dire en écrivant l'équation générale du faisceau $\lambda S + \lambda' S' = 0$ et non $S + \lambda S' = 0$. Il n'y a donc aucune exception dans le cas où nous nous sommes placé.

3. Supposons maintenant que les deux coniques S et S' se coupent en deux points confondus A et B et deux autres, distincts des précédents et distincts l'un de l'autre, C et D. Alors si les deux coniques sont des coniques propres, elles se touchent au point A, et ont un contact du premier ordre en ce point; si l'une d'elles seulement est impropre, elle se compose d'une tangente à l'autre et d'une sécante, qui ne passe pas au point de contact, et dans ce cas, il y a encore contact du premier ordre entre les deux coniques, ou bien elle se compose de deux droites quelconques, qui se coupent au point A; enfin si les deux coniques sont impropres, l'une d'elles se compose de deux droites qui se coupent sur l'une des autres. Dans tous les cas, si l'on désigne par x_0, y_0 les coordonnées du point A, on voit que les deux équations

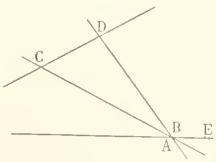
$$\frac{\partial S}{\partial x_0} + y' \frac{\partial S}{\partial y_0} = 0, \qquad \frac{\partial S'}{\partial x_0} + y' \frac{\partial S'}{\partial y_0} = 0,$$

donnent pour $y' = \frac{dy}{dx}$ la même valeur, ou que l'une d'elles est indéterminée, ce qui revient au même.

On voit alors comme précédemment que l'équation $S + \lambda S' = 0$ représente toujours une conique qui passe aux points A, C, D et qu'au point A, cette conique est tangente aux deux coniques S et S' ou, en tout cas, à l'une d'elles, c'est-à-dire qu'elle rencontre chacune d'elles en deux points confondus; car l'équation qui donne la valeur de y' est

$$\frac{\partial S}{\partial x} + y' \frac{\partial S}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial S'}{\partial x} + y' \frac{\partial S'}{\partial y} \right) = 0,$$

et, au point x_0, y_0, on retrouve la valeur de y' qui est commune aux deux équations déjà signalées. Il nous reste à montrer que toute conique qui coupe les deux coniques S et S', aux points A, B, C, D, peut être représentée par l'équation $S + \lambda S' = 0$, pour une certaine valeur de λ. Le raisonnement est le même que précédemment pour les coniques propres, car les coniques $S + \lambda S' = 0$ et Σ ont en commun les quatre points A, B, C, D, d'après ce qui a été dit antérieurement.



Quant aux coniques impropres, il n'y en a que deux qui passent aux quatre points: le couple AB, CD, et le couple AC, BD ou AC, AD; si on veut représenter (AB, CD), il faudra prendre le point E sur AB ou sur CD; alors la conique $S + \lambda_0 S' = 0$, qui passe en E, se décompose en les deux droites AB et CD, car si le point E est sur AB, par exemple, cette conique

étant tangente à AB en A et passant en E contient la droite ABE, et l'autre droite, passant en C et D, coïncide nécessairement avec CD.

4. Si les deux coniques se coupent en quatre points confondus deux à deux, ce sont deux coniques propres tangentes en deux points, ou bien une conique propre et un couple de tangentes distinctes à cette conique, ou bien une conique propre et un couple de droites confondues toutes deux avec une sécante (*) à la conique, ou enfin un couple de droites distinctes avec un couple de droites confondues qui ne passent pas au point de concours des deux premières.

On démontre aussi aisément que dans le cas précédent que toutes les coniques du faisceau $S+\lambda S'=0$ coupent les deux coniques S et S' de la même façon qu'elles se coupent elles-mêmes et que toute conique Σ qui les rencontre de cette façon coïncide avec une conique du faisceau.

5. Envisageons le cas où les deux coniques S et S' ont trois points de rencontre confondus. Il est facile de voir que ce cas ne peut pas être réalisé avec deux coniques impropres ; par conséquent deux cas seulement sont possibles : ou bien les deux coniques S et S' sont deux coniques propres ayant un contact du second ordre en un point et se coupant en un autre point ; ou bien l'une d'elles est une conique propre et l'autre un système de deux droites, dont l'une est une tangente et l'autre une sécante passant par le point de contact de la précédente. Dans les deux cas, si on désigne par x_0, y_0 les coordonnées du point qui compte pour trois, les deux équations

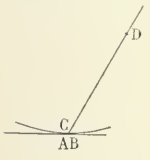
$$\frac{\partial S}{\partial x}+y'\frac{\partial S}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial S'}{\partial x}+y'\frac{\partial S'}{\partial y}=0$$

donnent pour y' la même valeur au point (x_0, y_0) ou l'une d'elles est identique ; les deux équations

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+2y'\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}+y'^2\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+y''\frac{\partial S}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 S'}{\partial x^2}+2y'\frac{\partial^2 S'}{\partial x\partial y}+y'^2\frac{\partial^2 S'}{\partial y^2}+y''\frac{\partial S'}{\partial y}=0$$

sont aussi vérifiées, au point (x_0, y_0), pour les mêmes valeurs de y' et y'' ; donc quel que soit λ, les valeurs de y', y'' déduites de l'équation $S+\lambda S'=0$, au point (x_0, y_0), sont les mêmes que les précédentes, et toutes les coniques de ce faisceau coupent les coniques S et S' comme elles se coupent elles-mêmes. Soit alors Σ une conique qui rencontre les coniques S et S' en trois points confondus au point (x_0, y_0) et en leur autre point commun ; pour $x=x_0$, $y=y_0$, elle conduit aux mêmes valeurs de y' et y'' ; elle coupe donc chaque conique du faisceau de la même façon que S et S', et si on prend un point E (x_1, y_1), quelconque sur cette conique, et autre que les points indiqués, la conique $S-\frac{S_1}{S'_1}S'=0$ aura cinq points communs avec elle, et par suite, coïncidera avec elle. Encore ici, le raisonnement ne peut être en défaut que si l'on envisage la conique Σ qui se réduit aux deux droites dont il a été parlé, car c'est la seule conique impropre qui rencontre S et S' comme elles se rencontrent mutuellement ; dans ce cas, si l'on prend le point E sur AD, la conique $S-\frac{S_1}{S'_1}S'=0$ contient visiblement la droite AD, puisqu'elle a trois points communs avec cette droite, elle contient aussi la droite ABC, puisque l'autre droite doit avoir deux points confondus encore, au point A, avec celle des deux coniques S et S' qui ne se décompose pas (**) ; si l'on prend le point E sur ABC, la conique $S-\frac{S_1}{S'_1}S'=0$ aura trois points communs avec cette droite, deux en A, un en E, et la contiendra toute



(*) Sécante est pris ici dans le sens de non-tangente.
(**) Il y en a toujours une au moins.

entière, l'autre droite devant passer en A et D, sera nécessairement AD. Il n'y a donc aucune exception au raisonnement qui a été fait.

6. Examinons enfin le cas où les quatre points de rencontre sont confondus. Ce cas ne peut être réalisé qu'avec des coniques propres, ou avec une conique propre et une conique composée de deux droites confondues avec une tangente, ou enfin avec deux systèmes de droites ayant même centre. Dans les deux premiers cas, les équations $S = 0$, $S' = 0$ donnent, au point commun, les mêmes valeurs pour y', y'', y''', car si l'une d'elles se réduit à deux droites confondues, l'équation correspondante donne trois équations différentielles qui sont vérifiées par les mêmes valeurs de y', y'', y''' (*). Le dernier cas est exceptionnel et sera étudié à part.

Dans les deux premiers cas, toutes les coniques $S + \lambda S' = 0$ fournissent, au point commun, les mêmes valeurs pour y', y'', y''', et, par suite, elles rencontrent S et S' en quatre points confondus. Le raisonnement s'achève alors comme précédemment.

Dans le dernier cas, toutes les coniques qui rencontrent S et S' en quatre points confondus sont les systèmes de deux droites ayant même centre qu'elles ; elles dépendent de deux paramètres arbitraires et ne peuvent être représentées par $S + \lambda S' = 0$. *Ce cas est donc vraiment exceptionnel.*

7. Il nous reste à examiner les deux cas singuliers, dans lesquels les deux coniques S et S' ont une infinité de points communs.

Supposons d'abord que ce soient deux couples de droites ayant une droite commune, $P = 0$; alors on a $S \equiv PQ$, $S' \equiv PQ'$, P, Q et Q' étant trois fonctions linéaires. L'équation $S + \lambda S' = 0$ est $P(Q + \lambda Q') = 0$; elle peut donc bien représenter toutes les coniques qui renferment la droite P et une autre droite passant au point de concours de Q et Q'.

Si enfin les deux coniques coïncident où que l'une d'elles soit identiquement nulle, on a, par exemple, $S \equiv KS'$, K étant une constante qui peut être nulle, et l'équation $S + \lambda S' = 0$ se réduit à $(K + \lambda)S' = 0$. Elle représente une conique qui coïncide avec S' ou qui est identiquement nulle. Ce cas n'est donc pas, à proprement parler, exceptionnel.

Remarque. — On peut encore traiter directement les cas où il y a plusieurs points de rencontre confondus, en effectuant sur x, y, z une substitution linéaire qui permette de prendre pour axes deux droites passant au point qui compte pour plusieurs points de rencontre, l'un de ces axes étant la tangente en ce point, ou l'une des droites des coniques impropres S et S', qui joue le rôle de tangente.

E. H.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

511. — *Enveloppe des paraboles tangentes aux deux axes d'une conique fixe, ainsi qu'à la tangente et à la normale à cette conique en un même point, quand ce point décrit la conique.*

Supposons, par exemple, que la conique soit une ellipse rapportée à ses axes,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Le résultat relatif à l'hyperbole s'obtiendra en changeant b^2 en $-b^2$.

Proposons-nous d'abord le problème bien connu que voici :

On donne l'ellipse précédente et un point $P(x_1, y_1)$; *trouver l'enveloppe des droites* D *telles que, si on appelle* Q *le pôle par rapport à l'ellipse d'une de ces droites* D, *la droite* PQ *soit perpendiculaire à* D.

Soit alors $$ux + vy + w = 0$$

(*) Puisque les coefficients de y'', y''' sont nuls.

une droite D satisfaisant à la question; son pôle $Q(x, y)$ sera donné immédiatement en résolvant

$$\frac{x}{a^2u} = \frac{y}{b^2v} = -\frac{1}{w}.$$

Alors
$$x = -\frac{a^2u}{w}, \qquad y = -\frac{b^2v}{w},$$

et en écrivant que la droite PQ est perpendiculaire à D, c'est-à-dire qu'elle a pour coefficient angulaire $\frac{v}{u}$, on aura immédiatement l'équation tangentielle de l'enveloppe de D,

$$\frac{y_1 + \frac{b^2v}{w}}{x_1 + \frac{a^2u}{w}} = \frac{v}{u},$$

ou bien

(1) $$c^2uv - y_1uw + x_1vw = 0.$$

Cette équation montre immédiatement que l'enveloppe de D est une parabole tangente à Ox, Oy, axes de l'ellipse.

Remarquons que, par la nature de la question, cette parabole est évidemment tangente aux tangentes à l'ellipse menées par les pieds des normales issues de P, et nous retrouvons ainsi une propriété bien connue des coniques.

Supposons maintenant le point $P(x_1, y_1)$ sur l'ellipse elle-même; tout ce qui précède s'applique et alors la parabole (1) est tangente aux deux axes de l'ellipse, à la tangente à l'ellipse au point P et à la normale à l'ellipse en ce même point; car la droite qui joint alors le point P de l'ellipse au pôle de cette normale est évidemment perpendiculaire sur elle.

Comme une parabole est déterminée par quatre tangentes, nous voyons que l'équation (1), quand on aura

(2) $$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ne sera autre que la parabole de l'énoncé.

Nous devons alors trouver l'enveloppe de (1) avec la condition (2). On montre facilement qu'on obtient les enveloppes en coordonnées tangentielles par la même règle qu'en coordonnées ponctuelles. En appliquant alors cette règle, on voit que, si dans (1) et (2), on regarde x_1 et y_1 comme des coordonnées courantes, on aura l'équation tangentielle de l'enveloppe en exprimant que la droite (1) est tangente à l'ellipse (2), ce qui donne de suite

$$w^2(a^2v^2 + b^2u^2) = c^4u^2v^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = \frac{c^4}{w^2}.$$

On reconnaît l'équation tangentielle de la développée de l'ellipse. Donc l'enveloppe cherchée n'est autre chose que la développée de la conique donnée.

G. LAPOINTE.

Bonnes solutions : MM. A. Laureaux (lycée de Besançon); E. N. Barisien (M. Barisien a accompagné sa solution de diverses remarques intéressantes).

---

512. — *En chaque point d'une parabole, on mène la tangente et la normale : enveloppe de la parabole tangente à ces deux droites et admettant pour tangente au sommet l'axe de la parabole donnée.*

Soit la parabole
$$y^2 - 2px = 0.$$

Proposons-nous d'abord pour cette parabole, le problème préliminaire identique à celui que nous avons résolu pour l'ellipse, sans entrer dans toutes les explications données à propos de ce cas.

Le pôle de D,

$$ux + vy + w = 0,$$

est donné par

$$\frac{y}{v} = -\frac{p}{u} = -\frac{px}{w}; \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{w}{u} \qquad y = -\frac{pv}{u}.$$

L'équation tangentielle de l'enveloppe est donc

$$\frac{y_1 + \frac{pv}{u}}{x_1 - \frac{w}{u}} = \frac{v}{u},$$

ou bien

(1) $$y_1 u^2 + (p - x_1)uv + vw = 0.$$

C'est une parabole admettant pour tangente au sommet l'axe de la parabole donnée.

Comme tout à l'heure, on verra que si le point $P(x_1, y_1)$ est sur la parabole donnée, c'est-à-dire si

(2) $$y_1^2 - 2px_1 = 0,$$

alors (1) coïncide avec la parabole de l'énoncé.

Nous serons donc ramenés à trouver l'enveloppe de (1) sachant la condition (2). Ceci revient à écrire, en considérant x_1, y_1 comme coordonnées courantes, que la droite (1) est tangente à la parabole (2) ; d'où, pour résultat immédiat,

$$pu^4 + 2uv(puv + vw) = 0,$$

ou, en supprimant la solution étrangère $u = 0$, qui s'explique en remarquant que toutes les paraboles de l'énoncé passent par le point à l'infini dans la direction Oy,

(3) $$pu^3 + 2puv^2 + 2v^2w = 0.$$

On reconnaît là l'équation tangentielle de la développée de la parabole donnée. Telle est l'enveloppe demandée.

G. LAPOINTE.

Bonnes solutions : MM. L.-J. Goujon (pensionnat de Valbenoite à Saint-Etienne) ; E.-N. Barisien.

---

513. — *Lieu des centres des coniques osculatrices à un cercle fixe en un point donné et ayant leurs axes parallèles à des directions rectangulaires données.*

Prenons pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires parallèles aux axes de la conique et passant au point fixe du cercle. L'équation du cercle est alors

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0,$$

et si l'on se rappelle que les trois systèmes de sécantes communes au cercle et à la conique sont confondus en un seul, qui se compose de la tangente au cercle et d'une droite passant au point de contact, on peut écrire de suite l'équation générale des coniques osculatrices au cercle donné au point choisi ; cette équation est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (\lambda x + \mu y)(ax + by) = 0.$$

En exprimant que les axes de cette conique sont parallèles aux axes de cordonnées, on obtient la condition $b\lambda + a\mu = 0$, et, sous cette condition, l'équation précédente représente les coniques demandées. Or cette condition s'écrit immédiatement $\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{-b} = \theta$, et, par suite, l'équation générale des coniques est finalement

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \theta(a^2x^2 - b^2y^2) = 0.$$

Le lieu des centres s'obtient immédiatement, en éliminant θ entre les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. On a ainsi successivement

$$x - a + \theta a^2 x = 0,$$
$$y - b - \theta b^2 y = 0,$$

puis

$$b^2 y(x - a) + a^2 x(y - b) = 0.$$

Le lieu a donc pour équation

$$(a^2 + b^2)xy - ab(ax + by) = 0.$$

C'est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes, qui est tangente au cercle à l'origine et qui passe en outre au centre de ce cercle.

Remarque. — La sécante commune au cercle et aux coniques indiquées a pour équation $ax - by = 0$; cette équation pouvait s'écrire immédiatement, en s'appuyant sur les propriétés des sécantes communes à un cercle et à une conique.

A. LAUREAUX (lycée de Besançon).

Très bonne solution : M. E.-N. BARISIEN.

---

514. — *Lieu des centres des coniques osculatrices à un cercle fixe en un point donné, et dont l'un des axes passe par un point fixe de la tangente au point d'osculation.*

Prenons pour axe des y la tangente au point donné et pour axe des x le diamètre perpendiculaire. L'équation du cercle est alors

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0,$$

et celle de la conique

$$x^2 + y^2 - 2rx + 2\lambda x(y - mx) = 0,$$

les paramètres λ et m étant liés par une certaine relation. L'équation qui donne les directions des axes s'obtient immédiatement, soit en cherchant les bissectrices de deux parallèles aux asymptotes, soit en cherchant le couple de diamètres conjugués rectangulaires; cette équation est

$$x^2 + 2mxy - y^2 = 0.$$

Appelons x et y les coordonnées du centre, O et a les coordonnées du point fixe sur la tangente au point d'osculation, l'un des axes aura pour coefficient angulaire $\frac{y-a}{x}$, et ce nombre devra vérifier l'équation précédente ; nous aurons ainsi

$$x^2 + 2mx(y - a) - (y - a)^2 = 0.$$

D'autre part, les coordonnées du centre vérifient aussi les deux équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, ou

$$x - r + \lambda(y - 2mx) = 0,$$
$$y + \lambda x = 0.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer λ et m entre ces trois équations. La dernière donne $\lambda = -\frac{y}{x}$, puis, la précédente,

$$x^2 - rx - y^2 + 2mxy = 0;$$

d'où

$$m = \frac{y^2 - x^2 + rx}{2xy};$$

en portant enfin cette valeur dans la première équation, nous obtenons l'équation du lieu

$$(xy)[x^2 - (y - a)^2] + x(y - a)[y^2 - x^2 + rx] = 0.$$

Cette équation se décompose en $x = 0$, qui représente l'axe des y, et

$$a(y^2 + x^2) + rxy - a(rx + ay) = 0,$$

qui représente une conique.

La première solution provient de ce qu'il y a une conique du système qui se réduit à deux fois l'axe des y; la seconde solution représente le véritable lieu.

Dans le cas où le point fixe occupe une position quelconque, le lieu se trouve de la même façon ; mais alors il ne se décompose pas et l'on obtient une cubique ayant un point double au point choisi.

E.-N. BARISIEN.

Bonne solution : M. A. LAUREAUX (lycée de Besançon).

Solutions des questions 511, 512, 513 et 514. — Si d'un point M on mène des tangentes aux coniques homofocales à une conique donnée et que l'on mène les normales à celles-ci aux points de

contact obtenus ainsi, ces normales enveloppent une parabole tangente aux axes des coniques considérées.

Cette propriété est très connue. En voici d'ailleurs la démonstration.

Soient $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0$ une famille de coniques homofocales, x_0, y_0 les coordonnées du point M et α, β les coordonnées d'un des points de contact. L'équation de la normale en ce point est

$$\frac{(a^2+\lambda)x}{\alpha}-\frac{(b^2+\lambda)y}{\beta}-c^2=0,$$

et l'on a les relations

$$\frac{\alpha x_0}{a^2+\lambda}+\frac{\beta y_0}{b^2+\lambda}-1=0,$$

$$\frac{\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{\beta^2}{(b^2+\lambda)^2}-1=0;$$

on aura donc l'équation tangentielle de l'enveloppe en éliminant λ, α, β et θ entre ces relations et les équations

$$\frac{a^2+\lambda}{\alpha}=\theta u, \qquad \frac{b^2+\lambda}{\beta}=-\theta v, \qquad c^2=-\theta w.$$

La première relation s'écrit alors

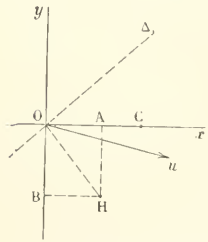
$$\frac{x_0}{u}-\frac{y_0}{v}-\theta=0,$$

et, comme $\theta=-\frac{c^2}{w}$, on a de suite l'enveloppe cherchée, $\frac{x_0}{u}-\frac{y_0}{v}+\frac{c^2}{w}=0$. C'est bien une parabole jouissant des propriétés indiquées.

Dans le cas d'un système de paraboles homofocales, le résultat est analogue : l'enveloppe est une parabole ayant l'axe commun aux paraboles envisagées pour tangente au sommet.

Soit alors M un point d'une conique donnée; la parabole indiquée dans la question 511 ou 512 est celle dont nous venons de parler et qui correspond au point M. Mais les deux tangentes issues de M à la conique en question sont confondues, par suite aussi les normales aux deux points de contact; ces deux droites se rencontrent donc au centre de courbure relatif au point M. Donc quand le point M se meut sur la conique considérée, la parabole qui lui correspond enveloppe la développée de cette conique.

La propriété que nous avons rappelée antérieurement permet aussi de traiter les questions 513 et 514 et même la question plus générale que l'on obtient en imposant à l'un des axes de la conique variable l'obligation de passer par un point fixe de position quelconque H.



Soient en effet Ox, Oy le diamètre du cercle passant au point donné et la tangente en ce point, et soit C le centre du cercle. Il y a une conique et une seule ayant son centre en O : elle est formée de la tangente Oy et d'une seconde droite Ou telle que OH soit une bissectrice de l'angle que font Ou et Oy. Le lieu cherché passe donc une fois en O.

Cherchons maintenant combien il y a de centres sur une droite Δ passant en O. Il suffit pour cela de nous rappeler que la parabole relative à une de ces coniques et correspondant au point O a pour directrice $O\Delta$ et touche Ox au centre de courbure C; elle est donc déterminée et est la même pour toutes les coniques qui ont leurs centres sur Δ. Nous aurons alors les axes qui passent au point H en menant par ce point les deux tangentes à la parabole. Il y a donc deux points du lieu autres que O sur la droite Δ. Par suite, le lieu est une *cubique* qui passe au point O.

Si la droite Δ vient sur Ox, la parabole se réduit au point C et au point à l'infini sur Oy; donc le

lieu rencontre Ox au point C et au point A projection de H sur Ox. Si la droite Δ vient sur Oy, la parabole se réduit au point O et au point à l'infini sur Ox; donc le lieu touche Oy au point O et passe par le point B projection de H sur Oy.

Lorsque la droite Δ passe au point H, les deux points de rencontre sont confondus avec H; ce point est un point double et les tangentes en ce point sont les deux tangentes à la parabole ayant pour directrice OH et issues du point H.

D'ailleurs il est visible que sur toute droite issue de H il n'y a qu'un point, car cette droite est pour la conique du faisceau un axe et la parabole relative à cette conique et correspondant au point O est déterminée par cette tangente, les deux autres tangentes Ox, Oy et le point de contact C sur Ox; l'autre axe est donc la tangente à la parabole menée perpendiculairement à la droite donnée issue de H. Il n'y a donc sur cette droite qu'un centre autre que H. Ce point est facile à construire en s'appuyant sur la construction usuelle du centre de courbure d'une conique.

Pour avoir les directions asymptotiques, il faut trouver pour quelles directions de Δ l'un des deux points du lieu va à l'infini. Il faut pour cela que l'une des tangentes issues de H soit parallèle à la directrice de la parabole, c'est-à-dire soit la tangente au sommet. Mais le foyer de cette parabole décrit le cercle de diamètre OC, et la tangente au sommet est la droite qui joint les projections du foyer sur les axes; elle enveloppe donc une hypocycloïde à trois rebroussements, et les trois directions asymptotiques s'obtiennent en menant par le point H des tangentes à cette hypocycloïde.

Relativement à cette courbe on peut faire bien d'autres remarques que nous passerons sous silence; on peut, en particulier, par une transformation homologique simple la ramener à une strophoïde. On peut enfin se proposer de trouver l'enveloppe des axes des coniques qui ne passent pas au point H, l'enveloppe des coniques elles-mêmes, etc.

En appliquant notre procédé aux cas où le point H est à l'infini ou bien sur la tangente au cercle, Oy, on reconnaît de suite que le lieu est alors une conique et on peut étudier aisément l'une ou l'autre de ces deux coniques.

L. BICART, à Bar-le-Duc.

---

519. — *On considère une ellipse* E *et une droite* Δ; *par un point quelconque* M *de* Δ *on mène les tangentes à* E; *soient* P *et* Q *les deux points de contact. Les normales à* E *en* P *et* Q *se coupent en un point* N; *de ce point on peut mener deux autres normales dont les pieds sont désignés par* P′ *et* Q′. *Le cercle circonscrit au triangle* MPQ *rencontre l'ellipse en deux autres points* P″ *et* Q″, *et les normales en ces points se coupent en un point* N′ *d'où l'on peut mener deux autres normales à l'ellipse ayant pour pieds* P‴ *et* Q‴. *Soient alors* M′, M″, M‴ *les pôles respectifs des droites* P′Q′, P″Q″, P‴Q‴ *et* I, I′, I″ *les projections des points* M, M′, M″, M‴ *sur les droites* PQ, P′Q′, P″Q″, P‴Q‴. *On demande :*

1° *Les lieux des points* M′, M″, M‴;

2° *Les enveloppes des droites* P′Q′, P″Q″, MI, M′I′, M″I″;

3° *Les lieux des points de rencontre de* M′I′ *avec* PQ, *de* M′I′ *avec* MI, *de* MI *avec* PQ *et de* M *avec* P′Q′.

Examiner ce que deviennent ces lieux quand Δ *varie.*

Trouver les enveloppes des lieux précédents quand Δ *se déplace parallèlement à elle-même ou passe par un point fixe.*

Désignons par α, β les coordonnées du point M, par α', β' celles du point M′, par α'', β'' et α''', β''' celles des points M″ et M‴, les axes de l'ellipse étant pris pour axes de coordonnées, et représentons enfin par x_0 et y_0 les coordonnées du point N et par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'ellipse donnée.

Le principal intérêt de cette question est de retrouver les relations qui existent entre les coordonnées des pôles des deux droites PQ et P'Q' et les coordonnées du point N. Bien que ces relations soient très connues, nous allons les établir d'abord.

Si nous exprimons que la normale au point (x, y) passe au point (x_0, y_0), nous obtenons l'équation $\dfrac{x_0 - x}{\dfrac{x}{a^2}} = \dfrac{y_0 - y}{\dfrac{y}{b^2}}$, qui, avec l'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, détermine les pieds des normales issues du point (x_0, y_0) ; appelons λ la valeur commune des deux rapports précédents, nous aurons $x = \dfrac{a^2 x_0}{a^2 + \lambda}$, $y = \dfrac{b^2 y_0}{b^2 + \lambda}$, et, en portant dans l'équation de l'ellipse, nous obtiendrons les paramètres des pieds des normales par l'équation $\dfrac{a^2 x_0^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \dfrac{b^2 y_0^2}{(b^2 + \lambda)^2} - 1 = 0$. D'autre part, conformément aux notations adoptées, les deux droites $\dfrac{\alpha x}{a^2} + \dfrac{\beta y}{b^2} - 1 = 0$ et $\dfrac{\alpha' x}{a^2} + \dfrac{\beta' y}{b^2} - 1 = 0$ passent aux pieds des quatre normales, et, par suite, les deux équations

$$\frac{\alpha x_0}{a^2 + \lambda} + \frac{\beta y_0}{b^2 + \lambda} - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha' x_0}{a^2 + \lambda} + \frac{\beta' y_0}{b^2 + \lambda} - 1 = 0$$

admettent ensemble les quatre racines de l'équation trouvée antérieurement. Nous en déduirons aisément l'identité

$$1 - \frac{a^2 x_0^2}{(a^2 + \lambda)^2} - \frac{b^2 y_0^2}{(b^2 + \lambda)^2} \equiv \left(\frac{\alpha x_0}{a^2 + \lambda} + \frac{\beta y_0}{b^2 + \lambda} - 1\right)\left(\frac{\alpha' x_0}{a^2 + \lambda} + \frac{\beta' y_0}{b^2 + \lambda} - 1\right).$$

Il suffit alors de décomposer le second membre en fractions simples et d'identifier les deux développements pour obtenir les relations cherchées. On trouve ainsi

$$\frac{\alpha\alpha' x_0^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{\beta\beta' y_0^2}{(b^2+\lambda)^2} - \frac{x_0 y_0 \dfrac{\alpha\beta' + \beta\alpha'}{c^2} + x_0(\alpha + \alpha')}{a^2 + \lambda} + \frac{x_0 y_0 \dfrac{\alpha\beta' + \beta\alpha'}{c^2} - y_0(\beta + \beta')}{b^2 + \lambda} + 1 \equiv 1 - \frac{a^2 x_0^2}{(a^2+\lambda)^2} - \frac{b^2 y_0^2}{(b^2+\lambda)^2},$$

et ensuite immédiatement

$$\alpha\alpha' = -a^2, \qquad \beta\beta' = -b^2,$$

$$x_0 \frac{\alpha\beta' + \beta\alpha'}{c^2} - \beta - \beta' = 0 \qquad \text{et} \qquad y_0 \frac{\alpha\beta' + \beta\alpha'}{c^2} + \alpha + \alpha' = 0.$$

D'ailleurs, les deux premières relations seules nous seront utiles dans ce qui suit : elles nous donnent $\alpha' = -\dfrac{a^2}{\alpha}$, $\beta' = -\dfrac{b^2}{\beta}$.

Nous aurons les coordonnées du point M'' en écrivant que parmi les coniques

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha'' x}{a^2} + \frac{\beta'' y}{b^2} - 1\right) = 0,$$

il y a un cercle qui passe au point (α, β). En écrivant que cette conique est un cercle, nous avons d'abord

$$\lambda\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + \frac{\alpha\alpha''}{a^4} - \frac{\beta\beta''}{b^4} = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta'' + \beta\alpha'' = 0\,;$$

puis, en écrivant qu'elle passe au point (α, β),

$$\lambda + \frac{\alpha\alpha''}{a^2} + \frac{\beta\beta''}{b^2} - 1 = 0\,;$$

En portant cette valeur de λ dans la première relation, elle se simplifie et devient

$$\alpha\alpha'' - \beta\beta'' - c^2 = 0.$$

La valeur de α'' et β'' s'obtiennent alors aisément ; ce sont

$$\alpha'' = \frac{c^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \beta'' = -\frac{c^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Nous déduisons de celles-ci α''' et β''' de la même façon que nous déduisons α' et β' de α et β, et nous obtenons

$$\alpha''' = -\frac{a^2(\alpha^2+\beta^2)}{c^2\alpha}, \qquad \beta''' = \frac{b^2(\alpha^2+\beta^2)}{c^2\beta}.$$

La relation qui unit les points M et M'' est particulièrement intéressante : le point M'' est le symétrique par rapport à Ox de l'inverse du point M dans l'inversion ayant pour pôle le point O et pour puissance d'inversion c^2. Cela est évident d'après les formules qui donnent α'' et β''.

1° Cela posé, si le point (α, β) décrit la droite $ux + vy + w = 0$, nous voyons de suite que le point M' décrit la conique

$$\frac{a^2u}{x} + \frac{b^2v}{y} - w = 0,$$

ou

$$(1) \qquad wxy - b^2vx - a^2uy = 0\,;$$

c'est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et qui passe au centre de l'ellipse.

Le lieu de M'' s'obtient en éliminant α et β entre $u\alpha + v\beta + w = 0$ et

$$x = \frac{c^2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad y = -\frac{c^2\beta}{\alpha^2+\beta^2};$$

nous trouvons ainsi

$$(2) \qquad w(x^2+y^2) + c^2(ux - vy) = 0\,;$$

ce lieu est un cercle, comme nous devions nous y attendre d'après la remarque faite plus haut sur la nature de la relation qui unit les points M et M''.

Quant au lieu de M''', il s'obtient en remplaçant x et y par $-\frac{a^2}{x}$, $-\frac{b^2}{y}$, dans l'équation précédente ; il a pour équation

$$(3) \qquad b^4c^2vx^2y - a^2c^2uxy^2 + w(a^4y^2 + b^4x^2) = 0.$$

Rien n'est plus aisé que de voir ce que deviennent ces lieux quand la droite $ux + vy + w = 0$ se déplace dans le plan. En particulier, quand la droite reste parallèle à elle-même ou passe par un point fixe, on obtient des faisceaux linéaires d'hyperboles équilatères, de cercles et de cubiques et les lieux trouvés enveloppent des points.

2° La droite P'Q' a pour équation $\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1 = 0$; or les coordonnées α' et β' ont pour valeurs, en fonction de α et β, $\alpha' = -\frac{a^2}{\alpha}$, $\beta' = -\frac{b^2}{\beta}$; par conséquent cette droite a pour équation $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + 1 = 0$. D'autre part, α et β sont liés par la relation $u\alpha + v\beta + w = 0$; l'équation de la droite rendue homogène en α et β est donc

$$(u\alpha + v\beta)(\beta x + \alpha y) - w\alpha\beta = 0,$$

ou

$$uy\alpha^2 + (ux + vy - w)\alpha\beta + vx\beta^2 = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe de cette droite en exprimant que le trinome ainsi trouvé en α et β est un carré parfait ; nous obtenons ainsi la parabole

$$(4) \qquad (ux + vy - w)^2 - 4uvxy = 0.$$

De la même manière, on voit que l'équation de la droite P''Q'' est

$$\frac{c^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2}\right) - 1 = 0,$$

ou

$$\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2} = 0,$$

puis qu'elle se transforme en

$$(u\alpha + v\beta)\left(\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2}\right) + w\,\frac{\alpha^2 + \beta^2}{c^2} = 0\,;$$

par conséquent l'enveloppe de cette droite a pour équation

$$(5)\qquad \left(\frac{vx}{a^2} - \frac{uy}{b^2}\right)^2 + 4\left(\frac{ux}{a^2} + \frac{w}{c^2}\right)\left(\frac{vy}{b^2} - \frac{w}{c^2}\right) = 0.$$

Cette équation représente aussi une parabole.

Il serait aisé de former les équations des droites MI, M'I', M''I''. On trouve sans peine que les deux droites MI et M''I'' enveloppent chacune une parabole ; quant à la droite M'I', elle passe par un point fixe.

Si la droite Δ varie d'une façon quelconque, la parabole (4) reste tangente aux deux axes de coordonnées aux points où la symétrique de la droite Δ par rapport à l'origine les rencontre ; donc quand Δ se déplace en vérifiant une certaine relation, cette parabole enveloppe les deux axes puis une certaine courbe ; si en particulier on exprime que la droite Δ passe par un point fixe, l'enveloppe se compose des deux axes et d'une troisième droite. Tous ces calculs ne présentent aucune difficulté.

3° Pour terminer, nous nous bornerons à trouver le lieu du point de rencontre de M'I' avec PQ.

Il n'y a pour cela qu'à éliminer α et β entre l'équation de M'I', celle de PQ et la relation $u\alpha + v\beta + w = 0$.

Or on obtient de suite l'équation de M'I', en menant par le point M' une droite perpendiculaire à P'Q' ; on a ainsi l'équation

$$\alpha\left(x + \frac{a^2}{\alpha}\right) - \beta\left(y + \frac{b^2}{\beta}\right) = 0,$$

ou

$$\alpha x - \beta y + c^2 = 0.$$

Le lieu demandé s'obtient donc en annulant le déterminant

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} x & -y & c^2 \\ \dfrac{x}{a^2} & \dfrac{y}{b^2} & -1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0.$$

C'est en général une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes. L'équation de cette hyperbole contient linéairement u, v, w ; de sorte que si la droite Δ passe par un point fixe, toutes les hyperboles (6) forment un faisceau linéaire et passent par des points fixes.

PHYSIQUE

116. — *Étant donnés deux vases cylindriques verticaux, de rayons très petits, situés à une distance r l'un de l'autre, communiquant entre eux par un tube horizontal et renfermant un liquide, on fait tourner le système autour de l'axe de l'un des vases AB avec une vitesse angulaire uniforme ω. Que deviendront les niveaux du liquide dans les deux vases ?*

(*École normale, examens oraux.*)

Nous supposerons, pour simplifier, les sections des deux vases et du tube de communication égales entre elles ; nous appellerons μ la masse spécifique et ϖ le poids spécifique du liquide, h et h' ses hauteurs dans les deux vases.

Considérons, dans le tube de communication, deux sections droites situées respectivement aux distances x et $x + dx$ de l'axe de rotation ; la masse liquide comprise entre les deux sections a pour valeur $\mu\varpi dx$; elle décrit d'un mouvement uniforme un cercle de rayon x ; elle est donc soumise à une

force centripète ayant pour valeur $\mu\pi\omega^2 x dx$. D'autre part, cette force est due à la différence des pressions p et $p + dp$ que supportent les deux bases; on a donc

$$(1) \qquad \mu\omega^2 x dx = dp,$$

d'où l'on tire, en appelant p et p' les pressions en A et C,

$$\mu\omega^2 r^2 = 2(p' - p).$$

D'autre part, les pressions p et p' sont dues aux colonnes liquides de hauteurs h et h', dont l'action verticale est la même que si elles étaient immobiles ; donc

$$(2) \qquad \mu\omega^2 r^2 = 2(h' - h)\varpi.$$

Représentons par P la pression constante due à la somme des colonnes h et h' :

$$P = (h + h')\varpi ;$$

il vient

$$h = \frac{2P - \mu\omega^2 r^2}{4\varpi}.$$

La hauteur h diminue donc, quand ω augmente, suivant une fonction parabolique et s'annule pour la vitesse

$$\omega^2 = \frac{2P}{\mu r^2}.$$

Pour des vitesses supérieures, le liquide rentre dans le tube AC. Soit alors y la distance de l'extrémité M de la colonne à l'axe de rotation. L'intégration de (1) donne, dans ce cas,

$$\mu\omega^2(r^2 - y^2) = 2p' = 2h'\varpi.$$

D'autre part, on a

$$P = (h' - y)\varpi.$$

En éliminant h', on trouve

$$y = \frac{-\varpi + \sqrt{\varpi^2 + \mu\omega^2(\mu\omega^2 r^2 - 2P)}}{\mu\omega^2}.$$

Si la vitesse croît indéfiniment à partir de la valeur limite du cas précédent, le point M s'éloigne peu à peu du point A et tend vers le point C.

On traiterait sans plus de difficulté le cas où l'axe de rotation rencontrerait en un point quelconque la droite AC et le cas où il y aurait dans les vases deux liquides différents.

Remarque. — La relation (2) entre la distance r et la différence $h' - h$ des niveaux représente une parabole; si on considérait une infinité de vases communiquant avec le premier, le lieu des niveaux dans ces vases serait donc un paraboloïde de révolution. On peut en conclure que telle serait la forme de la surface libre d'un liquide tournant tout d'une pièce dans un vase cylindrique à axe vertical.

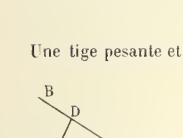
CONCOURS DE 1896 (*Suite*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours spéciaux.

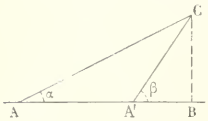
Mécanique et Trigonométrie.

Une tige pesante et homogène AB, dont la longueur 2L et le poids ϖ sont connus, peut pivoter dans un plan vertical autour de la charnière A. On veut la soutenir dans une position faisant l'angle α avec l'horizontale au moyen d'une béquille rigide CD s'appuyant en C sur le sol. La longueur de cette béquille est l ; son poids est supposé négligeable. Elle peut glisser sur le sol aussi bien que sur la tige AB, et le coefficient de frottement est f_1 dans le premier cas et f_2 dans le second.



On demande quelles seront les conditions d'équilibre du système et les positions limites qu'on pourra donner à la béquille sans que le glissement se produise; déterminer la position pour laquelle l'effort de compression supporté par la béquille est minimum.

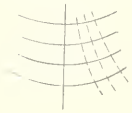
580. — Un observateur situé sur un navire qui se déplace en ligne droite avec une vitesse connue observe à deux époques les angles α et β que fait avec la direction AB de la marche du navire le rayon visuel allant à un point fixe C de l'horizon. On demande de calculer à quelle distance du point C passera le navire et à quel moment il sera le plus voisin de C.



Données : $AA' = 6850^m$; $\alpha = 30°20'3''$; $\beta = 45°6'27''$; temps écoulé entre les deux observations : 17 minutes.

(*Durée : 4 heures.*)

Analyse.



Déterminer les trajectoires orthogonales de la série des courbes positions d'une même chaînette déplacée parallèlement à son axe.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

Epure de Stéréotomie (feuille 1/2 grand-aigle).

Epure de la lunette droite. — Une lunette droite en plein cintre, de $1^m,50$ d'ouverture, pénètre dans un berceau en plein cintre de 4^m d'ouverture.

Le plan des naissances est le même pour la lunette et pour le berceau.

On indiquera la division en voussoirs sur la projection verticale du berceau et sur celle de la lunette, et on représentera complètement un des voussoirs appartenant à la fois au berceau et à la lunette.

Echelle de $0^m,04$ pour 1^m.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

Croquis et dessin de machines.

Première partie : Croquis (feuille 1/8 grand-aigle, quadrillée).

1° Sur une première feuille, faire au crayon, à main levée, le relevé géométral (plan, élévation et coupe) de l'un des objets placés dans la salle d'examen.

2° Relever ses dimensions, en millimètres, et les inscrire sur le croquis.

On accorde 1 h. 1/2 pour cette première partie du travail, après quoi le modèle en relief est retiré de la salle.

Deuxième partie : Mise au net (feuille 1/4 grand-aigle).

Sur une seconde feuille, mettre au net, à l'encre de Chine, à une échelle déterminée, le croquis précédent.

Nota — L'échelle est laissée à l'arbitraire des candidats ; elle doit être choisie assez grande pour que la feuille soit bien remplie.

L'échelle doit être dessinée dans une partie libre de cette feuille.

(*Durée : 4 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

581. — On considère le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0$$

rapporté à trois axes rectangulaires.

1° Soient A et B les deux points de rencontre des deux plans principaux avec une génératrice rectiligne G du paraboloïde. Lieu du milieu C de AB lorsque G décrit le paraboloïde (il se compose de deux droites I et J).

2° Montrer que le plan D perpendiculaire à AB en son milieu C passe par une droite fixe Δ. Lieu des asymptotes des hyperboles d'intersection du paraboloïde P avec le plan D quand G varie.

3° On fait tourner AB autour de la droite I qui passe par son milieu C. Le cône de révolution engendré par AB coupe le paraboloïde suivant une cubique qui rencontre AB en C et en un autre point M dont on demande le lieu Q.

4° Construire la projection de Q sur le plan des xy. H. Bordeux.

582. — On considère une ellipse et le triangle MPQ formé par les tangentes issues du point M et la polaire de ce point. Trouver le lieu du point M :

1° Lorsque le centre du cercle inscrit au triangle MPQ est sur l'ellipse ;

2° Lorsque le centre de gravité de ce triangle est sur l'ellipse ;

3° Quand le point de concours des hauteurs est sur l'ellipse.

(P. Puig, professeur au lycée d'Agen.)

583. — Par un point M du cercle circonscrit à un triangle passent deux paraboles inscrites dans ce triangle. Démontrer que les tangentes en M à ces deux paraboles sont rectangulaires et qu'elles enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements, quand le point M décrit le cercle.

(L.-D. Bicart, sous-lieutenant d'artillerie, à Bar-le-Duc.)

584. — Sur un cercle fixe on marque une origine et un sens de rotation; soient φ_1 et φ_2 les arguments des points communs au cercle et à une droite D.

1° En désignant par $f(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ la relation qui unit ces deux angles, on demande de déterminer le point où la droite D touche son enveloppe.

2° Montrer que si cette enveloppe est une épicycloïde portée par un cercle concentrique au cercle donné, la relation précédente est linéaire en φ_1 et φ_2 et réciproquement.

(L.-D. Bicart.)

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

500. — *Une ellipse de grandeur constante tourne autour de son centre; trouver le lieu des projections du centre sur les tangentes qui font avec une direction donnée un angle égal au tiers de celui que fait un des axes mobiles de l'ellipse avec la même direction.*

Comme dans l'exercice 499, l'équation de l'ellipse est

$$\frac{(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2}{a^2} + \frac{(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La tangente qui fait avec Ox l'angle $\frac{\alpha}{3}$ a pour équation

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{3} + p,$$

p étant déterminé de façon que l'équation aux abscisses des points de rencontre de cette droite avec l'ellipse ait une racine double. Or cette équation aux abscisses est

$$\frac{\left(\dfrac{x\cos\dfrac{2\alpha}{3}}{\cos\dfrac{\alpha}{3}} + p\sin\alpha\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\dfrac{x\sin\dfrac{2\alpha}{3}}{\cos\dfrac{\alpha}{3}} - p\cos\alpha\right)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ou, en prenant pour inconnue $X = \dfrac{x}{\cos\dfrac{\alpha}{3}}$,

$$\left(\frac{\cos^2\dfrac{2\alpha}{3}}{a^2} + \frac{\sin^2\dfrac{2\alpha}{3}}{b^2}\right)X^2 + 2p\left(\frac{\sin\alpha\cos\dfrac{2\alpha}{3}}{a^2} - \frac{\cos\alpha\sin\dfrac{2\alpha}{3}}{b^2}\right)X + p^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right) - 1 = 0;$$

en écrivant que cette équation a une racine double $(AC - B^2 = 0)$, on trouve de suite

$$p^2\cos^2\frac{\alpha}{3} = b^2\cos^2\frac{2\alpha}{3} + a^2\sin^2\frac{2\alpha}{3},$$

et, si on pose

$$t = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{3},$$

$$p^2 = \frac{b^2(1-t^2)^2 + 4a^2t^2}{1+t^2}.$$

L'équation de la tangente envisagée est donc

$$y = tx + \sqrt{\frac{b^2(1-t^2)^2 + 4a^2t^2}{1+t^2}}.$$

D'autre part, la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite a pour équation $x + ty = 0$, et l'on aura le lien demandé en éliminant t entre ces deux équations ; l'élimination est immédiate et conduit à

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 - b^2)(x^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2y^2 = 0,$$

c^2 désignant comme habituellement la quantité $a^2 - b^2$.

Pour construire cette courbe, nous passons aux coordonnées polaires, ce qui nous donne la nouvelle équation

$$\rho^2 = b^2 + c^2 \sin^2 2\omega ;$$

de là nous déduisons

$$\rho = \pm\sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 2\omega},$$

ce qui rend manifeste la symétrie par rapport au pôle ; en tenant compte de cette symétrie, il suffit d'étudier la valeur positive de ρ. Si on change ω en $\omega + 2\pi$, la valeur de ρ se reproduit ; il suffit donc, pour avoir toute la courbe, de faire varier ω dans un intervalle total d'étendue égale à 2π. Si on change ω en $-\omega$, ρ ne change pas, la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe polaire, et, en tenant compte de cette nouvelle symétrie, il suffit de faire varier ω de 0 à π. De même le changement de ω en $\pi - \omega$ manifeste une nouvelle symétrie par rapport à Oy et l'on peut encore restreindre l'intervalle de moitié, se borner à faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Un dernier changement de ω en $\frac{\pi}{2} - \omega$ montre que la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice de l'angle des axes, et permet de restreindre les variations de ω à l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Dans cet intervalle ρ croît de b à a, $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$ part d'une valeur infinie pour arriver à une valeur infinie, en étant toujours positive dans l'intervalle. La courbe a donc la forme ci-contre, et il n'y a plus qu'à tenir compte des symétries constatées pour déduire de l'arc ABC la courbe tout entière.

Si on avait considéré une tangente faisant avec Ox un angle égal au tiers de celui que fait l'autre axe avec Ox, on aurait obtenu une courbe analogue à celle-ci et qui s'en déduit en changeant a^2 en b^2 et inversement.

J. BLANDIN, à Melay.

Bonnes solutions de MM. AUZERAM, à Montpellier ; A. CAUSSÉ, à Castres ; L.-J. GOUJON, MALPLAT (pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne).

---

523. — *On considère une parabole variable* (P) *admettant* F *pour foyer et* Fx *pour axe.*

Par le foyer F *on mène une sécante qui coupe la parabole* (P) *en deux points* M *et* N *tels que la corde* MN *ait une longueur constante et égale à* $2d$. *On demande :*

1° *Le lieu du milieu de la corde* MN ;

2° *Le lieu des points* M *et* N ;

3° *L'enveloppe du cercle décrit sur* MN *comme diamètre ;*

4° *L'enveloppe du diamètre du cercle précédent qui est perpendiculaire à* MN.

En prenant pour axe des x l'axe de la parabole et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite menée par le foyer de la parabole, on obtient pour équation générale de cette courbe $y^2 = 2px + p^2$, p étant un paramètre variable. La corde MN a alors pour équation $\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi} = \rho$, ρ désignant la valeur algébrique du segment qui va du point O au point (x, y). En portant ces valeurs de x

et de y dans l'équation de la parabole, on obtient une équation du second degré en ρ qui donne les deux segments PN et PM,

$$\rho^2 \sin^2 \varphi - 2p\rho \cos \varphi - p^2 = 0;$$

le carré de MN est égal à $(\rho' - \rho'')^2$, ρ' et ρ'' étant les deux racines de cette équation; on a donc, conformément aux notations de l'énoncé,

$$\frac{4p^2 \cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} + \frac{4p^2}{\sin^2 \varphi} = 4d^2,$$

ou

$$p^2 = d^2 \sin^4 \varphi;$$

par suite p peut prendre les deux valeurs $p = \pm d \sin^2 \varphi$, la première valeur correspondant aux paraboles qui tournent leur concavité vers les x positifs, la seconde, aux paraboles qui tournent leur concavité vers les x négatifs; nous nous bornerons à étudier ce qui se passe quand on prend $p = d \sin^2 \varphi$.

1° Le milieu de MN est fourni par l'équation $\rho = \frac{p \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$ ou $\rho = d \cos \varphi$; par suite les coordonnées de ce point sont données par les deux équations

$$x = d \cos^2 \varphi, \qquad y = d \sin \varphi \cos \varphi.$$

Pour éliminer φ entre ces équations, on se sert de $\frac{\cos \varphi}{x} = \frac{\sin \varphi}{y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; l'élimination est immédiate et le lieu a pour équation

(1) $$x^2 + y^2 - dx = 0;$$

c'est donc un cercle tangent à l'origine à l'axe des y.

2° Les points M et N sont donnés par les équations

$$y^2 = 2px + p^2,$$

$$\frac{x}{\cos \varphi} = \frac{y}{\sin \varphi} \qquad \text{et} \qquad p = d \sin^2 \varphi.$$

L'élimination de φ est encore immédiate, et l'on trouve pour lieu

(2) $$(x^2 + y^2)^2 - 2dx(x^2 + y^2) - d^2y^2 = 0;$$

c'est une cardioïde qui a pour point de rebroussement l'origine avec Ox pour tangente en ce point et pour axe de symétrie.

3° Le cercle décrit sur MN comme diamètre a évidemment une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 2\lambda(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + \mu = 0;$$

nous aurons λ et μ en exprimant que la droite $\frac{x}{\cos \varphi} = \frac{y}{\sin \varphi}$ rencontre le cercle aux mêmes points que la parabole; on obtient ainsi l'équation en ρ

$$\rho^2 - 2\lambda\rho + \mu = 0;$$

cette équation doit avoir les mêmes racines que

$$\rho^2 \sin^2 \varphi - 2p\rho \cos \varphi - p^2 = 0,$$

ou

$$\rho^2 - 2d\rho \cos \varphi - d^2 \sin^2 \varphi = 0.$$

Nous aurons donc $\lambda = d \cos \varphi$, $\mu = -d^2 \sin^2 \varphi$, et l'équation du cercle cherché est

$$x^2 + y^2 - 2d \cos \varphi(x \cos \varphi + y \sin \varphi) - d^2 \sin^2 \varphi = 0.$$

Il n'y a plus qu'à rendre cette équation homogène en $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$, puis exprimer que ce trinome en $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ est un carré parfait pour avoir l'enveloppe du cercle envisagé. On trouve ainsi

(3) $$(x^2 + y^2 - 2dx)(x^2 + y^2 - d^2) - d^2y^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$x^2 + y^2 - dx - 2d^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 - dx = 0,$$

qui représentent deux cercles concentriques; le second est le cercle (1) déjà rencontré.

4° Le diamètre du cercle perpendiculaire à la droite MN a pour équation

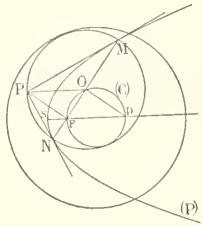
$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - d \cos \varphi = 0;$$

il tourne autour d'un point fixe $x = d$, $y = 0$.

G. POUILLIART.

Solution analogue : M. E.-N. BARISIEN.

Solution géométrique. — Considérons une position particulière de la parabole (P) et de la droite MN, et soit O le milieu de MN.



1° Les tangentes en M et N sont rectangulaires et la droite PF est perpendiculaire à MN. Dès lors la perpendiculaire à MN menée par O est parallèle à PF. D'autre part PO est parallèle à l'axe SF et la figure POFD est un parallélogramme. On a donc

$$FD = PO = OM = d.$$

Le point D est donc fixe et le lieu du point O est le cercle (C) décrit sur FD comme diamètre.

2° Les distances OM et ON sont égales au diamètre FD; quand FO pivote autour du point F, les points M et N décrivent une cardioïde.

3° Le cercle décrit sur MN comme diamètre a son centre sur la circonférence (C) et il est tangent à ce dernier cercle. Il est aussi tangent constamment au cercle qui a même centre que (C) et de rayon $\frac{3d}{2}$. Ces deux cercles constituent l'enveloppe cherchée.

4° Le diamètre perpendiculaire à MN passe par le point fixe D.

M. MALPLAT, Pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne.

---

524. — *On considère une ellipse fixe* E *rapportée à ses axes,* Ox *et* Oy, *et deux points fixes* D *et* D′ *sur* Oy, *tels que* OD = — OD′ = d, *puis un point* M *mobile sur l'ellipse.*

1° *La droite* DM *coupe* Ox *en* N : *trouver le lieu du point de rencontre* R *des deux droites* OM *et* D′N *et construire la tangente* T *en ce point au lieu indiqué.*

2° *Trouver le lieu du point d'intersection de* T *avec la polaire de* R *par rapport à l'ellipse.*

3° *Trouver le lieu du point de rencontre de la parallèle à* Ox *menée par* M *avec la parallèle à* DM *menée par* D′.

Construire ces lieux et traiter géométriquement la question quand l'ellipse E *devient un cercle de rayon* d.

Soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse et $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$ les coordonnées du point M.

1° La droite DM a pour équation

$$y - d = \frac{b \sin \varphi - d}{a \cos \varphi} x;$$

elle rencontre Ox au point dont l'abscisse est $x = \frac{ad \cos \varphi}{d - b \sin \varphi}$, et, par suite, l'équation de D′N est

$$\frac{(d - b \sin \varphi)x}{ad \cos \varphi} - \frac{y}{d} - 1 = 0;$$

d'autre part, l'équation de la droite OM est $\frac{x}{a \cos \varphi} = \frac{y}{b \sin \varphi}$.

On en conclut immédiatement les coordonnées du point de rencontre R de ces deux droites en fonction de l'angle φ et on a ainsi

$$(1) \qquad x = \frac{ad \cos \varphi}{d - 2b \sin \varphi}, \qquad y = \frac{bd \sin \varphi}{d - 2b \sin \varphi}.$$

Pour éliminer φ entre ces deux équations, on forme d'abord $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; on obtient ainsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{d^2}{(d - 2b \sin \varphi)^2},$$

puis on remplace $\sin\varphi$ par sa valeur tirée de l'équation qui donne y, ce qui donne d'abord

$$b\sin\varphi = \frac{dy}{2y+d},$$

puis,

$$d - 2b\sin\varphi = \frac{d^2}{2y+d};$$

enfin on déduit de tout cela l'équation du lieu de R,

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(2y+d)^2}{d^2} = 0.$$

Cette équation représente une conique symétrique par rapport à Oy ; c'est une ellipse si l'on a $d > 2b$, une hyperbole si $d < 2b$, et enfin une parabole si $d = 2b$.

La tangente au point (1) a pour équation

$$\frac{xX}{a^2} + \left[\frac{y}{b^2} - \frac{2(2y+d)}{d^2}\right]Y - \frac{(2y+d)}{d} = 0;$$

en y remplaçant x et y par les valeurs (1), cette équation prend la forme

$$d\left(\frac{X\cos\varphi}{a} + \frac{Y\sin\varphi}{b} - 1\right) - 2Y = 0,$$

et l'on voit ainsi qu'elle rencontre la tangente à l'ellipse au point M sur l'axe des x ; par conséquent la construction de cette tangente se déduit immédiatement de celle de la tangente à l'ellipse au point M.

2° Pour trouver le lieu du point de rencontre de cette tangente avec la polaire du point R par rapport à l'ellipse, il faut encore former l'équation de cette polaire, puis éliminer φ entre les deux équations. L'équation de la polaire est

$$\frac{d\cos\varphi.x}{a} + \frac{d\sin\varphi.y}{b} - d + 2b\sin\varphi = 0,$$

ou

$$d\left(\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} - 1\right) + 2b\sin\varphi = 0;$$

en tenant compte de l'équation de T, on obtient $2y + 2b\sin\varphi = 0$; d'où $\sin\varphi = -\frac{y}{b}$; on obtient ensuite $\cos\varphi$ en portant cette valeur de $\sin\varphi$ dans l'une ou l'autre des deux équations envisagées, et l'on a ainsi

$$\frac{dx}{a}\cos\varphi + d\left(-\frac{y^2}{b^2} - 1\right) - 2y = 0,$$

puis

$$\cos\varphi = \frac{d\left(\frac{y^2}{b^2}+1\right) + 2y}{\frac{dx}{a}} = \frac{a\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{2y}{d} + 1\right)}{x}.$$

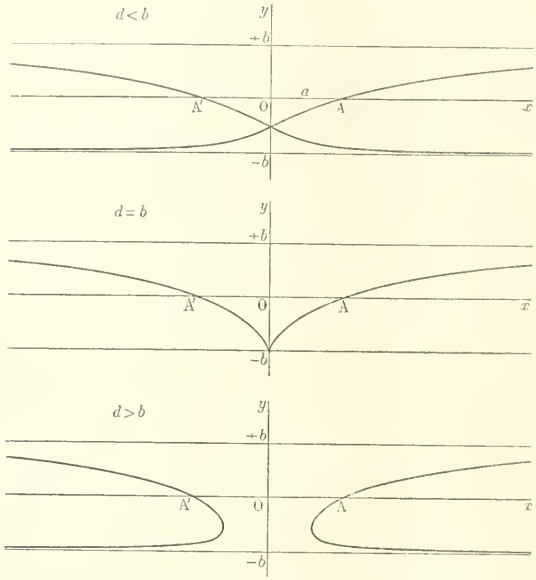
L'équation du lieu s'obtient de suite en écrivant que $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, ce qui donne

$$(3)\qquad \frac{y^2}{b^2} - 1 + \frac{a^2}{x^2}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{2y}{d} + 1\right)^2 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à l'axe des y et dont l'équation est immédiatement résoluble par rapport à x. On peut donc construire facilement cette courbe en faisant varier y de $-\infty$ à $+\infty$ et suivant les variations correspondantes de x

sur l'équation

$$x = \frac{a}{b}\,\frac{y^2 + \frac{2b^2}{d}\,y + b^2}{\sqrt{b^2 - y^2}}.$$



On voit immédiatement que y doit être compris entre $-b$ et $+b$ pour que x soit réel, que si $b > d$ le numérateur a ses deux racines réelles et négatives, l'une en dessous de $-b$ et par suite à rejeter, l'autre acceptable et donnant un point double sur l'axe des y ; on voit aussi que si $b < d$ les racines du numérateur sont imaginaires, et que la courbe n'atteint pas l'axe des y ; enfin que si $b=d$, x ne devient plus infini pour $y = -b$ et qu'il y a un point de rebroussement sur Oy au point d'ordonnée $-b$; d'ailleurs, dans ce cas, la courbe devient une cubique. Il nous reste à voir dans quel sens varie x, c'est-à-dire à étudier les signes de la dérivée de x par rapport à y ; cette dérivée est

$$x' = -\frac{a}{b}\,\frac{y^3 - 3b^2y - \frac{2b^4}{d}}{(b^2 - y^2)\sqrt{b^2 - y^2}},$$

et l'on voit de suite que si $b > d$, il n'y a aucune racine comprise entre $-b$ et $+b$, que si $b < d$, il y en a une et enfin que si $b = d$, il n'y en a pas d'autre que $-b$. Toutes ces remarques réunies rendent évidentes les trois formes que peut prendre le lieu.

3° La parallèle à Ox menée par le point M a pour équation $y - b \sin \varphi = 0$; la parallèle à DM menée par le point D' a pour équation $y + d = \frac{b \sin \varphi - d}{a \cos \varphi}\,x$, et l'on aura le lieu du point de rencontre de ces deux droites en éliminant $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ entre ces deux équations et la relation $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. La première donne $\sin \varphi = \frac{y}{b}$, la seconde, $\cos \varphi = \frac{x}{a}\,\frac{y-d}{y+d}$. Le lieu a donc pour équation

$$(4) \qquad \frac{y^2}{b^2} - 1 + \frac{x^2}{a^2}\,\frac{(y-d)^2}{(y+d)^2} = 0.$$

On voit ainsi que cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, que son équation est immédiatement résoluble par rapport à x et que l'on peut discuter facilement l'équation en regardant y comme variable indépendante. On obtient en effet

$$x = \frac{a}{b}\,\frac{y+d}{y-d}\sqrt{b^2 - y^2},$$

et cette égalité montre que x n'est réel qu'autant que y est compris entre $-b$ et $+b$; si d est inférieur à b, x est encore nul pour $y=-d$ et infini pour $y=d$, le premier point sur l'axe des y étant un point double; si $d>b$, x ne s'annule que pour $y=\mp b$ et ne devient pas infini; si $d=b$, la courbe est la cubique déjà trouvée.

Si enfin on considère la valeur de x définie par l'équation

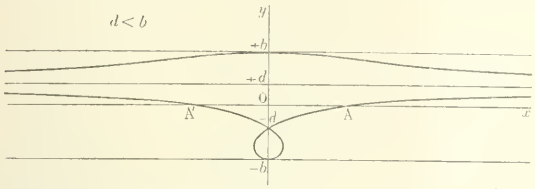
$$\frac{bx}{a}=\frac{d+y}{d-y}\sqrt{b^2-y^2},$$

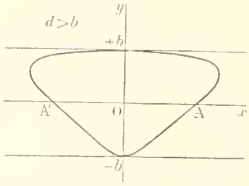
où $\sqrt{b^2-y^2}$ désigne une racine carrée arithmétique, la dérivée est donnée par

$$\frac{bx'}{a}=\frac{y^3-2dy^2-d^2y+2db^2}{(d-y)^2\sqrt{b^2-y^2}};$$

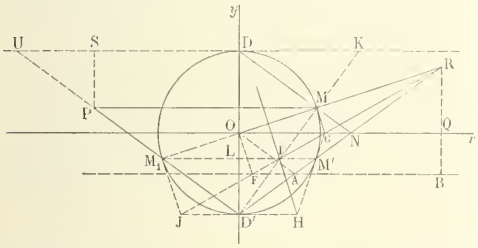
si $d<b$, le numérateur a une racine négative, comprise entre $-b$ et 0 et aucune racine positive; si $d>b$, le numérateur n'a pas de racine négative comprise entre $-b$ et 0 et a une racine positive comprise entre 0 et b; dans le premier cas, la racine négative est comprise entre $-b$ et $-d$.

Il est alors facile de tracer les deux formes générales de la courbe





Solution géométrique. — *Lieu de* R. — Prenons le point R dans la position indiquée par la figure. Tirons OA, parallèle à DM, et par A menons AB parallèle à Ox. Abaissons enfin la perpendiculaire RQB à Ox.



La similitude des triangles OAR et MNR donne

$$\frac{OR}{OM}=\frac{AR}{AN},$$

et celle des triangles ARB et NRQ,

$$\frac{AR}{AN}=\frac{BR}{BQ};$$

par conséquent

$$\frac{OR}{BR}=\frac{OM}{BQ}=2.$$

Le lieu du point R est donc une hyperbole ayant le point O pour foyer, et pour directrice correspondante une parallèle à Ox, menée à la distance $\frac{r}{2}$, r étant le rayon du cercle considéré.

Construction de (T). — La portion d'une tangente à une conique comprise entre le point de contact et le point de rencontre avec la directrice est vue du foyer sous un angle droit.

Menons OF perpendiculaire à OR; joignons les points F et R; cette droite est la tangente T. Elle coupe Ox en G; menons MG.

Les triangles semblables FRB et GRQ donnent

$$\frac{FR}{FG}=\frac{BR}{BQ},$$

et, comme

$$\frac{BR}{BQ}=\frac{OR}{OM},$$

il en résulte

$$\frac{FR}{FG}=\frac{OR}{OM},$$

par suite les droites OF et MG sont parallèles et MG est tangente en M au cercle donné.

Lieu de I. — Le point H, intersection des tangentes au cercle, en D′ et en M′, appartient à la polaire de R.

D'ailleurs la tangente FR au lieu (C) passe par le point J où se rencontrent les tangentes au cercle en M_1 et en D′.

Le théorème de Brianchon, appliqué au quadrilatère M_1J, JH, HG, GM, prouve alors que les droites IH, FR et M_1M' sont concourantes.

Les droites $D'M_1$ et DM étant égales, les triangles rectangles $D'M_1I$ et DMK sont égaux et donnent

$$D'I = MK.$$

Le lieu du point I est une cissoïde droite, ayant son point de rebroussement en D′ et DK pour asymptote.

Lieu de P. — Les triangles rectangles $D'M_1L$ et PUS ayant un côté égal

$$PS = D'L$$

et les angles égaux, sont égaux et donnent

$$D'M_1 = PU;$$

par suite

$$D'P = M_1U:$$

le lieu de P est le même que celui de I.

J. BLANDIN, à Melay.

CONCOURS DE 1896 (*Suite*)

ÉCOLE CENTRALE

Deuxième session.

Géométrie analytique.

585. — On donne l'angle droit xOy et les points A sur Ox, B sur Oy, tels que $OA = OB = a$.

Problème I. — 1° Ecrire l'équation générale des coniques S circonscrites au triangle AOB et tangentes en A à la parallèle Ay' à Oy.

Trouver le lieu de leur centre.

2° Par chaque point du plan passe une conique S : séparer les régions du plan pour lesquelles l'espèce de cette conique reste la même. Construire graphiquement les points communs à une droite arbitraire OZ et à la ligne qui sépare ces régions : tangentes en ces points.

Problème II. — 1° Former l'équation générale des paraboles S′ passant par les points A, B et dont l'axe contient le point O.

2° Trouver le lieu géométrique des points M par lesquels passent deux paraboles S′ ayant leurs axes rectangulaires. Prouver que la droite A′B′, symétrique de AB par rapport au point O, doit faire partie du lieu.

3° Lieu des sommets des paraboles S′ ; ce lieu se compose d'une droite et d'une courbe qu'on propose de tracer (on pourra s'aider d'un changement de direction des axes de coordonnées). Vérifier que cette courbe présente une inflexion en chacun des points A, B.

(*2 octobre, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2*)

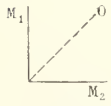
Physique et Chimie.

I. — **586.** — Sous une pression x, un baromètre cylindrique de hauteur L, sur cuve à niveau constant, se trouve entièrement plein de mercure ; l'observateur y fait passer de l'air sec qui occupe une longueur l.

Ce baromètre est ensuite comparé à un baromètre normal à la température à laquelle ont été faites les premières observations; on trouve que la pression étant H l'air occupe une longueur l'.

Quelle était la pression initiale x ?

$$L = 770^{mm}, \qquad l = 40^{mm}, \qquad l' = 50^{mm}, \qquad H = 752^{mm}.$$



II. — **587.** — On donne deux miroirs plans M_1M_2 égaux et perpendiculaires entre eux. On demande de figurer dans le plan du tableau le champ de cet appareil pour un œil placé en O sur la bissectrice.

III. — Ethylène.

IV. — **588.** — Deux ballons de verre contiennent chacun 5^{gr} de chlorate de potassium.

Dans le premier, on verse un excès d'acide chlorhydrique concentré ; dans le second, un excès d'acide sulfurique concentré.

On les chauffe tous les deux. Les gaz dégagés sont conduits dans un même tube de verre chauffé au rouge sombre ; de là, dans un appareil à boules de Liebig contenant une solution de potasse et finalement dans une éprouvette entièrement remplie par du mercure surmonté d'une colonne de lessive de potasse.

Dans cette éprouvette, on fait arriver directement le gaz résultant de la réaction, à chaud, de $45^{gr},388$ de sulfate ferreux ($SO^4Fe, 7H^2O$) dissous dans l'eau acidulée par l'acide sulfurique, sur un excès d'acide azotique.

On demande :

1° L'augmentation de poids du tube à boules de Liebig ;

2° L'augmentation de poids de la solution de potasse de l'éprouvette ;

3° Le volume du gaz restant dans l'éprouvette lorsque les réactions sont achevées.

On suppose que les réactions sont complètes, qu'elles se font sans explosion, que les pertes sont nulles, les gaz purs et secs et mesurés dans les conditions normales de température et de pression.

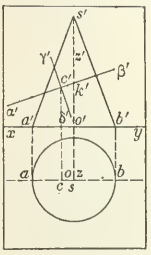
$\delta = 0{,}0695$, $H = 1$, $O = 16$, $Cl = 35{,}5$, $S = 32$, $Az = 14$, $K = 39$, $Fe = 56$.

On ne tiendra pas compte de l'air contenu dans les appareils et on supposera que tous les autres gaz les ont traversés.

(*2 octobre, de 1 h. 1/2, à 4 h. 1/2.*)

Epure.

Intersection d'un ellipsoïde de révolution et d'un cône de révolution



589. — On considère : 1° Un cône de révolution à axe vertical (oz, $o's'$). La base du cône dans le plan horizontal est un cercle de 80^{mm} de rayon. La cote du sommet du cône est de 210^{mm}.

2° Un ellipsoïde de révolution à axe de front (ck, $c'k'$) dirigé perpendiculairement à la génératrice de front (sb, $s'b'$) et rencontrant l'axe du cône en k' ($c'k' = 25^{mm}$, $o'k' = 80^{mm}$). Le centre de l'ellipse méridienne est en (c, c'). Les demi-axes de cette ellipse sont respectivement $c'\alpha' = 110^{mm}$ et $c'\gamma' = 60^{mm}$.

On demande :

1° De tracer les contours apparents des deux surfaces ;

2° De déterminer les projections de l'intersection de ces deux surfaces, en ayant soin d'indiquer les constructions nécessaires pour obtenir les points et les tangentes remarquables de ces courbes ;

3° De représenter l'ensemble formé par le cône et l'ellipsoïde, en supprimant de cette dernière surface les parties extérieures aux deux plans tangents au cône suivant les génératrices de front (sa, $s'a'$), (sb, $s'b'$).

Nota. — Les portions des contours apparents extérieurs au solide représenté se traceront en traits bleus.

Titre extérieur. — GEOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Titre intérieur. — Cone et ellipsoïde.

Cadre de 27^{cm} sur 45^{cm}. xy parallèle aux petits côtés du cadre et au milieu. $o's'$ parallèle aux grands côtés et au milieu de la feuille.

(*3 octobre, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2.*)

Calcul trigonométrique.

590. — Résoudre un triangle connaissant un côté c et les hauteurs $h_a h_b$ abaissées sur les deux autres côtés. Des deux triangles qui répondent à la question on calculera celui dont la surface est la plus grande :

$$c = 25217^m{,}63, \qquad h_a = 19693^m{,}17, \qquad h_b = 16512^m{,}14.$$

(*3 octobre, de 2 h. à 4 h.*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours préparatoires.

Algèbre.

591. — On demande de former avec un périmètre donné $2a$ un triangle ABC tel qu'en le faisant tourner autour de son côté AB on engendre le volume le plus grand possible.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

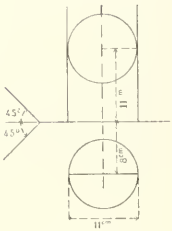
Géométrie analytique.

592. — Lieu des points d'où l'on peut mener deux normales rectangulaires à une conique : examiner en particulier le cas de la parabole.

(*Durée : 4 heures.*)

Epure.

593. — On donne un cylindre de révolution vertical de 11cm de diamètre, dont l'axe est à 8cm en avant du plan vertical de projection.



Dans le plan diamétral de front de ce cylindre on prend un cercle dont le centre a une cote de 11cm et qui a également 11cm de diamètre.

On considère le cylindre passant par ce cercle et dont les génératrices ont des projections inclinées à 45°, de gauche à droite, sur la ligne de terre.

Déterminer et représenter le solide commun à ces deux cylindres, en indiquant par un trait pointillé les parties cachées.

On indiquera la construction d'un point de la courbe commune ainsi que la tangente en ce point et, au besoin, celle de quelques points remarquables.

Nota. — Les données seront dessinées en trait rouge gros, les lignes de construction en trait rouge fin.

(*Durée : 4 heures.*)

Lavis.

Exécuter à l'encre de Chine, à teintes plates ou à teintes fondues, le lavis d'une sphère de 14cm de diamètre.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

594. — Une ellipse est déterminée par son axe AA′ et ses deux foyers F et F′ ; on donne en outre sur la directrice relative au foyer F un point T. On demande de construire un triangle ayant pour base la portion de tangente TM comprise entre le point T et le point de contact avec l'ellipse de l'une des tangentes issues du point T, sachant en outre que la hauteur passe au point F et que l'angle que fait le côté issu du point T avec la base est égal à l'angle que fait la directrice avec FC, C désignant la projection du point M sur la directrice. (On ne construira ni la courbe, ni la parallèle à l'axe menée par le point M.)

(Aug. Barbier, sous-officier aux tirailleurs soudanais.)

595. — La tangente en un point M quelconque d'une ellipse rencontre les axes en T et T′, la normale au même point M rencontre les axes en N et N′.

1° La perpendiculaire élevée à TT′ en son milieu enveloppe une ellipse.

2° La perpendiculaire élevée à NN′ en son milieu enveloppe une ellipse.

(E.-N. Barisien.)

596. — On considère un triangle rectangle isocèle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle ; sur ce cercle on prend un point M que l'on joint aux points A, B et C, et l'on désigne par A′, B′ et C′ les points de rencontre de ces droites avec les côtés du triangle respectivement opposés aux sommets A, B et C ; on considère en outre le cercle Γ qui passe aux points A′, B′ et C′.

1° Montrer que lorsque M décrit le premier cercle, les cercles Γ ont leurs centres sur une ligne droite et sont orthogonaux à un cercle fixe.

2° Le cercle Γ rencontre à nouveau les côtés du triangle ABC en A″, B″, C″. Montrer que les droites AA″, BB″, CC″ concourent en un point M′ du cercle circonscrit au triangle ABC et que la droite MM′ passe par un point fixe quand M varie.

3° Trouver le lieu du pôle de MM′ par rapport à Γ.

(Vasnier.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

7e Année. N° 3. Décembre 1896.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

502. — *Par un point A d'une ellipse, on mène les trois normales autres que la normale en A. AP, AQ, AR; soient P, Q, R les pieds de ces normales. On mène en outre les tangentes à l'ellipse en ces points et l'on considère les quatre cercles tangents à ces trois droites,* C_1, C_2, C_3, C_4 ; *soient* T_1, T_2, T_3, T_4 *les autres tangentes communes à l'ellipse et à ces cercles. Démontrer que le quadrilatère* $T_1T_2T_3T_4$ *est circonscriptible à un cercle et trouver le lieu du centre de ce cercle quand le point A décrit l'ellipse.*

Supposons l'ellipse rapportée à ses axes,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et soient x_0, y_0 les coordonnées du point A. Posons :

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y &= b\,\frac{2t}{1+t^2}. \end{aligned}\right.$$

L'équation aux t des points A, P, Q, R s'obtient en portant ces valeurs de x, y dans l'équation de l'hyperbole d'Apollonius du point A :

$$t^4 + 2\,\frac{ax_0 + c^2}{by_0}\,t^3 + 2\,\frac{ax_0 - c^2}{by_0}\,t - 1 = 0.$$

Débarrassons cette équation de la racine $t = t_0$ relative au point A. Il vient

$$(1) \qquad t^3 + \frac{a^2+c^2}{b^2 t_0}\,t^2 + \frac{a^2+c^2}{b^2}\,t + \frac{1}{t_0} = 0.$$

Soit

$$(u\alpha + v\beta + w)^2 - \rho^2(u^2+v^2) = 0,$$

l'équation tangentielle d'un des cercles C_1, C_2, C_3, C_4. On forme aisément l'équation aux t des points de contact des tangentes communes avec l'ellipse, en remplaçant $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$ respectivement par $-\frac{x}{a^2}$, $-\frac{y}{b^2}$, c'est-à-dire par $-\frac{1}{a}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $-\frac{1}{b}\cdot\frac{2t}{1+t^2}$, ce qui donne

$$\frac{(\alpha+a)^2-\rho^2}{a^2}\,t^4 - 4\,\frac{(\alpha+a)\beta}{ab}\,t^3 + 2\left(\frac{a^2-\alpha^2+\rho^2}{a^2} + 2\,\frac{\beta^2-\rho^2}{b^2}\right)t^2 + 4\,\frac{(\alpha-a)\beta}{ab}\,t + \frac{(\alpha-a)^2-\rho^2}{a^2} = 0.$$

Cette équation doit admettre les trois racines de (1).

Son premier membre est donc identique au premier membre de (1) multiplié par

$$\frac{(\alpha+a)^2-\rho^2}{a^2}\,t + \frac{(\alpha-a)^2-\rho^2}{a^2}\,t_0.$$

En égalant dans ces deux équations du quatrième degré les coefficients de t^2, on trouve, après quelques réductions faciles,

$$\alpha^2 - \beta^2 + c^2 = 0.$$

Égalons de même les coefficients de t^3, ainsi que ceux de t ; nous aurons

$$(a^2+c^2)[(\alpha+a)^2-\rho^2]+b^2t_0^2[(\alpha-a)^2-\rho^2] = -4abt_0(\alpha+a)\beta,$$
$$b^2[(\alpha+a)^2-\rho^2]+(a^2+c^2)t_0^2[(\alpha-a)^2-\rho^2] = +4abt_0(\alpha-a)\beta.$$

Nous déduisons de là

$$(\alpha+a)^2-\rho^2 = -2b\beta t_0\left(\frac{a\alpha}{c^2}+1\right),$$

$$(\alpha-a)^2-\rho^2 = +2\,\frac{b\beta}{t_0}\left(\frac{a\alpha}{c^2}-1\right),$$

et, en retranchant membre à membre,

$$(2)\qquad \frac{ab\alpha\beta}{c^2}(1+t_0^2)+2a\alpha t_0-b\beta(1-t_0^2)=0.$$

Le t de la quatrième tangente commune au cercle et à l'ellipse est

$$t=-t_0\frac{(\alpha-a)^2-\rho^2}{(\alpha+a)^2-\rho^2}=\frac{1}{t_0}\cdot\frac{a\alpha-c^2}{a\alpha+c^2}.$$

On en tire $\dfrac{a\alpha}{c^2}=\dfrac{1+t_0t}{1-t_0t}$, et, en portant la valeur de α dans l'équation (2),

$$\frac{b\beta}{c^2}=-\frac{1+t_0t}{t+t_0}.$$

Or u, v, w étant les coordonnées de la tangente à l'ellipse au point t, on a

$$t=\frac{bv}{au-w},\qquad t^2=-\frac{au+w}{au-w}.$$

Par suite,

$$(1\pm t_0t)^2=1\pm\frac{2t_0bv}{au-w}-t_0^2\frac{au+w}{au-w},$$

$$(t+t_0)^2=t_0^2+\frac{2t_0bv}{au-w}-\frac{au+w}{au-w}.$$

On a donc

$$\frac{a^2\alpha^2}{c^4}=\frac{au-w+2t_0bv-t_0^2(au+w)}{au-w-2t_0bv-t_0^2(au+w)}=\frac{x_0u+y_0v-w}{x_0u-y_0v-w},$$

$$\frac{b^2\beta^2}{c^4}=\frac{au-w+2t_0bv-t_0(au+w)}{t_0^2(au-w)+2t_0bv-(au+w)}=\frac{x_0u+y_0v-w}{-x_0u+y_0v-w},$$

Si l'on porte les expressions de α^2, β^2 dans l'équation $\alpha^2-\beta^2+c^2=0$, on a l'équation tangentielle d'une conique tangente aux droites T_1, T_2, T_3, T_4 :

$$(3)\qquad \frac{a^2b^2}{x_0u+y_0v-w}+\frac{a^2c^2}{x_0u-y_0v+w}+\frac{b^2c^2}{x_0u-y_0v-w}=0,$$

ou $\quad (a^4+b^2c^2)x_0^2u^2+(b^4-a^2c^2)y_0^2v^2-2a^2b^2x_0y_0uv-2a^2c^2x_0uw+2b^2c^2y_0vw+(c^4-a^2b^2)w^2=0.$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$\Gamma\equiv(a^2x_0u-b^2y_0v-c^2w)^2+b^2c^2x_0u^2-a^2c^2y_0^2v^2-a^2b^2w^2=0.$$

L'équation tangentielle générale des coniques inscrites dans le quadrilatère T_1, T_2, T_3, T_4 est

$$\Gamma+\lambda E=0,\qquad \text{avec}\qquad E\equiv a^2u^2+b^2v^2-w^2.$$

Si l'on prend $\lambda=-a^2b^2$, on obtient

$$(C)\qquad (a^2x_0u-b^2y_0v-c^2w)^2-(b^4x_0^2+a^4y_0^2)(u^2+v^2)=0,$$

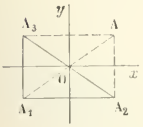
équation tangentielle d'un cercle (C), ce qui démontre la proposition. Les coordonnées de son centre sont

$$x=-\frac{a^2x_0}{c^2},\qquad y=\frac{b^2y_0}{c^2}.$$

C'est le symétrique par rapport au centre de l'ellipse du centre de l'hyperbole d'Apollonius relative au point A. Ces deux points ont pour lieu commun l'ellipse :

$$\frac{c^4x^2}{a^6}+\frac{c^4y^2}{b^6}-1=0.$$

Remarques. — Les dénominateurs des trois fractions du premier membre de (3) sont les équations tangentielles des points A_1, A_2, A_3, symétriques du point A par rapport au centre O de l'ellipse et par rapport à ses axes. La forme de l'équation de Γ montre que cette conique est inscrite dans le triangle $A_1A_2A_3$. Son équation peut encore s'écrire :



$$(a^2x_0u - b^2y_0v - c^2w)^2 - a^2c^2y_0^2(u^2 + v^2) + a^2b^2(c^2u^2 - w^2) = 0.$$

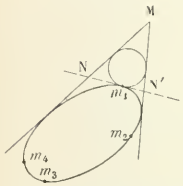
Donc :

Les droites T_1, T_2, T_3, T_4, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 sont tangentes à une conique Γ, et les tangentes menées à cette conique des deux foyers de l'ellipse sont tangentes à un cercle concentrique au cercle C.

Remarques géométriques. — Nous allons rappeler les principales propriétés du quadrilatère formé par les tangentes communes à une conique et à un cercle, ce qui nous permettra de démontrer la proposition énoncée, dans le cas général où les points P, Q, R sont non plus les pieds des normales issues d'un point, mais trois points quelconques de la conique.

Théorème fondamental (Chasles). — *Pour qu'il existe un cercle* (C *tangent aux tangentes à une conique* S *issues de deux points* M, M', *il faut et il suffit que les points* M, M' *soient situés sur une conique homofocale à* S. *Le centre du cercle est le pôle de* MM' *par rapport à cette conique homofocale.*

Si la conique S et le point M sont fixes, et le cercle variable, le lieu du point M' se compose des deux coniques homofocales à S passant par M : S_1, S_2. (*R. M. S.*, question 67, tome I, page 198.)



Une des deux coniques S_1, S_2 rencontre la conique S en quatre points réels m_1, m_2, m_3 m_4. Ce sont les points de contact réels des cercles tangents à la conique S et aux deux tangentes à S issues de M, car ils correspondent à des cercles ayant avec S, deux tangentes communes confondues.

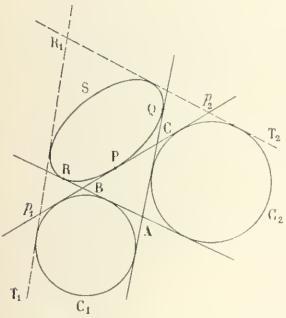
Si on considère tous les cercles tangents à la conique S au point m_1, le lieu du point M est la conique homofocale à S passant par m_1. (*R. M. S.*, question 129, tome I, page 358.)

Soit MNN' le triangle circonscrit à S et à un de ces cercles tangents à S en m_1. Les points N, N' peuvent être regardés comme deux sommets opposés du quadrilatère MNm_1N'. Donc :

Si par les points de rencontre d'une tangente à une conique S au point m_1, avec une conique homofocale à S, on mène les deux autres tangentes à S, le lieu de leur point de rencontre est la conique homofocale à S passant par m_1.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant, dont la proposition énoncée dans la présente question est un cas particulier :

Théorème. — C_1, C_2, C_3, C_4 étant les quatre cercles tangents aux tangentes à une conique en trois points quelconques P, Q, R, le quadrilatère formé par les autres tangentes communes T_1, T_2, T_3, T_4 à la conique et à ces cercles est circonscriptible à un cercle.



Soient en effet p_1, p_2, p_3, p_4 les points de rencontre des droites T_1, T_2, T_3, T_4 avec la tangente à S en P, BC. Deux des points p_1, p_2, p_3, p_4, par exemple p_1, p_2 sont situés sur une conique homofocale à S passant par A, S_1. Les deux autres, p_3, p_4 sont situés sur la deuxième conique homofocale à S passant par A, S_2. Le point de rencontre R_2 des droites T_1, T_2 est donc sur la conique homofocale à S passant par P. De même le point de rencontre R_2 de T_3, T_4.

Le quadrilatère $T_1T_2T_3T_4$ ayant deux sommets opposés R_1, R_2 situés sur une hyperbole homofocale à S est circonscriptible à un cercle.

Comme dernière application du théorème de Chasles, examinons le cas où trois des côtés du quadrilatère circonscrit à la fois à une conique S et à un cercle sont confondus. Le cercle est alors osculateur à la conique en un point P. Soit Q le point de rencontre de la quatrième tangente commune au cercle et à S avec la tangente en P. P et Q peuvent être considérés comme les sommets opposés de ce quadrilatère. On a par suite ce théorème connu :

Le centre du cercle osculateur en un point P d'une conique S est le pôle de la tangente en P par rapport à la conique homofocale à S passant par P.

VASNIER.

M. Bourgonnier, professeur au Lycée d'Orléans, a traité la question analytiquement.

520.— *Étant données trois coniques et une droite* D, *si l'on joint un point* M *aux points de rencontre de ces coniques avec la droite, on obtient trois nouvelles cordes. Montrer que le lieu des points* M *pour lesquels ces trois cordes sont concourantes, est la jacobienne du réseau défini par les trois coniques.*

Énoncer la proposition corrélative.

Énoncer et démontrer les propositions analogues dans l'espace.

Soient $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$ les équations des trois coniques et

$$P \equiv ux + vy + wz = 0$$

l'équation de la droite donnée D.

Désignons en outre par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M et par

$$P' \equiv u'x + v'y + w'z = 0$$

la seconde corde qu'on obtient en appliquant la construction indiquée à la première conique. Alors dans le faisceau, $\lambda f(x, y, z) + PP' = 0$, il doit y avoir une conique ayant pour point double le point M ; on obtient ainsi

$$\begin{aligned} u'P_0 &= -uP'_0 - \lambda f'_{x_0}, \\ v'P_0 &= -vP'_0 - \lambda f'_{y_0}, \\ w'P_0 &= -wP'_0 - \lambda f'_{z_0}, \\ P'_0 &= u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 ; \end{aligned}$$

en multipliant les trois premières équations par x_0, y_0, z_0 et ajoutant, on obtient $P_0P'_0 = -\lambda f_0$; il n'y a plus qu'à remplacer P'_0 par $-\dfrac{\lambda f_0}{P_0}$ dans les trois premières pour obtenir de suite

$$\begin{aligned} \theta u' &= uf_0 - P_0 f'_{x_0}, \\ \theta v' &= vf_0 - P_0 f'_{y_0}, \\ \theta w' &= wf_0 - P_0 f'_{z_0}. \end{aligned}$$

L'équation de la seconde corde est donc

$$f_0 P - P_0 F = 0,$$

en posant $F = xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0}$; par suite, les trois nouvelles cordes ont pour équations

$$\begin{aligned} f_0 P - P_0 F &= 0, \\ g_0 P - P_0 G &= 0, \\ h_0 P - P_0 H &= 0. \end{aligned}$$

Pour que ces droites se rencontrent, il faut que le déterminant des trois fonctions linéaires soit nul, ce qui donne, pour lieu du point M,

$$\begin{vmatrix} uf - Pf'_x & vf - Pf'_y & wf - Pf'_z \\ ug - Pg'_x & vg - Pg'_y & wg - Pg'_z \\ uh - Ph'_x & vh - Ph'_y & wh - Ph'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant se décompose en huit autres dont quatre sont nuls et fournit l'équation

$$P^2 u \begin{vmatrix} f & f'_y & f'_z \\ g & g'_y & g'_z \\ h & h'_y & h'_z \end{vmatrix} + P^2 v \begin{vmatrix} f' & f & f'_z \\ g'_x & g & g'_z \\ h'_x & h & h'_z \end{vmatrix} + P^2 w \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f \\ g'_x & g'_y & g \\ h'_x & h'_y & h \end{vmatrix} - P^3 \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Le dernier de ces déterminants est le jacobien, J, des trois fonctions f, g, h ; chacun des autres se

ramène aisément au jacobien : en effet, le premier, multiplié par 2, s'écrit

$$\begin{vmatrix} xf'_x + yf'_y + zf'_z & f'_y & f'_z \\ xg'_x + yg'_y + zg'_z & g'_y & g'_z \\ xh'_x + yh'_y + zh'_z & h'_y & h \end{vmatrix}$$

et se réduit immédiatement à $x\mathrm{J}$; les deux autres, par une transformation analogue, deviennent $y\mathrm{J}$, $z\mathrm{J}$. Alors l'équation du lieu peut s'écrire

$$\mathrm{P}^2(nx + ry + wz)\mathrm{J} - 2\mathrm{P}^3\mathrm{J} = 0,$$

ou finalement

$$\mathrm{P}^3\mathrm{J} = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres : d'abord $\mathrm{P} = 0$, qui est une solution exceptionnelle évidente *a priori*, et enfin $\mathrm{J} = 0$ qui représente le vrai lieu.

La démonstration géométrique est évidente. Désignons, en effet, par C_1, C_2, C_3 les trois coniques, par D_1, D_2, D_3 les trois cordes envisagées. Les polaires du point M par rapport aux trois coniques sont les mêmes que celles de ce même point par rapport aux trois couples de droites (D, D_1), (D, D_2), (D, D_3). Il est alors évident que c'est la même chose d'exprimer qu'il y a un même conjugué harmonique du point M ou que les trois droites D_1, D_2, D_3 se rencontrent. Le lieu de M est donc la jacobienne des trois coniques.

La proposition corrélative est la suivante : *Étant données trois coniques, un point* A *et une droite* D, *si par le point* A *on mène les tangentes à l'une des coniques et par les points de rencontre de ces tangentes avec la droite* D, *les nouvelles tangentes à la même conique, ces deux droites se coupent en un point* P, *et l'enveloppe des droites* D *pour lesquelles les trois points* P *sont en ligne droite est la cayleyenne des trois coniques.*

Dans l'espace, on a deux propositions analogues que l'on peut énoncer ainsi :

1° *Étant donnés quatre quadriques et un plan, le lieu des points* M *pour lesquels les seconds plans de sections communes aux quadriques et aux cônes ayant pour sommet le point* M *et pour bases les sections faites par le plan passent par un même point est la surface jacobienne des quatre quadriques.*

2° *Étant donnés trois quadriques et un plan, le lieu des points* M *pour lesquels les seconds plans de sections communes aux quadriques et aux cônes ayant pour sommet le point* M *et pour bases les sections faites par le plan passent par une même droite est la courbe des points pour lesquels les trois plans polaires passent par la même droite.*

Elle a pour équations

$$\begin{Vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z & f'_t \\ g'_x & g'_y & g'_z & g'_t \\ h'_x & h'_y & h'_z & h'_t \end{Vmatrix} = 0.$$

On a aisément les deux propositions corrélatives.

Solution géométrique. — Soient C_1, C_2, C_3 les trois coniques données ; d_1, d_2, d_3 les trois nouvelles cordes obtenues en joignant le point M aux points de rencontre de chacune des coniques C avec la droite D et qui concourent en un point m. Soit m' le point d'intersection de la droite mM avec la droite D.

La polaire du point M par rapport à l'une quelconque des coniques C n'est autre que la polaire de ce même point M par rapport à l'angle formé par la droite D et la droite d correspondante. Elle passera donc par le point M′ conjugué harmonique de M par rapport au segment mm'. Les polaires du point M par rapport aux trois coniques sont donc concourantes.

D'ailleurs, reprenant le raisonnement en sens inverse, on voit que : Réciproquement, si les polaires d'un point M par rapport aux trois coniques sont concourantes, il en est de même des trois nouvelles

cordes d relatives à ce point. Le lieu du point M est donc la jacobienne du réseau ponctuel défini par les trois coniques C.

Transformant par le principe de dualité, nous obtenons la propriété corrélative suivante :

Étant donnés trois coniques et un point P, *de ce point on mène les tangentes à l'une des coniques et, des points de rencontre de ces tangentes avec une droite* Δ, *on mène les deux autres tangentes à la conique qui se coupent en un point* P'. *Répétant la même construction pour les deux autres coniques, on obtient ainsi trois points* P'. *L'enveloppe des droites* Δ *pour lesquelles ces trois points sont en ligne droite est la cayleyenne du réseau tangentiel défini par les trois coniques données.*

Il est aisé d'étendre à l'espace les propriétés précédentes.

Théorème. — *Étant données trois quadriques et un plan* P, *on considère les cônes de sommet* M *ayant pour directrices les sections des quadriques par le plan* P. *Ces cônes coupent les quadriques suivant trois nouvelles coniques. Le lieu des points* M *pour lesquels les plans de ces coniques se coupent suivant une droite est le lieu des sommets des cônes du réseau ponctuel défini par les trois quadriques données.*

Soient en effet Q_1, Q_2, Q_3 les trois quadriques données ; P_1, P_2, P_3 les plans des trois nouvelles coniques qui se coupent suivant une droite Δ. Enfin, soit Δ' l'intersection du plan P et du plan déterminé par le point M et la droite Δ.

Le plan polaire du point M par rapport à l'une quelconque des quadriques Q n'est autre que le plan polaire de ce même point M par rapport à l'angle formé par le plan P et le plan p correspondant à la quadrique considérée. Il passera donc par la droite D polaire du point M par rapport à l'angle formé par les droites Δ et Δ'. Les plans polaires du point M par rapport aux trois quadriques se coupent donc suivant cette droite D.

La réciproque s'établirait sans difficulté. Le lieu du point M est donc la courbe lieu des sommets des cônes du réseau ponctuel défini par les trois quadriques. Cette courbe est du sixième ordre.

Transformant par le principe de dualité, on obtient la proposition corrélative :

Étant données trois quadriques et un point S, *le cône de sommet* S *circonscrit à l'une des quadriques coupe un plan* H *suivant une conique. On construit le second cône de sommet* S' *circonscrit à la quadrique et à la conique. Répétant la même construction pour les deux autres quadriques, on obtient ainsi trois points* S'. *Les plans* H *pour lesquels ces trois points sont en ligne droite sont les plans des coniques du réseau tangentiel défini par les trois quadriques.*

Ces plans H sont tels que leurs pôles par rapport à toutes les quadriques du réseau sont en ligne droite. Ils enveloppent une surface développable de sixième classe.

V. BERTRAND,
Répétiteur au lycée de Lille.

---

521. — *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy ; *on considère une conique variable* (C) *ayant ses foyers réels, l'un sur* Ox, *l'autre sur* Oy, *dont la longueur de l'axe non focal est constante et égale à* $2b$ *et dont le cercle orthoptique passe par un point fixe* A. *On demande :*

1° *Le lieu du centre de la conique* (C) ;

2° *L'enveloppe des axes de la conique* (C).

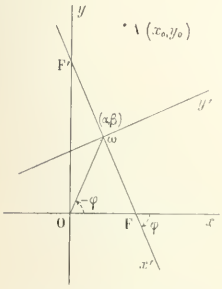
3° *Cette enveloppe se compose de deux paraboles* (P), (Q). *En supposant que le point* A *devienne variable, quels sont les lieux que doit décrire ce point pour que la parabole* (P) *ou la parabole* Q *ait un paramètre invariable et égal à* p ?

4° *Trouver l'enveloppe des directrices de la conique* (C) *correspondant aux foyers réels.*

5° *Cette enveloppe se compose de deux paraboles* (P_1), (Q_1) *dont les directrices sont parallèles. En supposant que le point* A *devienne variable, trouver le lieu décrit par ce point quand la distance qui*

sépare les directrices des paraboles (P_1), (Q_1) *est constante et égale à* d. *Examiner le cas particulier où* $d = 4b\sqrt{2}$.

Désignons par α et β les coordonnées du centre ω, par $\omega x'$ l'une des directions de l'axe focal, par φ l'un des angles qu'elle fait avec Ox, et par $\omega y'$ la direction qui fait l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec $\omega x'$.



Les coordonnées x et y, en fonction des coordonnées x' et y', ont pour expressions

$$x = \alpha + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = \beta + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi;$$

d'où l'on déduit

$$x' = (x - \alpha)\cos\varphi + (y - \beta)\sin\varphi,$$
$$y' = -(x - \alpha)\sin\varphi + (y - \beta)\cos\varphi.$$

D'autre part, l'équation de la conique envisagée est

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ou, dans l'ancien système,

$$\frac{[(x - \alpha)\cos\varphi + (y - \beta)\sin\varphi]^2}{a^2} + \frac{[(x - \alpha)\sin\varphi - (y - \beta)\cos\varphi]^2}{b^2} - 1 = 0,$$

a étant un paramètre variable et b une constante donnée ; d'ailleurs on a entre les paramètres les relations

$$a^2 - b^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$
$$\frac{\alpha}{\cos\varphi} = -\frac{\beta}{\sin\varphi},$$
$$(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = a^2 + b^2,$$

la dernière exprimant que le cercle orthoptique passe au point A de coordonnées données x_0 et y_0.

1° En éliminant a^2 entre la première et la dernière des trois relations, on a

$$(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = 2b^2 + \alpha^2 + \beta^2,$$

ou

$$2\alpha x_0 + 2\beta y_0 - x_0^2 - y_0^2 + 2b^2 = 0;$$

donc si on pose

(1) $$2h = x_0^2 + y_0^2 - 2b^2,$$

on voit de suite que le lieu des centres est la droite représentée par l'équation

(2) $$xx_0 + yy_0 - h = 0.$$

2° En tenant compte de la relation linéaire qui lie α et β, $\alpha x_0 + \beta y_0 - h = 0$, la deuxième relation devient

$$\frac{\alpha}{\cos\varphi} = \frac{\beta}{-\sin\varphi} = \frac{h}{x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi};$$

au surplus, l'équation de l'axe focal est $y' = 0$ ou

$$(x - \alpha)\sin\varphi - (y - \beta)\cos\varphi = 0;$$

elle peut donc s'écrire

$$(x\sin\varphi - y\cos\varphi)(x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi) - 2h\sin\varphi\cos\varphi = 0;$$

par suite, nous aurons l'équation de l'enveloppe en exprimant que cette équation, homogène et du second degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, a une racine double. Nous trouvons ainsi la parabole

(3) $$(xx_0 + yy_0 - 2h)^2 - 4x_0y_0xy = 0.$$

Nous aurions aussi aisément l'enveloppe de l'axe non focal ; c'est aussi une parabole,

(4) $$(xy_0 - yx_0)^2 + 4(xx_0 - h)(yy_0 - h) = 0.$$

3° Cherchons maintenant le paramètre de la parabole (3) ; pour cela, mettons cette équation sous la forme

$$(xx_0 - yy_0)^2 - 4h(xx_0 + yy_0) + 4h^2 = 0,$$

puis sous la forme

$$(xx_0 - yy_0 + 2\lambda)^2 = 4(\lambda + h)xx_0 - 4(\lambda - h)yy_0 + 4(\lambda^2 - h^2);$$

nous déterminons λ par la condition que les deux droites mises en évidence soient rectangulaires, et nous aurons ainsi

$$(\lambda + h)x_0^2 + (\lambda - h)y_0^2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \frac{h(y_0^2 - x_0^2)}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Nous connaissons alors l'axe et la tangente au sommet de la parabole et son équation est écrite ainsi

$$(xx_0 - yy_0 + 2\lambda)^2 = \frac{8hx_0y_0}{x_0^2 + y_0^2}(xy_0 + yx_0 + \cdots);$$

donc en désignant par Y et X les distances d'un point de la parabole à l'axe et à la tangente au sommet, nous avons de suite l'équation réduite

$$Y^2(x_0^2 + y_0^2) = \frac{8hx_0y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} X.$$

De là nous déduisons le paramètre de cette parabole

$$p = \frac{4hx_0y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En élevant au carré, remplaçant $4h^2$ par sa valeur tirée de (1) et supprimant les indices des coordonnées, nous obtenons le lieu demandé

(5) $$4x^2y^2(x^2 + y^2 - 2b^2)^2 = p^2(x^2 + y^2)^3.$$

On aurait aussi aisément le lieu relatif à la seconde parabole ; c'est la courbe du 8e degré représentée par l'équation

(6) $$(x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2 - 2b^2)^2 = p^2(x^2 + y)^3.$$

Ce lieu coïncide avec le précédent quand on le fait tourner de 45° autour de l'origine.

4° La directrice du foyer à abscisse positive dans le système $\omega x'y'$ a pour équation $x' = \frac{a^2}{c}$, ou

$$(x - \alpha)\cos\varphi + (y - \beta)\sin\varphi = \frac{a^2}{c}.$$

Cette équation se met sous la forme

$$(x - \alpha)\cos\varphi + (y - \beta)\sin\varphi = \frac{b^2 + \alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}};$$

on en déduit de suite, en tenant compte des valeurs de α et β en fonction de l'angle φ,

$$\frac{\pm h}{x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi}[(x - \alpha)\cos\varphi + (y - \beta)\sin\varphi] = b^2 + \frac{h^2}{(x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi)^2},$$

puis, en second lieu,

$$\pm h(x\cos\varphi + y\sin\varphi)(x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi) - h(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)] = h^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + b^2(x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi)^2.$$

Le double signe donne les deux directrices ; prenons le signe $+$, nous aurons une équation qui peut s'écrire

$$\cos^2\varphi(hxx_0 - 2h^2 - b^2x_0^2) + \sin^2\varphi(-hyy_0 - b^2y_0^2) + \sin\varphi\cos\varphi(hyx_0 - hxy_0 + 2b^2x_0y_0) = 0;$$

en exprimant que cette équation, homogène et du second degré en $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, a une racine double, nous obtenons l'enveloppe de la directrice ; c'est la parabole

(7) $$(hyx_0 - hxy_0 + 2b^2x_0y_0)^2 + 4(hxx_0 - 2h^2 - b^2x_0^2)(hyy_0 + b^2y_0^2) = 0.$$

L'enveloppe de la seconde directrice est la parabole

(8) $$(hyx_0 - hxy_0 - 2b^2x_0y_0)^2 + 4(hxx_0 + b^2x_0^2)(hyy_0 - 2h^2 - b^2y_0^2) = 0.$$

Les directrices de ces deux paraboles sont parallèles ; elles sont toutes deux perpendiculaires à la direction $xy_0 + yx_0 = 0$. Pour obtenir leurs équations, remarquons que chacune des équations des deux paraboles est mise sous la forme $4PQ + R^2 = 0$, P, Q et R étant des fonctions linéaires ; les droites P et Q sont donc tangentes à la parabole ; en outre, elles sont rectangulaires ; donc la directrice passe par leur point de rencontre. Les équations des deux directrices sont alors

$$x_0\left(x - \frac{2h^2 + b^2x_0^2}{hx_0}\right) - y_0\left(y - \frac{b^2y_0^2}{hy_0}\right) = 0,$$

$$x_0\left(x + \frac{b^2x_0^2}{hx_0}\right) - y_0\left(y - \frac{2h^2 + b^2y_0^2}{hy_0}\right) = 0 ;$$

leur distance est égale à la différence des distances de l'origine à ces deux droites ; on a donc entre x_0 et y_0 la relation

$$\frac{2}{h}\,\frac{(b^2(x_0^2 + y_0^2) + 2h^2)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = d,$$

ou

$$2h^2 + b^2(x_0^2 + y_0^2)^2 = \frac{d^2}{4}h^2(x_0^2 + y_0^2),$$

ou enfin, en remplaçant h^2 par sa valeur tirée de (4), et supprimant les indices des coordonnées,

$$(x^2 + y^2 - 2b^2)^2 + 2b^2(x^2 + y^2)^2 = \frac{d^2}{4}(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2b^2)^2.$$

C'est une équation du quatrième degré en $x^2 + y^2$, qui représente quatre cercles ayant pour centre le point O.

Dans le cas où $d = 4b\sqrt{2}$, cette équation s'écrit

$$(x^2 + y^2)^4 - 12b^2(x^2 + y^2)^3 + 44b^4(x^2 + y^2)^2 - 48b^6(x^2 + y^2) + 16b^8 = 0 ;$$

le premier membre est un carré parfait, et l'équation s'écrit

$$(x^2 + y^2)^2 - 6b^2(x^2 + y^2) + 4b^4)^2 = 0.$$

Les quatre cercles sont venus alors coïncider deux à deux.

Construction du lieu (5). — En transformant l'équation (5) à l'aide des coordonnées polaires, on a l'équation

$$4\sin^2\omega\cos^2\omega(\rho^2 - 2b^2)^2 - p^2\rho^2 = 0,$$

ou

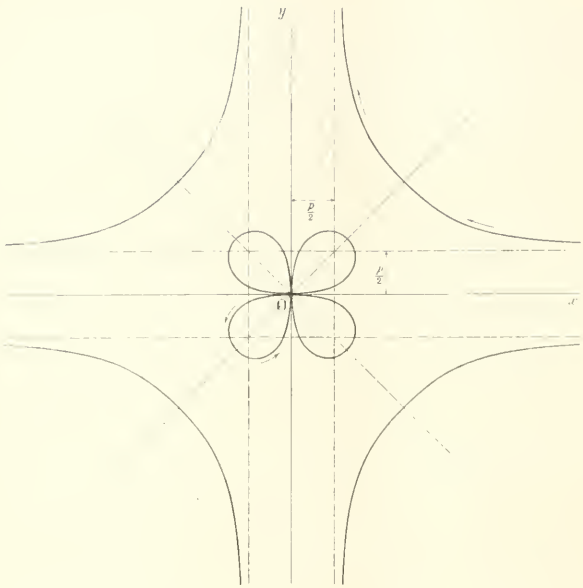
$$\rho^2 - 2b^2 = \pm\frac{p\rho}{2\sin\omega\cos\omega}.$$

La portion de courbe qui correspond au signe — est symétrique par rapport à l'origine de celle qui correspond au signe +; il suffit donc de construire cette dernière. Or l'équation ainsi obtenue,

$$2\rho^2\sin\omega\cos\omega - p\rho - 2b^2\sin\omega\cos\omega = 0,$$

ne change pas si on change ω en $\omega + 2\pi$; il suffit donc, pour avoir cette portion entière, de faire varier ω de α à $\alpha + 2\pi$, α étant un angle quelconque; en outre, si on change ω en $-\omega$, ρ ne fait que changer de signe, cela manifeste une symétrie par rapport à la perpendiculaire à l'axe polaire, et, en tenant compte de cette symétrie, on pourra se borner à faire varier ω de 0 à π; de même le changement de ω en $\pi - \omega$, change ρ en $-\rho$, ce qui manifeste une nouvelle symétrie, par rapport à l'axe polaire cette fois, et ce qui permet de diminuer encore l'intervalle de variations de ω de moitié ; il suffit finalement de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

L'équation du second degré en ρ a toujours deux valeurs réelles et de signes contraires, la plus grande en valeur absolue est positive, elle est supérieure à $\frac{p}{2}$, ainsi qu'on le voit sans peine en



remplaçant ρ par $\frac{p}{2}$; pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, elle est infinie; les deux asymptotes correspondantes sont données par les formules $d = \frac{p}{2}$ et $d = -\frac{p}{2}$, elles ont pour équations, en coordonnées cartésiennes,

$$y = +\frac{p}{2} \text{ et } x = +\frac{p}{2};$$

d'ailleurs l'équation qui donne la première valeur de d est

$$2\delta^2 \cos\omega - p\delta - 2b^2 \sin^2\omega \cos\omega = 0;$$

pour $\omega = 0$, elle a une racine positive, plus grande que $\frac{p}{2}$, et une infiniment petite, et cette remarque donne la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

La dérivée de ρ par rapport à ω est donnée par

$$\rho' = \frac{2(\rho^2 - b^2)(\sin^2\omega - \cos^2\omega)}{2\rho \sin\omega \cos\omega - p};$$

pour la racine positive, elle est négative, depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{4}$, car il est visible sur l'équation qui donne ρ que ρ est toujours plus grand que b; pour la racine négative, ρ' est encore négative, car $\rho > -b$; donc les deux valeurs de ρ décroissent depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{4}$ et croissent ensuite. Rien n'est plus aisé dès lors que de tracer la courbe et de l'achever par symétrie. On peut encore s'aider de ce que les bissectrices des axes sont des axes de symétrie.

(Bonne solution par les coordonnées polaires : M. E. N. Barisien.)
(Solution satisfaisante : M. G. Pouilliart.)

---

510. — *On considère les paraboles* P *qui, rapportées à des axes rectangulaires, ont pour équation générale*

$$(y - \lambda x)^2 - 2p\lambda^3 y = 0,$$

où p *est une quantité donnée et* λ *un paramètre variable.*

1° *Démontrer que par un point quelconque du plan, il passe trois axes des paraboles* P. *Lieu des points* ω *pour lesquels deux de ces axes sont rectangulaires.*

2° *Ce lieu est un cercle* Γ. *A chaque point* ω *de ce cercle correspondent trois paraboles* P *dont les axes passent par* ω. *Les directrices de ces trois paraboles forment un certain triangle* ABC. *Lieu des sommets de ce triangle.*

3° *Lieu des milieux des côtés du triangle* ABC; *lieu de son centre de gravité.*

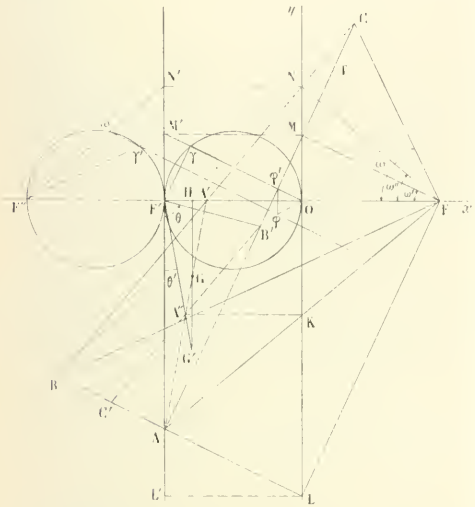
4° *Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* ABC; *enveloppe de ce cercle.*

5° *Lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* ABC; *enveloppe de ce cercle.*

Solution géométrique (*). — L'équation des directrices des paraboles (P), trouvée dans la solution analytique montre que ces droites ont pour enveloppe la parabole $y^2 - 2px = 0$. Il en résulte que les paraboles (P) peuvent être définies géométriquement par les conditions d'avoir leurs directrices tangentes à une parabole fixe (Q) et d'être en outre tangentes à l'axe de la parabole (Q) en son sommet O.

1° — Soit alors F le foyer de la parabole (Q).

La directrice d'une parabole (P) sera la droite MT tangente à (Q). La projection M de F sur MT est comme on sait sur la tangente au sommet Oy de (Q).



La perpendiculaire à la directrice MT de (P) menée par O, point de la parabole (P), la rencontre en φ'. Le foyer de (P) est le symétrique φ de φ' par rapport à la tangente en O qui est Ox.

M′ étant le point où $O\varphi'$ rencontre la directrice F′M′ de (Q), et γ le point où la même droite rencontre le cercle de diamètre OF′, on a : $F'M' = OM$, et les deux triangles rectangles $OM\varphi'$, $M'F'\gamma$ sont égaux; d'où $\gamma M' = O\varphi'$.

On voit en passant que le lieu de φ', et par suite le lieu du foyer φ des paraboles (P) est une cissoïde de Dioclès.

Mais soient F″ et γ' les symétriques de O et de γ par rapport à F′M′.

La droite $\varphi\gamma'$ est parallèle à OM′, car $\gamma'M'$ est parallèle à $O\varphi$ et lui est égal

$$(\gamma'M' = \gamma M' = O\varphi' = O\varphi);$$

$\varphi\gamma'$ est donc l'axe de la parabole P.

Or γ' est sur le cercle de diamètre F′F″ et comme $\varphi\gamma'$, F″γ' sont également inclinés sur Ox, on a : arc F″ω = 2 arc F′γ'.

On sait que dans ces conditions l'enveloppe de $\varphi\gamma'$ est l'hypocycloïde à trois rebroussements ayant pour cercle tritangent le cercle F′F″ et l'un de ses sommets en F″ (voir le n° d'octobre 1895 de la *Revue de Mathématiques spéciales*).

L'hypocycloïde étant de la troisième classe, par un point il passe trois axes de paraboles (P), et le lieu des points ω par lesquels passent deux axes rectangulaires est le cercle tritangent F′F″

2° — Les trois tangentes à l'hypocycloïde menées par ω, c'est-à-dire les trois axes des paraboles (P) sont $\omega\varphi$, la perpendiculaire à cette droite menée par ω, et la droite menée par le même point symétriquement à ωF″ par rapport à une parallèle à Ox. Les trois directrices correspondantes sont la tangente MT à (Q), la tangente LAB perpendiculaire à MT, et la tangente CNB menée par N(ON = F′N).

Le lieu du sommet A, point d'intersection de deux tangentes rectangulaires à (Q) est la directrice F′M′ de (Q).

Quant au lieu des sommets B et C, on obtient facilement son équation polaire en prenant F pour pôle et $\overline{FO}$ pour axe polaire.

Soient : $FC = \rho$, $\widehat{OFC} = \omega$, $\widehat{OFM} = \omega'$, $\widehat{OFN} = \omega''$. Le quadrilatère FMNC étant inscriptible (CF est vu sous un angle droit des points M et N), on a : $\widehat{FCM} = \widehat{FNM}$, et par suite : $\widehat{CFM} = \widehat{NFO} = \omega''$. On a donc :

$$\rho = \frac{FM}{\cos \widehat{MFC}} = \frac{OF}{\cos \widehat{MFC} \,.\, \cos \widehat{OMF}}, \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{p}{2 \cos \omega' \cos \omega''}.$$

Mais d'une part : $\omega = \omega' + \omega''$, d'autre part sur le cercle F′F″, arc F″ω + 2 arc F″γ' = arc F′F″, d'où l'on déduit en prenant les angles inscrits qui ont pour mesure la moitié de ces arcs : $\omega'' + 2\omega' = \frac{\pi}{2}$.

(*) Voir la solution analytique dans le n° d'octobre.

Ces deux équations donnent : $\omega' = \frac{\pi}{2} - \omega$, $\omega'' = 2\omega - \frac{\pi}{2}$, et par suite l'équation polaire du lieu :

$$\rho = \frac{p}{2 \sin \omega \sin 2\omega}.$$

Le lieu du point B est évidemment la même courbe.

3° — Dans le quadrilatère inscriptible FMNC on a : $\widehat{FCN} = \widehat{FMO} = \frac{\pi}{2} - \omega' = \omega$.

Le triangle CFA′ est donc isocèle. De même le triangle BFA′. On a : CA′ = FA′ = BA′, et le milieu A′ du côté BC décrit l'axe des x.

On voit de plus que le triangle BFC est rectangle en F.

Nous allons d'abord résoudre la 4e et la 5e partie qui nous serviront pour trouver ensuite le lieu des points B′, C′ et le lieu du centre de gravité du triangle ABC.

4° — Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre le point A′ dont le lieu est Ox. L'angle BFC étant droit, le cercle passe par le point fixe F, et comme A′F est le rayon, il est tangent en ce point à la parallèle à Oy.

5° — Le cercle des neuf points du triangle a pour centre A″, milieu de AA′, et pour rayon A″A′. Or K étant le point de rencontre de Oy avec AF, A″K est parallèle à Ox et on a :

$$A''K = \frac{A'F}{2} = \frac{AA'}{2} = A'A'' = A''F'.$$

Le lieu du centre A″ est donc la parabole de foyer F′ et de directrice Oy.

Quant au cercle, on voit qu'il passe par le point fixe F′ et qu'il reste tangent à Oy au point variable K (le rayon A″K étant perpendiculaire à Oy).

Lieu des points B′, C′. — On a $\widehat{B'A''K} = \widehat{NA'F} = \frac{\pi}{2} - \omega''$. Sur le cercle des neuf points AF′A′B′, de centre A″ : $\widehat{F'A''B'} = \widehat{2F'AB'} = \widehat{2OFM} = 2\omega'$. Mais on a vu dans la deuxième partie que $\omega'' + 2\omega' = \frac{\pi}{2}$. Donc $\widehat{B'A''K} = \widehat{B'A''F'}$ et B′A″C′ est la bissectrice de l'angle F′A″K, c'est-à-dire la tangente en A″ à la parabole, lieu de A″. De plus A″B′ = A″C′ = A″F′.

Cherchons par exemple l'équation polaire du lieu du point B′, N′F′ étant pris pour axe polaire, et F′ pour pôle. Le paramètre de la parabole, lieu de A″ étant $OF' = \frac{p}{2}$, son équation polaire est

$$F'A'' = r = \frac{p}{2(1 + \sin \theta')}.$$

Mais dans le triangle isocèle F′A″B′ on a $F'B' = \rho = 2F'A'' \cos(\theta - \theta')$, ou $\rho = \frac{p \cos(\theta - \theta')}{1 + \sin \theta'}$. Or $\widehat{F'A''B'} = \frac{1}{2}\widehat{F'A''K}$, ou $\pi - 2(\theta - \theta') = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \theta'\right)$. D'où l'on tire : $\theta' = \frac{4\theta}{3} - \frac{\pi}{2}$, et enfin l'équation du lieu

$$\rho = \frac{p \sin \frac{\theta}{3}}{1 - \cos \frac{4\theta}{3}}.$$

Le lieu de C′ est évidemment la même courbe.

Lieu du centre de gravité G *du triangle* ABC. — Le point G est situé au $\frac{1}{3}$ de A′A à partir de A′. Prenons le symétrique G′ de G par rapport à A″K. Ce point se trouve sur F′A″ et on a $F'G' = \frac{4}{3} F'A''$, puisque A″G′ = A″G et A″F′ = A″A′. Le lieu de G′ est donc une parabole homothétique de la parabole, lieu de A″, le centre d'homothétie étant F′ et le rapport d'homothétie $\frac{4}{3}$. Mais on a : HG′ = 2HG. Il en résulte que le lieu de G est la parabole dont les ordonnées sont moitiés des ordonnées de la parabole, lieu de G′.

VASNIER.

QUESTIONS PROPOSÉES

597. — On considère le cercle (C) décrit sur une corde variable AB d'une parabole (P) comme diamètre et tangent à la parabole (P) en un point M, et on demande de trouver :

1° Le lieu du centre de (C) et l'enveloppe de AB ;

2° Le lieu des points de rencontre des tangentes communes à (C) et à (P) ;
3° Le lieu du point de rencontre de AB et de la tangente en M ;
4° L'enveloppe du cercle (C). VASNIER.

598. — On considère deux axes rectangulaires Ox, Oy et deux points fixes de leur plan $A(\alpha, \beta)$, $A'(\alpha', \beta')$.

1° Démontrer que l'on peut mener trois droites de leur plan Δ_1, Δ_2, Δ_3 jouissant de la propriété commune suivante : en appelant B le point de rencontre de Δ_1 avec Ox, B' le point de rencontre de Δ_1 avec Oy, AB et A'B' sont perpendiculaires à BB'.

2° En supposant A fixe et A' variable, lieu que doit décrire A' pour que deux droites précédentes (Δ_1 et Δ_2) soient confondues. Construire la courbe précédente. Dans la même hypothèse lieu du point de rencontre de Δ_1 et de Δ_3.

3° Revenant au cas où A et A' sont quelconques, former l'équation de la circonférence circonscrite au triangle dont les côtés sont Δ_1, Δ_2, Δ_3. En déduire le tracé de cette circonférence.

4° Enveloppe de cette circonférence lorsque A est fixe et A' mobile sur une circonférence donnée de centre A.
H. BORDEUX.

599. — Sur l'une des bissectrices de l'angle formé par deux droites fixes, on prend un point fixe A, autour duquel on fait tourner une droite ; on considère alors le cercle passant au sommet de l'angle fixe et aux points de rencontre des deux droites avec la sécante mobile.

1° Trouver le lieu du centre de ce cercle ;
2° Trouver l'enveloppe de ce cercle ;
3° Trouver le lieu du centre de similitude de deux cercles infiniment voisins du système.
4° On joint le point A aux deux points qui divisent harmoniquement les extrémités des diamètres de deux cercles infiniment voisins sur la ligne qui unit leurs centres, et on demande le lieu des points de rencontre des bissectrices de l'angle des droites ainsi définies avec la ligne des centres.

Construire les trois premières courbes en supposant les droites fixes rectangulaires. E. H.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1896, 1re session.

Géométrie analytique.

554. — *Soient* S *l'ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, *rapportée à ses axes, et* S *le cercle de centre* $I(\alpha, \beta)$ *et de rayon* R :

1° *Trouver le nombre des points* M *réels ayant même polaire par rapport aux coniques* S *et* S'.

2° *Construire le lieu géométrique* V *des points* M *quand* R *varie, le point* I *restant fixe. Reconnaître et démontrer* a priori, *une propriété remarquable des points communs aux lignes* S *et* V.

3° *Trouver le lieu géométrique* U *des centres* I *des cercles* S' *de rayon* R *donné, quand la droite qui joint deux des quatre points communs à* S *et à* S' *est perpendiculaire sur la droite qui joint les deux autres. Discuter suivant les valeurs de* R.

4° *Deux cordes (d'un même couple) communes aux coniques* S *et* S' *étant rectangulaires et le rayon* R *étant variable, on assujettit le centre* I *à parcourir* S; *construire le lieu* W *de l'intersection* P *de ces deux cordes; indiquer la correspondance graphique des points* I *et* P.

5° *Suivant les positions occupées sur* S *par le centre* I *de* S', *discuter le nombre des points réels communs à* S *et à* S' *lorsque deux cordes d'un même couple sont rectangulaires.*

1. — La polaire d'un point $M(x_0, y_0)$ par rapport à l'ellipse S

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

a pour équation

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0.$$

De même sa polaire par rapport au cercle S'

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0,$$

a pour équation

$$x(x_0-\alpha)+y(y_0-\beta)-[\alpha(x_0-\alpha)+\beta(y_0-\beta)+R^2]=0.$$

Pour que ces deux droites soient confondues, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1)\qquad \frac{x_0-\alpha}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y_0-\beta}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{\alpha(x_0-\alpha)+\beta(y_0-\beta)+R^2}{1}.$$

Désignant par λ la valeur commune de ces rapports, on obtient trois équations entre x_0, y_0, λ :

$$x_0-\alpha=\lambda\frac{x_0}{a^2},$$

$$y_0-\beta=\lambda\frac{y_0}{b^2},$$

$$\alpha(x_0-\alpha)+\beta(y_0-\beta)+R^2=\lambda.$$

On déduit des deux premières

$$x_0=\frac{a^2\alpha}{a^2-\lambda},\qquad y_0=\frac{b^2\beta}{b^2-\lambda};$$

par suite,

$$x_0-\alpha=\frac{\lambda\alpha}{a^2-\lambda},\qquad y_0-\beta=\frac{\lambda\beta}{b^2-\lambda}.$$

Portant dans la troisième, on obtient pour déterminer λ, l'équation

$$(2)\qquad \frac{\alpha^2}{a^2-\lambda}+\frac{\beta^2}{b^2-\lambda}+\frac{R^2}{\lambda}-1=0.$$

Cette équation est du troisième degré : elle admet une ou trois racines réelles. Or, à tout point réel M correspond une valeur réelle de λ et inversement. Il existe donc un ou trois points réels répondant à la question.

2. — Pour obtenir l'équation du lieu V des points M quand R varie, il suffit d'éliminer R entre les deux équations (1). Pour cela, supprimons le troisième rapport, et remplaçons x_0, y_0 par des coordonnées courantes, nous aurons le lieu

$$\frac{x-\alpha}{\frac{x}{a^2}}=\frac{y-\beta}{\frac{y}{b^2}}.$$

C'est l'équation de l'hyperbole équilatère qui passe par les pieds des normales menées du point I (α, β) à l'ellipse. Les points de rencontre du lieu V avec l'ellipse S sont précisément les pieds de ces normales. Cela résulte de ce que le point M venant sur l'ellipse, sa polaire devient la tangente en M à l'ellipse. D'autre part, cette droite étant aussi la polaire du point M par rapport au cercle S', elle est tangente en M à ce cercle. Donc en tout point M commun aux lignes S et V, l'ellipse S et le cercle S' sont tangents; la normale à l'ellipse se confond avec le rayon du cercle qui aboutit au point M, c'est-à-dire avec le rayon IM.

3. — Pour exprimer que l'un des systèmes de sécantes communes à S et S' se réduit à deux droites rectangulaires, il suffira d'écrire que l'hyperbole équilatère qui passe par les quatre points communs à S et S' se réduit à un système de deux droites.

L'équation de cette hyperbole équilatère est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda\,(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0,$$

λ étant déterminé par la condition

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2\lambda=0;$$

on a donc

$$\lambda=-\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2},$$

et, par suite, l'équation cherchée

$$2a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-(a^2+b^2)(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2)=0,$$

ou, en développant,

$$(3)\qquad (a^2-b^2)(x^2-y^2)-2(a^2+b^2)(\alpha x+\beta y)+(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2-R^2)+2a^2b^2=0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette équation représente un système de deux droites, est que l'on ait $\Delta=0$, ou encore que les trois équations

$$f'_x=0\qquad f'_y=0,\qquad f'_z=0,$$

soient compatibles. On pourra exprimer cette condition, en écrivant que les coordonnées du centre P ($f'_x=0$, $f'_y=0$) vérifient l'équation $f'_z=0$:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}f'_x=(a^2-b^2)x-(a^2+b^2)\alpha=0,\\&\frac{1}{2}f'_y=-(a^2-b^2)y-(a^2+b^2)\beta=0,\\&\frac{1}{2}f'_z=-(a^2+b^2)(\alpha x+\beta y)+(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2-R^2)+2a^2b^2=0.\end{aligned}\right.$$

Des deux premières équations, on déduit les coordonnées du point P

$$(V)\qquad x=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,\alpha,\qquad y=-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,\beta,$$

portant dans la troisième, il vient

$$-\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2-b^2}(\alpha^2-\beta^2)+(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2-R^2)+2a^2b^2=0,$$

c'est-à-dire,

$$(V')\qquad (a^2-b^2)(\alpha^2+\beta^2-R^2)-(a^2+b^2)(\alpha^2-\beta^2)+2a^2b^2\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=0,$$

ou enfin

$$2b^2\alpha^2-2a^2\beta^2-(a^2-b^2)\cdot\left[\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}-R^2\right]=0.$$

C'est l'équation du lieu U du centre I(α, β) du cercle S'. Elle représente une hyperbole rapportée à ses axes, homothétique à l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Pour $\qquad R^2<\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$, l'axe transverse est sur Ox;

pour $\qquad R^2=\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$, l'hyperbole est réduite à deux droites;

pour $\qquad R^2>\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$, l'axe transverse est sur Oy.

4. — Soient x, y les coordonnées du point P; elles sont liées à α, β et R par les trois équations (4). Si l'on suppose que le point I décrive l'ellipse S, α et β sont liés par la relation

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{5}$$

On obtiendra le lieu du point P en éliminant α, β, R entre les trois équations (4) et l'équation (5).

L'élimination de R se fait d'elle-même ; il suffit de supprimer la dernière des équations (4). On tire des deux autres

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x, \qquad \beta = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y.$$

Portant dans l'équation (5), il vient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2} = 0;$$

c'est l'équation du lieu W du point P. Ce lieu est une ellipse homothétique à l'ellipse S, le rapport d'homothétie étant $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.

Le point P peut d'ailleurs se déduire facilement du point I; les formules (4') montrent que $P(x, y)$ est symétrique par rapport à Ox, du point I' homothétique de I, par rapport à l'origine, le rapport d'homothétie étant $\frac{OI'}{OI} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.

On peut construire géométriquement les longueurs des demi-axes, a' et b' de cette ellipse. On a

$$a' = a \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \qquad b' = b \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

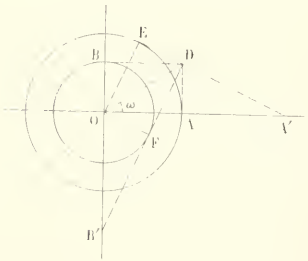
Si on pose

$$a = d \cos \omega, \qquad b = d \sin \omega,$$

on aura

$$a' = \frac{a}{\cos 2\omega}, \qquad b' = \frac{b}{\cos 2\omega}.$$

On en déduit la construction ci-dessous.



5. — Pour étudier la nature des points d'intersection du cercle S' avec l'ellipse S, formons les équations des deux sécantes communes rectangulaires. L'ensemble de ces deux droites est représenté par l'équation (3), après qu'on y a remplacé R^2 par sa valeur tirée de l'équation (4''). Les directions de ces deux droites sont données par l'équation aux directions des asymptotes

$$x^2 - y^2 = 0;$$

chacune d'elles peut être considérée comme le diamètre des cordes parallèles à sa propre direction. Les équations de ces deux droites sont donc

$$f'_x \pm f'_y = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(a^2 - b^2)(x - y) - (a^2 + b^2)(\alpha + \beta) = 0,$$
$$(a^2 - b^2)(x + y) - (a^2 + b^2)(\alpha - \beta) = 0.$$

Les points communs à S et à S' sont les points de rencontre de ces deux droites avec l'ellipse S. Les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse étant de la forme

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi,$$

on aura, pour déterminer ces points, les deux équations

$$a \cos \varphi - b \sin \varphi = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} (\alpha + \beta),$$

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} (\alpha - \beta),$$

équations de la forme

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

Chacune de ces équations admet deux solutions qui sont réelles pourvu que

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

Les conditions de réalité sont donc

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2} (\alpha \pm \beta)^2 \leqslant a^2 + b^2$$

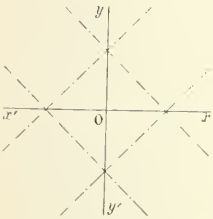
ou

$$(\alpha \pm \beta)^2 \leqslant \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

La séparation du plan en régions est faite par les droites

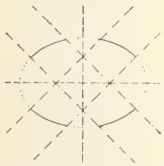
$$\alpha \pm \beta = \pm \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

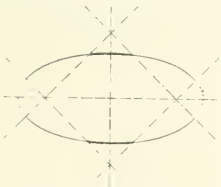
qui forment un carré ayant les axes de coordonnées pour diagonales.



Si le point I est à l'intérieur de ce carré, les quatre points d'intersection sont réels; s'il est situé extérieurement au carré dans l'une des bandes déterminées par les prolongements de deux côtés opposés, deux des points d'intersection sont réels, les deux autres imaginaires; enfin, s'il est situé dans l'un des quatre angles opposés par le sommet aux angles du carré, les quatre points d'intersection sont imaginaires.

Supposons maintenant que le point I décrive l'ellipse S. Suivant que $\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2} \lesseqgtr b^2$, c'est-à-dire $a^2 \lesseqgtr 3b^2$, la figure peut présenter l'une ou l'autre des deux dispositions ci-dessous :





1° $a < b\sqrt{3}$; il y a 0 ou 2 points réels : 0 quand le point I se trouve sur l'un des arcs tracés en pointillé, 2 quand le point I se trouve sur l'un des arcs tracés en trait plein.

2° $a > b\sqrt{3}$; il y a 0, 2 ou 4 points réels. On a marqué en trait plus gros les deux arcs sur lesquels doit se trouver le point I pour qu'il y ait 4 points réels.

Bonne solution : M. A. Courriol, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE NAVALE

532. — *On donne un cercle ayant pour centre l'origine et un point A sur Ox. Par les points O et A, on fait passer un second cercle auquel on mène la tangente en A. Lieu du point de rencontre de cette tangente avec l'axe radical des deux cercles.*

Soient a l'abscisse du point A et r le rayon du cercle donné. Ce cercle a pour équation $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Le cercle mobile a pour équation $x^2 + y^2 - ax - \lambda y = 0$, λ étant un paramètre variable.

L'axe radical des deux cercles est la droite $ax+\lambda y-r^2=0$; la tangente en A a pour équation $af'_x+f'_z=0$, ou

$$a(2x-a)-ax-\lambda y=0.$$

Le lieu s'obtient en remplaçant dans cette dernière équation $ax+\lambda y$ par r^2 ; c'est la droite $x=\frac{a^2+r^2}{2a}$, c'est-à-dire l'axe radical du cercle donné et du cercle de rayon nul ayant pour centre le point A.

Ce fait est évident géométriquement, d'après cette propriété que les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux sont concourants.

F. PÉGORIER, à Toulouse.

Bonnes solutions : MM. J. Badard, élève à l'école des Mines de Saint-Etienne ; Malplat, pensionnat de Valbenoite ; E. Sigis, à Lunéville.

533. — *Lieu des centres des hyperboles équilatères tangentes à l'origine à Ox et dont l'axe transverse a pour longueur 2a.*

Une hyperbole équilatère tangente à l'origine à l'axe des x a évidemment pour équation

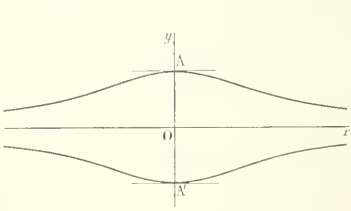
$$x^2+2\lambda xy-y^2-2\mu y=0.$$

L'équation réduite de cette conique est

$$SX^2+S'Y^2+\frac{\mu^2}{1+\lambda^2}=0,$$

S et S' étant les deux racines de l'équation en S, ici $S^2-\lambda^2-1=0$. D'autre part, en appelant a le demi-axe transverse, on a Sa^2 ou $S'a^2=-\frac{\mu^2}{1+\lambda^2}$, et, par suite, entre λ et μ il y a la relation

$$a^4(\lambda^2+1)^3-\mu^4=0.$$



Nous aurons le lieu du centre en éliminant λ et μ entre cette relation et les deux équations du centre ; cette élimination est immédiate et nous donne pour équation du lieu

$$y^2(x^2+y^2)-a^4=0.$$

C'est une quartique symétrique par rapport aux deux axes et aisée à construire.

En appliquant le second théorème d'Apollonius, on a immédiatement l'équation du lieu en coordonnées polaires : $\rho^2\sin^2\omega=a^2$.

Bonnes solutions : MM. J. Badard ; F. Pégorier, à Toulouse ; E. Davaux (lycée de Dijon).

534. — *Lieu des sommets des hyperboles équilatères qui ont pour centre l'origine et qui passent par un point A de Ox.*

Appelons a l'abscisse OA. L'équation de l'une quelconque des hyperboles équilatères satisfaisant aux conditions de l'énoncé est

$$x^2+2\lambda xy-y^2-a^2=0,$$

λ étant un paramètre variable.

En un sommet M, la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur OM ; on a donc la relation $\frac{y}{x}\cdot\frac{-f'_x}{f'_y}=-1$, ou $yf'_x-xf'_y=0$ qui, dans le cas actuel, fournit l'équation

$$\lambda(y^2-x^2)+2xy=0.$$

Nous aurons le lieu des sommets en éliminant λ entre ces deux équations ; nous trouvons ainsi l'équation

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0,$$

qui représente une lemniscate de Bernoulli.

E. DAVAUX (lycée de Dijon).

Bonne solution : M. J. Badard ; L.-J. Goujon, École des Mines, à Saint-Étienne.

535. — *Les parallèles aux asymptotes menées par deux points A et B d'une hyperbole se coupent sur le diamètre conjugué des cordes parallèles à AB.*

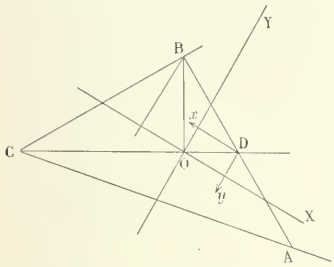
Cette propriété résulte immédiatement du théorème de Thalès sur les lignes proportionnelles et de ce fait que les deux segments interceptés sur une même droite par une hyperbole et par ses asymptotes ont le même milieu. Elle sert à la construction d'une hyperbole donnée par trois de ses points et par ses directions asymptotiques, et dans beaucoup de questions analogues.

E. DAVAUX (lycée de Dijon).

Bonnes solutions : MM. J. Badard ; Malplat ; L.-J. Goujon, École des Mines, à Saint-Étienne.

536. — *Construire une hyperbole équilatère connaissant deux tangentes et les points de contact.*

Soient CA et CB les deux tangentes données, A et B leurs points de contact avec l'hyperbole. Les propriétés les plus connues de l'hyperbole équilatère conduisent aux résultats suivants.



La droite CD, qui joint le point C au milieu de AB, est le diamètre conjugué de la direction AB ; dès lors, les deux bissectrices de l'angle CDA, Dx et Dy, sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole ; si par le point B on mène une parallèle à la droite Dy et une droite BO faisant avec elle le même angle que BC, BO est un second diamètre, son point de rencontre avec CD, le point O, est le centre et les deux parallèles menées par ce point aux directions Dx et Dy, les droites OX et OY, sont les deux asymptotes de l'hyperbole.

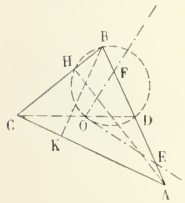
A ce moment on est ramené à construire une hyperbole connaissant ses asymptotes et un point, problème très connu.

Voici une autre solution également simple.

Un premier lieu du centre est le diamètre CD, conjugué des cordes parallèles à AB. Un second lieu est le cercle des neuf points relatif au triangle ABB′ qui a deux sommets confondus en B sur la droite CB. Ce cercle est déterminé par les trois points B, D, H ; son second point de rencontre avec CD est le centre O de l'hyperbole. Pour construire les asymptotes, il suffit de porter sur AB

$$DE = DF = DO,$$

et de joindre le point O aux deux points E et F.



On est encore ramené à construire une hyperbole connaissant les asymptotes et un point.

Remarque. — On pourrait encore déterminer le centre par l'intersection des deux cercles ADK, BDH. — La droite CD n'est pas autre chose que l'axe radical de ces deux cercles ; pour le prouver, il suffit de montrer que le point C a même puissance par rapport à ces deux cercles, c'est-à-dire que l'on a

$$CA.CK = CB.CH.$$

Cela résulte de ce que les points H et K sont sur le cercle décrit sur AB comme diamètre.

Bonnes solutions : M. J. Badard ; L.-J. Goujon (École des Mines, à Saint-Étienne).

537. — *On donne deux points A, A′, sur l'axe des x, à égale distance de l'origine et un point B sur l'axe des y. Équation d'une parabole passant par les points A et A′ et tangente à la parallèle à l'axe des x menée par le point B. Lieu du point de rencontre : 1° des tangentes ; 2° des normales à la parabole en A et A′.*

Soient $OA = -OA' = a$ et b l'ordonnée du point B. La parallèle à Ox menée par ce point a pour équation $y - b = 0$. Le diamètre conjugué de cette direction passe au point O ; soit $y - \lambda x = 0$ son équation. L'équation de la parabole cherchée est alors

$$(y - \lambda x)^2 - 2\mu(y - b) = 0,$$

avec la relation $\lambda^2 a^2 + 2\mu b = 0$, qui exprime que la parabole passe aux deux points A et A'. Donc l'équation générale de la parabole indiquée est

$$(y - \lambda x)^2 + \frac{\lambda^2 a^2}{b}(y - b) = 0.$$

La tangente en A a pour équation $af'_x + f'_z = 0$; la tangente en A' a pour équation $-af'_x + f'_z = 0$. En ajoutant ces deux équations on obtient une combinaison $2f'_z = 0$, d'où λ s'élimine, et qui, par suite, représente le lieu du point de rencontre des tangentes. Ce lieu a pour équation $y - 2b = 0$.

D'après les propriétés les plus simples de la polaire et du diamètre conjugué d'une direction de cordes, il est évident que ce lieu est l'homothétique par rapport au point O et dans le rapport 2 de la tangente à la parabole, $y = b$. Ce premier lieu s'aperçoit donc immédiatement.

Les normales en A et A' ont pour équations

$$\frac{x - a}{f'_x(a, 0)} = \frac{y}{f'_y(a, 0)}, \qquad \frac{x + a}{f'_x(-a, 0)} = \frac{y}{f'_y(-a, 0)},$$

ou

$$\frac{x - a}{2\lambda^2 a} = \frac{y}{-2\lambda a + \frac{\lambda^2 a^2}{b}}, \qquad \frac{x + a}{-2\lambda^2 a} = \frac{y}{2\lambda a + \frac{\lambda^2 a^2}{b}},$$

En simplifiant ces équations, puis éliminant entre elles λ, calcul qui n'offre aucune difficulté, on obtient l'équation du second lieu, $x^2 = 2by + a^2$.

Ce lieu est une parabole symétrique par rapport à Oy, passant en A et A', et ayant pour paramètre b.

Bonnes solutions : MM. J. Badard ; F. Pégomier, à Toulouse ; E. Davaux (lycée de Dijon) ; Malplat ; E. Sigis, à Lunéville.

538. — *On considère un angle de grandeur constante ayant son sommet en un point d'une parabole donnée. Lieu du point de rencontre des tangentes à la courbe en ses points d'intersection avec les deux côtés de l'angle.*

Prenons pour axe des y la tangente à la parabole au point fixe considéré, pour axe des x la normale ; l'équation de la parabole donnée aura pour forme

$$(y - mx)^2 + 2ax = 0,$$

a et m étant certaines constantes. Soit, d'autre part, $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite qui joint les deux points de rencontre de la parabole avec les côtés de l'angle ; l'équation quadratique des deux côtés de l'angle s'obtient en formant une combinaison homogène des deux équations ; elle est donc

$$w(y - mx)^2 - 2ax(ux + vy) = 0;$$

développée, elle s'écrit

$$wy^2 - 2(wm + av)xy + (wm^2 - 2au)x^2 = 0.$$

Si nous désignons par μ et μ' les coefficients angulaires de ces deux droites, par α une certaine constante, nous avons

$$\frac{\mu - \mu'}{1 + \mu\mu'} = \alpha,$$

ou

$$(\mu + \mu')^2 - 4\mu\mu' = \alpha^2(1 + \mu\mu')^2;$$

or

$$\mu + \mu' = \frac{2(wm + av)}{w}, \qquad \mu\mu' = \frac{wm^2 - 2au}{w};$$

Donc la relation qui existe entre u, v, w est

$$(wm + av)^2 - w(wm^2 - 2au) = \frac{\alpha^2}{4}(w + wm^2 - 2au)^2.$$

D'autre part, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du pôle de la droite (u, v, w), l'équation de cette droite s'écrit

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0,$$

ou

$$X[-m(y-mx)+a] + Y(y-mx) + ax = 0,$$

et l'on aura le lieu du pôle en remplaçant dans la relation trouvée u, v, w par $-m(y-mx)+a$, $y-mx$, ax.

On trouve ainsi $$(y-mx)^2 + 2ax = \frac{\alpha^2}{4}[(1-m^2)x + 2my - 2a]^2;$$

c'est l'équation d'une conique, tangente à la parabole en ses deux points de rencontre avec la droite

$$(1-m^2)x + 2my - 2a = 0.$$

Pour $\alpha = 0$ le lieu se réduit à la parabole donnée; pour $\alpha = \infty$, il se réduit à la corde des contacts. Dans ce dernier cas, l'angle considéré est un angle droit. La droite qui joint les deux points d'intersection de la parabole avec les deux côtés de cet angle passe par un point fixe (th. de Frégier) et le point de rencontre des tangentes à la courbe décrit la polaire de ce point.

Remarque. — En prenant pour axe des y la tangente à la parabole au point considéré et pour axe des x le diamètre qui passe par ce point, on est conduit à des calculs plus simples. L'équation de la parabole est de la forme

$$y^2 - 2px = 0.$$

L'équation quadratique des deux côtés de l'angle est

$$2px(ux+vy) + wy^2 = 0,$$

d'où on déduit (en posant $\alpha = \operatorname{tg} V$)

$$\alpha = \pm \frac{2\sqrt{p^2v^2 - 2puw}}{2pu - 2pv\cos\theta + w}.$$

D'autre part soient x, y, z les coordonnées du pôle de la droite (u, v, w) ; l'équation de cette droite s'écrit

$$-pX + yY - px = 0;$$

on obtiendra l'équation du lieu du pôle en remplaçant dans la relation trouvée u, v, w respectivement par $-p, y$ et $-px$. On obtient ainsi

$$\alpha = \pm \frac{2\sqrt{y^2 - 2px}}{x + 2y\cos\theta + 2p},$$

c'est-à-dire

$$y^2 - 2px = \frac{\alpha^2}{4}(x + 2y\cos\theta + 2p)^2.$$

On en déduit très facilement les résultats signalés plus haut.

539. — *On donne la parabole* $y^2 - 2px = 0$ *et un point* P. *Lieu du point de rencontre des normales à la parabole en ses points de rencontre avec la polaire du point* P, *lorsque le paramètre* p *varie.*

Soient a, b les coordonnées du point P, et α, β celles d'un point quelconque M du lieu.

Nous allons écrire que la polaire du point P par rapport à la parabole

$$by - p(x+a) = 0$$

est une corde commune à la parabole $y^2 - 2px = 0$ et à l'hyperbole d'Apollonius relative au point M, $xy + (p-\alpha)y - p\beta = 0$.

Les équations aux ordonnées des points de rencontre de la polaire et de ces courbes sont respectivement

$$y^2 - 2by + 2pa = 0,$$
$$by^2 + p(p-\alpha-a)y - p^2\beta = 0;$$

pour que ces équations aient mêmes racines il faut qu'on ait

$$\frac{b}{1} = \frac{p(p-\alpha-a)}{-2b} = \frac{-p\beta}{2a}.$$

On aura l'équation du lieu en éliminant p entre ces deux équations; on trouve ainsi sans difficulté

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + a^2\beta + 2a^2b = 0,$$

ou

$$axy + by^2 + a^2y + 2a^2b = 0.$$

Le lieu est une hyperbole qui a pour asymptotes Ox et la perpendiculaire à OP menée par le point $(-a, 0)$.

Bonne solution : M. J. Badard.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1895) (*Suite*)

Géométrie descriptive (*Suite*)

411. — Mener parallèlement à un plan une droite de longueur donnée s'appuyant sur deux droites données.

412. — On donne un plan défini par son échelle de pente. Un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée par sa projection graduée a pour directrice une courbe de ce plan dont la projection est un cercle donné. Intersection de ce cylindre avec une droite quelconque donnée par sa projection graduée.

413. — On donne un plan par son échelle de pente et dans ce plan un cercle par son centre et son rayon. Ce cercle est la directrice d'un cylindre dont les génératrices font un angle de 45° avec le plan horizontal et ont leurs projections parallèles à une direction donnée. Intersection de ce cylindre avec une droite anti-parallèle aux génératrices.

414. — Un cône de sommet donné a pour base dans un plan passant par la ligne de terre un cercle dont on donne le centre et le rayon. Mener à ce cône les plans tangents perpendiculaires au plan de base.

415. — Normale commune à deux cylindres dont les directrices sont deux courbes données, l'une dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical, et dont les génératrices sont parallèles à deux droites données.

416. — Normale commune à deux cônes de révolution ayant respectivement pour axes une droite de bout et une droite de front.

417. — Contours apparents d'un cône de sommet donné, ayant pour directrice un cercle situé dans un plan donné et déterminé par son centre et son rayon : 1° le plan est donné par ses traces ; 2° par son échelle de pente. Même problème en supposant que le plan du cercle : 1° contient la ligne de terre ; 2° lui est parallèle.

418. — Un tétraèdre régulier SABC a sa base dans le plan horizontal. — Déterminer le contour apparent horizontal :
1° d'un cylindre dont la base est le cercle inscrit dans le triangle ABC et dont les génératrices sont parallèles à SA ;
2° d'un cône dont la base est le cercle circonscrit au triangle SBC et dont le sommet est le point A ;
3° d'un cylindre dont la base est le cercle circonscrit au triangle SBC et dont les arêtes sont parallèles à SA.

419. — Intersection du plan bissecteur du premier dièdre avec un cône dont la base est un cercle du plan vertical, tangent à la ligne de terre, le sommet étant : 1° un point quelconque du plan horizontal ; 2° un point pris sur la ligne de bout qui passe par le point de contact du cercle et de la ligne de terre.

420. — Un tétraèdre régulier SABC a sa base dans le plan horizontal. — Construire l'intersection du plan bissecteur du dièdre BC avec un cylindre ayant pour base le cercle inscrit dans le triangle SBC et dont les arêtes sont parallèles à SA. — Même problème avec un tétraèdre quelconque dont on donne la base dans le plan horizontal et le sommet par sa projection et sa cote.

421. — Intersection d'un plan donné par son échelle de pente avec un cône ou un cylindre dont la directrice est une courbe située dans un autre plan donné également par son échelle de pente et dont la projection horizontale est un cercle donné.

422. — Mener à une section plane d'un cône les tangentes parallèles à une direction donnée du plan sécant. — Déterminer les tangentes de profil en supposant que le cône a sa directrice dans le plan vertical et son sommet dans le plan horizontal.

423. — Mener par un point un plan coupant un cône donné suivant une hyperbole ayant une asymptote parallèle à une génératrice donnée du cône et telle que l'angle des asymptotes ait une valeur donnée.

424. — On coupe par un plan de bout un cône de révolution à axe vertical dont le sommet est supposé situé dans le plan horizontal. — Déterminer l'ombre portée sur le plan horizontal par le tronc de cône ainsi obtenu, le point lumineux étant sur l'axe du cône.

425. — Trace horizontale d'un cône ayant pour sommet le point le plus haut d'une sphère et pour directrice une section de la sphère par un plan de bout. — Même question avec un ellipsoïde de révolution à axe vertical. — Déterminer un point et la tangente.

426. — Trace horizontale d'un cône circonscrit à une sphère tangente au plan horizontal. — Tangente en un point. — Nature de la courbe. — Montrer que la projection horizontale du centre de la sphère est un foyer de cette courbe. — Même question pour le cylindre circonscrit à la sphère parallèlement à une direction donnée par sa projection horizontale et l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal.

427. — Intersection de deux cônes dont les bases sont données, l'une dans le plan vertical, l'autre dans le plan horizontal et qui ont leurs sommets le premier dans le plan horizontal, le second dans le plan vertical.

428. — Intersection d'un cône dont la base est dans le plan vertical et le sommet dans le plan horizontal avec un cylindre dont la base est dans le plan hoizontal et dont les génératrices sont de front.

429. — Intersection d'un cylindre dont les génératrices sont de front et dont la directrice située dans un plan de bout se projette horizontalement suivant un cercle avec un autre cylindre dont les génératrices sont horizontales et dont la directrice située dans un plan vertical se projette verticalement suivant un cercle.

430. — Un tétraèdre régulier SABC a sa base dans le plan horizontal. — Intersection du cône qui a pour base le cercle inscrit dans le triangle ABC et pour sommet S avec le cylindre dont la base est le cercle circonscrit au triangle SBC et qui a ses génératrices parallèles à SA.

431. — Intersection d'un cône ayant sa base dans le plan horizontal avec un cylindre ayant également sa base dans le plan horizontal et dont les génératrices sont parallèles à une génératrice donnée du cône.

432. — Intersection d'un cône et d'un cylindre ayant pour bases dans le plan horizontal deux cercles tangents au même point A à la ligne de terre, — la génératrice du cylindre qui passe par le point A étant une droite donnée dans le plan vertical et le sommet du cône un point de cette génératrice.

433. — Intersection de deux cônes ayant pour directrice commune une ellipse donnée dans le plan horizontal.

434. — Intersection de deux cylindres ayant pour directrice commune une hyperbole dans le plan horizontal. Les génératrices des deux cylindres ont leurs projections horizontales parallèles et font le même angle α avec le plan horizontal.

435. — On considère un tétraèdre SABC et le cercle inscrit dans la face ABC. — Intersection du cône qui a pour base ce cercle et pour sommet le point S avec un cylindre de même base dont les génératrices sont parallèles à SA.

436. — Intersection de deux cônes circonscrits à une sphère et dont les sommets sont deux points pris sur une même tangente à la sphère, de part et d'autre du point de contact. — Même question en prenant pour sommets deux points quelconques (choisir les plans de projection de façon que la droite qui joint les sommets soit une horizontale du plan de front qui passe par le centre de la sphère).

437. — On donne un cône de révolution par son sommet, son axe et son angle au sommet. — Trouver un point du cône et le plan tangent en ce point.

438. — Intersection d'une parallèle à la ligne de terre : 1° avec un cône de révolution dont l'axe est de front ; 2° avec un cylindre de révolution dont l'axe est quelconque.

439. — Intersection d'une horizontale avec un cône circonscrit à une sphère et dont le sommet est pris sur un diamètre de front de la sphère.

440. — Mener par un point (ou parallèlement à une droite) une droite rencontrant une droite donnée et passant à une distance donnée d'un point donné.

441. — Mener par un point (ou parallèlement à une droite) une droite recontrant une droite donnée et faisant un angle donné avec une autre droite donnée (horizontale ou de front).

442. — Mener par un point (ou parallèlement à une droite) une droite passant a une distance δ d'une droite donnée et à une distance r d'un point donné.

443. — Mener parallèlement à une droite donnée, une droite passant à une distance δ de la première et à une distance r d'un point donné.

444. — Mener par un point (ou parallèlement à une droite) une droite passant à des distances données de deux droites données. — Mener par un point une droite passant à des distances données d'une droite de bout et d'une droite verticale. — Mener une droite parallèle à une direction donnée et passant à des distances données d'une horizontale et d'une ligne de front.

445. — Mener par un point une droite faisant un angle α avec une droite donnée et passant à une distance δ d'une autre droite donnée.

446. — Mener un plan parallèle à une droite D connaissant sa distance d à cette droite et sa distance r à un point donné O.

447. — Peut-on mener par un point un plan faisant un angle donné avec un plan donné, parallèle à une droite donnée et qui soit à une distance donnée de cette droite ?

448. — Mener par une droite un plan qui fasse un angle donné avec un plan donné. — Cas particulier d'un plan de bout.

449. — Mener un plan tangent parallèle à une droite de profil à un cône de révolution déterminé par son sommet, son axe qui est horizontal et son angle au sommet.

450. — Mener par un point du plan vertical un plan faisant un angle α avec le plan horizontal et un angle β avec un plan de bout.

451. — On donne un tétraèdre SABC et un cône ayant pour sommet A et pour directrice le cercle inscrit dans la face SBC. Mener à ce cône un plan tangent faisant un angle donné avec le plan de la face ABC.

452. — Mener à un cône droit dont la base est un cercle donné dans le plan bissecteur du premier dièdre et dont on donne la hauteur, un plan tangent faisant avec le plan horizontal un angle α.

453. — Mener par un point un plan tangent à une sphère, qui fasse un angle donné avec une droite donnée.

454. — Mener par un point un plan faisant des angles donnés avec une droite et un plan donnés.

455. — Construire un cylindre de révolution de rayon donné, qui soit tangent à deux plans.

456. — Déterminer un cône de révolution dont on donne : 1° trois génératrices ; 2° deux génératrices et le plan tangent suivant l'une de ces génératrices.

457. — Déterminer un cône de révolution connaissant l'angle au sommet et : 1° deux plans tangents ; 2° un plan tangent et la génératrice de contact ; 3° deux génératrices.

QUESTIONS PROPOSÉES

600 — On donne deux circonférences O et O′, dans lesquelles on mène deux diamètres parallèles AB et A′B′. Trouver l'enveloppe, le lieu du sommet et le lieu du foyer de la parabole inscrite dans le quadrilatère AA′B′B, lorsqu'on fait varier la direction commune des deux diamètres.

P. Puig, professeur au lycée de Bordeaux.

601. — Sur le grand axe d'une ellipse de centre O on prend un point I tel que $OI = \frac{a^2\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2}$, $2a$ et $2b$ désignant les longueurs des axes de l'ellipse. Par le point I on mène une corde variable, AB, dont on prend le pôle, C, par rapport à l'ellipse. Le lieu de l'orthocentre du triangle ABC est une ellipse semblable à l'ellipse donnée et passant par l'un de ses foyers.

A. Poncet, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Étienne.

602. — Trouver l'équation générale des coniques tangentes à une droite D en un point A, à une droite D′ parallèle à D et à une droite Δ perpendiculaire à D et D′.

Trouver pour chacune de ces coniques l'équation de la seconde tangente, Δ′, parallèle à Δ, et l'équation de la corde des contacts avec les droites D et Δ.

On demande ensuite le lieu du point de rencontre de la droite Δ′ avec la corde des contacts, et aussi le lieu du point de contact de la conique variable avec Δ.

On demande en outre le lieu des foyers de cette conique et de construire ce lieu.

E. H.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de géométrie descriptive, par X. ANTOMARI, docteur ès sciences mathématiques, professeur de mathématiques spéciales au lycée Carnot. — Paris, *Nony et Cie*.

L'ouvrage que M. Antomari vient de livrer à l'appréciation du public est destiné à rendre de grands services à l'enseignement de la géométrie descriptive et aux nombreux élèves qui suivent cet enseignement. La parfaite division de l'ouvrage, la clarté des démonstrations, l'enchaînement logique des idées et des questions, la largeur de vue avec laquelle les problèmes sont abordés et traités, même le choix heureux des exercices, sont autant de qualités précieuses qui recommandent ce livre à l'attention de tous ceux qu'intéresse cette belle branche des Mathématiques appliquées, qu'on appelle la Géométrie descriptive.

L'auteur n'a pas voulu seulement exposer avec plus ou moins de bonheur les méthodes propres à cette partie de la science et les applications qu'on peut en faire aux solutions des problèmes graphiques qu'elle est appelée à résoudre; il a tenu surtout à faire de bonne géométrie générale, à étudier en lui-même chaque genre de questions afin de puiser dans l'étude géométrique de chacune d'elles les procédés les plus naturels et les plus simples pour l'exécution des épures.

Une pareille façon de procéder a des avantages trop évidents pour qu'il soit nécessaire d'insister beaucoup sur ce point: elle éclaircit tout ce qu'elle touche, elle habitue le lecteur à la réflexion et à cet examen primordial des problèmes de géométrie qu'aucune indication de méthodes ne remplacera jamais, enfin elle contribue autant à l'éducation de son esprit et à son instruction générale qu'au développement de ses connaissances sur le point particulier qui est plus spécialement visé.

L'ouvrage, dont nous entretenons nos lecteurs, est divisé en quatre livres :

Le premier est consacré à l'exposé méthodique et complet des principes de la géométrie descriptive ; après une introduction très heureuse où la méthode des projections, dans ce qu'elle a de plus général, est parfaitement présentée, l'auteur développe l'étude du point, de la droite et du plan, il présente les méthodes graphiques les plus employées en géométrie descriptive et donne les applications de ces méthodes aux questions de distances, d'angles et à la construction des trièdres; cette première partie se termine par l'examen des problèmes relatifs aux polyèdres et par des notions de géométrie cotée.

Le livre II traite de la détermination des surfaces et des plans tangents ; il passe en revue et successivement la sphère, les cônes et cylindres, les surfaces de révolution et, en particulier, la surface gauche de révolution que les candidats aux écoles ont tant intérêt à connaître.

Le livre III s'occupe des sections planes des surfaces. L'auteur y considère les surfaces dont nous venons de parler et détermine pour chacune d'elles, avec tous les points particuliers qui peuvent s'offrir, une section plane quelconque ; il étudie avec beaucoup de soin tout ce qui se rapporte au développement de la surface latérale d'un cône ou d'un cylindre et à la transformée d'une section plane.

Le livre IV est consacré à l'intersection des surfaces. Tous les problèmes classiques y sont traités d'une façon détaillée et parfaite ; le cas de deux cônes et cylindres, d'une surface de révolution et d'un cône ou cylindre, de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans un même plan. Toutes les solutions sont accompagnées de très belles épures, parfaitement choisies, admirablement exécutées et, à chaque fois, toutes les particularités de l'intersection sont indiquées et déterminées simplement, au moins pour tout lecteur connaissant les principes généraux de la théorie des quadriques. Ce livre, le plus beau à mon avis de l'ouvrage entier, doit ses qualités remarquables d'élégance et de clarté au soin particulier avec lequel l'auteur a étudié dans les chapitres antérieurs les propriétés géométriques des surfaces dont il s'occupe ici. Disons enfin que cette partie de l'ouvrage se termine par un examen approfondi et clairement présenté du cas où les deux surfaces sont des quadriques de révolution.

J'aurai terminé quand j'aurai dit que cet ouvrage contient encore, à titre de compléments, quelques notes sur les surfaces réglées, une collection intéressante d'exercices résolus, tous posés aux examens oraux des grandes écoles et enfin une très belle note de M. V. Hioux sur l'intersection d'une droite avec une quadrique, note qui a déjà été publiée dans la *Revue de Mathématiques spéciales*.

Le peu de place dont je dispose pour les comptes-rendus bibliographiques m'oblige, à mon grand regret, à passer sous silence nombre de solutions et d'exercices intéressants que j'eusse voulu signaler aux lecteurs de la Revue. Cela aura du moins l'avantage de ne pas gâter le plaisir qu'ils auront à lire eux-mêmes l'ouvrage de M. Antomari.

E. H.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

7e Année. N° 4. Janvier 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES

Pour établir le théorème de M. Rouché relatif aux équations linéaires on peut utiliser un théorème bien connu dont la démonstration se trouve d'ailleurs dans les *Leçons d'algèbre* de MM. E. Pruvost et D. Piéron (p. 114).

Voici quel est ce théorème :

1. *Étant données n équations linéaires à n inconnues dont le déterminant des coefficients n'est pas nul*

$$X_1 \equiv a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n + b_1 = 0,$$
$$X_2 \equiv a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n + b_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_n \equiv a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n + b_n = 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \neq 0,$$

ce système admet un ensemble unique de solutions; si on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par leurs valeurs dans le premier membre d'une* $(n+1)^e$ *équation*

$$X_{n+1} \equiv a_{n+1}^1 x_1 + a_{n+1}^2 x_2 + \cdots + a_{n+1}^n x_n + b_{n+1},$$

le résultat de substitution est une fraction dont le dénominateur est Δ *et dont le numérateur est le déterminant*

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n & b_n \\ a_{n+1}^1 & a_{n+1}^2 & \ldots & a_{n+1}^n & b_{n+1} \end{vmatrix}.$$

En effet nous sommes conduit à résoudre le système suivant

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n + b_1 = 0,$$
$$a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n + b_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \cdots + a_n^n x_n + b_n = 0,$$
$$a_{n+1}^1 x_1 + a_{n+1}^2 x_2 + \cdots + a_{n+1}^n x_n - y + b_{n+1} = 0,$$

qui renferme $n+1$ inconnues $x_1, x_2, \ldots x_n$ et y. La valeur de y est le résultat cherché.

Le déterminant des coefficients des inconnues est

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots & a_1^n & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots & a_2^n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots & a_n^n & 0 \\ a_{n+1}^1 & a_{n+1}^2 \ldots & a_{n+1}^n & -1 \end{vmatrix} = -\Delta;$$

il n'est pas nul, par conséquent on peut calculer la valeur de y par la règle de Cramer.

Le dénominateur est $-\Delta$, et le numérateur est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n & -b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n & -b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n & -b_n \\ a_{n+1}^1 & a_{n+1}^2 & \ldots & a_{n+1}^n & -b_{n+1} \end{vmatrix} = -\Delta';$$

par suite la valeur de y est $\frac{\Delta'}{\Delta}$, comme nous l'avions annoncé.

2. Cela posé, considérons un système quelconque de m équations linéaires à n inconnues

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n + b_1 &= 0, \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n + b_2 &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n + b_m &= 0. \end{aligned}$$

Soit

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^p \end{vmatrix}$$

le *déterminant principal* du système, c'est-à-dire un déterminant déduit du tableau

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^1 & a_m^2 & \ldots & a_m^n \end{matrix} \right\| \qquad (\Gamma)$$

et tel que tout déterminant de degré supérieur à p déduit du même tableau soit nul.

Nous pouvons résoudre les p premières équations du système par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p$, en considérant les $n-p$ autres inconnues comme des constantes; portons les valeurs obtenues pour $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dans une quelconque des $m-p$ autres équations, dans la s^e par exemple. D'après le théorème précédent, le premier membre de cette équation devient

$$\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^p & a_1^{p+1} x_{p+1} + a_1^{p+2} x_{p+2} + \cdots + a_1^n x_n + b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^p & a_2^{p+1} x_{p+1} + \cdots\cdots\cdots + a_2^n x_n + b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^p & a_p^{p+1} x_{p+1} + \cdots\cdots\cdots + a_p^n x_n + b_p \\ a_s^1 & a_s^2 & \ldots & a_s^p & a_s^{p+1} x_{p+1} + \cdots\cdots\cdots + a_s^n x_n + b_s \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui est mis en évidence peut se décomposer en une somme de $n-p+1$ déter-

minants. Les $n-p$ premiers sont nuls, car l'un d'eux s'écrit

$$x_{p+h}\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p & a_1^{p+h} \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^p & a_2^{p+h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^1 & a_p^2 & \dots & a_p^p & a_p^{p+h} \\ a_s^1 & a_s^2 & \dots & a_s^p & a_s^{p+h} \end{vmatrix},$$

et le coefficient de x_{p+h} est un déterminant de degré $p+1$ déduit du tableau (T) et qui est nul par hypothèse.

Il ne reste donc que le déterminant

$$\delta_s = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^p & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^1 & a_p^2 & \dots & a_p^p & b_p \\ a_s^1 & a_s^2 & \dots & a_s^p & b_s \end{vmatrix}$$

qu'on appelle un *déterminant caractéristique*.

En résumé si l'on remplace dans le premier membre de la s^e équation $(s > p)$ les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ par leurs valeurs tirées des p premières équations, le résultat de substitution est indépendant des $n-p$ dernières inconnues, il est égal à $\frac{\delta_s}{D}$.

Si δ_s n'est pas nul, la s^e équation ne peut être vérifiée par aucun ensemble de solutions des p premières équations ; le système proposé n'a pas de solution.

Si δ_s est nul, la s^e équation est vérifiée par un ensemble quelconque de solutions des p premières équations ; cette s^e équation peut être supprimée.

On conclut de là immédiatement le théorème de M. Roucé.

3. Le théorème du § **1** peut aussi être utilisé dans de nombreuses questions de géométrie analytique.

Nous en donnerons un seul exemple.

On sait qu'étant donnée l'équation d'une quadrique admettant un centre unique ou une infinité de centres

$$f(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

$\varphi(x, y, z)$ désignant la forme quadratique $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$, si on transporte l'origine des coordonnées au centre (x_0, y_0, z_0) l'équation de la surface est

$$\varphi(x, y, z) + D_1 = 0,$$

en posant

$$D_1 = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + D.$$

Proposons-nous de calculer D_1 en fonction des coefficients de l'équation de la surface.

Il suffit de remplacer dans D_1, x_0, y_0, z_0 par les solutions du système

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax_0 + B''y_0 + B'z_0 + C = 0, \\ B''x_0 + A'y_0 + Bz_0 + C' = 0, \\ B'x_0 + By_0 + A''z_0 + C'' = 0. \end{cases}$$

1° Supposons que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul. Le système (t) admet un ensemble unique de solutions, et en remplaçant x_0, y_0, z_0 par leurs valeurs, on a

$$D_1 = \frac{\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}}.$$

2° Soit $\Delta = 0$ et un mineur du premier ordre différent de zéro, par exemple $AA' - B''^2 = 0$. Pour que la surface ait des centres il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

et dans ce cas la surface admet une infinité de centres en ligne droite, les coordonnées de ces points vérifiant les équations

$$Ax_0 + B''y_0 + B'z_0 + C = 0,$$
$$B''x_0 + A'y_0 + Bz_0 + C' = 0.$$

Tirons de ces deux équations les valeurs de x_0 et y_0 et portons dans l'expression de D_1, nous avons

$$D_1 = \frac{\begin{vmatrix} A & B'' & B'z_0 + C \\ B'' & A' & Bz_0 + C' \\ C & C' & C''z_0 + D \end{vmatrix}}{AA' - B''^2}.$$

Or le numérateur est égal à

$$z_0 \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix};$$

le coefficient de z_0 est nul, par suite

$$D_1 = \frac{\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix}}{AA' - B''^2}.$$

3° Supposons enfin que tous les mineurs de premier ordre de Δ soient nuls, et par exemple $A \neq 0$. Pour que la surface ait des centres il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B'' & C' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & C \\ B' & C'' \end{vmatrix} = 0;$$

si ces conditions sont remplies, la surface admet un plan des centres défini par l'équation

$$Ax_0 + B''y_0 + B'z_0 + C = 0.$$

Tirons de là la valeur de x_0, et en la portant dans D_1 nous avons

$$D_1 = \frac{\begin{vmatrix} A & B''y_0 + B'z_0 + C \\ C & C'y_0 + C''z_0 + D \end{vmatrix}}{A},$$

ou

$$D_1 = \frac{AD - C^2}{A}.$$

G. P.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1896).

Géométrie analytique.

528. — *On donne un cercle* C, *qui a pour équations en coordonnées rectangulaires :*

$$x = a \qquad \text{et} \qquad y^2 + z^2 = a^2.$$

On considère : 1° *le cône* S *qui a pour base ce cercle et pour sommet le point de l'axe* Oz *qui est à la distance* λa *de l'origine ;* 2° *la surface* S_1 *engendrée par des droites parallèles au plan des* xy, *et qui s'appuient sur l'axe* Oz *et sur le cercle donné. On demande :*

I. *De former les équations des surfaces* S *et* S_1 ;

II. *De trouver l'expression du sinus de l'angle des plans tangents aux deux surfaces en un point du cercle qui a pour cote* $z = \mu a$, *et de calculer ce sinus, avec trois décimales seulement pour* $\lambda = \frac{1}{2}$ *et* $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

III. *De déterminer l'intersection des deux surfaces ; d'en construire deux projections pour* $\lambda = \frac{1}{2}$; *d'en suivre les principales transformations quand* λ *varie de* 0 *à l'infini.*

I. — Nous aurons l'équation du cône en considérant une droite qui passe par le point $0, 0, \lambda a$,

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z - \lambda a}{\gamma},$$

et en exprimant que cette droite rencontre le cercle dont les équations sont $x = a$, $y^2 + z^2 - a^2 = 0$. En désignant par ρ la valeur commune des trois rapports qui correspond au point de rencontre, on obtient les deux équations

$$\rho\alpha = a \qquad \text{et} \qquad \beta^2\rho^2 + (\gamma\rho + \lambda a)^2 = a^2 :$$

d'où l'on déduit de suite entre α, β, γ la relation

$$\beta^2 + (\gamma + \lambda\alpha)^2 - \alpha^2 = 0.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer dans cette relation α, β, γ par les quantités proportionnelles, $x, y, z - \lambda a$, pour avoir l'équation du cône

$$(1) \qquad y^2 - x^2 + (z + \lambda x - \lambda a)^2 = 0.$$

Une génératrice quelconque du conoïde a pour équations

$$y - hx = 0, \qquad z - k = 0 ;$$

en exprimant que cette droite rencontre le cercle, on a aisément la relation

$$a^2h^2 + k^2 - a^2 = 0,$$

et il suffit d'éliminer h et k entre cette relation et les deux équations de la droite pour obtenir l'équation du conoïde. On trouve ainsi

$$(2) \qquad z^2x^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0.$$

II. — Le point du cercle donné qui a pour cote $z = \mu a$ a pour coordonnées $x = a$, $y = a\sqrt{1 - \mu^2}$, $z = \mu a$, le radical ayant le signe $+$ ou le signe $-$; d'autre part, les plans tangents aux deux surfaces (1) et (2) en un de leurs points communs (x, y, z) ont pour équations

$$X[\lambda(z + \lambda x - \lambda a^2) - x] + Yy + Z(z + \lambda x - \lambda a) + \ldots = 0,$$
$$X(z^2x - a^2x) + Ya^2y + Zzx^2 + \ldots = 0.$$

Si l'on y remplace x, y, z par les valeurs que nous venons d'indiquer, ces équations deviennent

$$X(\lambda\mu - 1) + Y\sqrt{1-\mu^2} + Z\mu + \cdots = 0,$$

$$X(\mu^2 - 1) + Y\sqrt{1-\mu^2} + Z\mu + \cdots = 0.$$

Par suite, le cosinus de l'angle des deux plans a pour expression

$$\cos V = \frac{|(\lambda\mu - 1)(\mu^2 - 1) + 1|}{\sqrt{(\lambda\mu - 1)^2 + 1}\sqrt{(\mu^2 - 1)^2 + 1}}.$$

La valeur du sinus est alors aisée à calculer : elle est donnée par l'égalité

$$\sin V = \frac{|\lambda\mu - \mu^2|}{\sqrt{(\lambda\mu - 1)^2 + 1}\sqrt{(\mu^2 - 1)^2 + 1}}.$$

Dans ces deux formules les radicaux représentent des radicaux arithmétiques.

Si dans la deuxième expression nous faisons $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$, nous obtenons de suite

$$\sin V = \frac{4(3 - \sqrt{3})}{\sqrt{17(35 - 8\sqrt{3})}},$$

ou

$$\sin V = \sqrt{\frac{16(12 - 6\sqrt{3})}{17(35 - 8\sqrt{3})}}.$$

Multiplions haut et bas, sous le radical, par $35 + 8\sqrt{3}$, nous obtiendrons

$$\sin V = \sqrt{\frac{16 \times 6(2 - \sqrt{3})(35 + 8\sqrt{3})}{17(35^2 - 3 \times 64)}},$$

puis

$$\sin V = \sqrt{\frac{16 \times 6(46 - 19\sqrt{3})}{17 \times 1033}}.$$

Le dénominateur de la quantité soumise au radical étant calculable exactement, il n'y a plus qu'à déterminer l'approximation que l'on doit prendre au numérateur pour obtenir $\sin V$ avec trois décimales exactes.

Or on sait qu'on obtient une limite supérieure de l'erreur relative commise sur une racine carrée en prenant la moitié de celle qui correspond au nombre. D'autre part, l'erreur absolue sur la racine carrée doit être moindre que $\frac{1}{1000}$; par suite, l'erreur relative moindre que $\frac{1}{1000 \sin V}$, et, comme $\sin V$ est plus petit que 1, il suffira de prendre l'erreur relative moindre que $\frac{1}{1000}$. Nous prendrons donc l'erreur relative correspondant à la quantité placée sous le radical moindre que $\frac{2}{1000}$ ou, plus commodément, que $\frac{1}{1000}$; le nombre envisagé étant d'ailleurs supérieur à $\frac{1}{100}$, il suffira de prendre l'erreur absolue plus petite que $\frac{1}{100000}$. Le dénominateur a pour valeur exacte 17561 ; l'erreur à commettre sur le numérateur devra donc être moindre que $\frac{17561}{100000}$ ou, plus commodément, que $\frac{1}{10}$. Calculons alors $\sqrt{3}$; nous aurons $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$; en prenant $\sqrt{3} = 1{,}7321$, nous commettons une erreur par excès moindre que $\frac{5}{100\,000}$ et, par suite, au numérateur, une erreur par défaut moindre que $\frac{5 \times 17 \times 6 \times 19}{100000}$ et *a fortiori* moindre que $\frac{1}{10}$.

Le numérateur, calculé avec la valeur choisie pour $\sqrt{3}$, a pour valeur 1256,6496; le quotient placé sous le radical, 0,071559. Il n'y a plus qu'à extraire la racine carrée de ce nombre pour obtenir la valeur demandée; on trouve ainsi $\sin V = 0{,}267$.

III. — L'intersection totale des deux surfaces (1) et (2) est évidemment du 8me ordre; mais si l'on enlève de cette intersection le cercle donné et les deux génératrices du cône parallèles au plan des xy qui appartiennent aussi au conoïde, il reste une courbe du 4me ordre qui est la véritable courbe à considérer. Eliminons alors $y^2 - x^2$ entre les deux équations (1) et (2); nous aurons

$$z^2x^2 - a^2(z + \lambda x - \lambda a)^2 = 0,$$

équation qui se décompose en deux autres :

$$zx - a(z + \lambda x - \lambda a) = 0$$

et

$$zx + a(z + \lambda x - \lambda a) = 0;$$

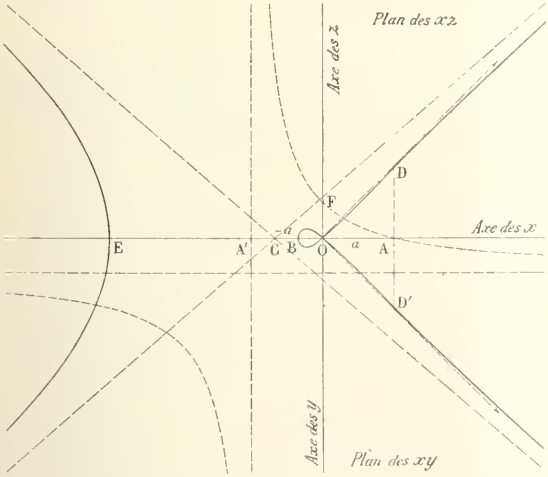
la première se décompose elle-même en deux autres : $x - a = 0$ et $z - \lambda a = 0$, qui sont les projections sur le plan des xz des deux parties à enlever; la seconde représente donc le cylindre qui projette la courbe envisagée sur le plan des xz. Il est évident alors que cette courbe est une biquadratique gauche, intersection du cône (1) avec le cylindre

(3) $$zx + a(z + \lambda x - \lambda a) = 0.$$

Nous aurons une seconde projection de la courbe en éliminant z entre les deux équations; nous obtenons ainsi

(4) $$(y^2 - x^2)(x + a)^2 + \lambda^2 x^2 (x - a)^2 = 0.$$

Il reste maintenant à construire ces deux projections, pour $\lambda = \frac{1}{2}$, et à les réunir en une épure dont l'axe des x soit la ligne de terre.



Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, les deux équations précédentes deviennent

$$2z(x + a) + a(x - a) = 0,$$

$$4(y^2 - x^2)(x + a)^2 + x^2(x - a)^2 = 0.$$

La première représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont $x + a = 0$ et

$$z + \frac{a}{2} = 0;$$

elle est représentée en pointillé sur l'épure.

La seconde représente une quartique symétrique par rapport à Ox, ayant un point double à l'origine et pour tangentes en ce point les deux droites $4y^2 - 3x^2 = 0$. L'ordonnée de cette courbe n'est réelle que pour les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $-3a$ et entre $-\frac{a}{3}$ et $+\infty$. Les directions asymptotiques sont données par $4y^2 - 3x^2 = 0$ et les asymptotes par $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x + \frac{2a}{3}\right)$. Il est facile de vérifier qu'elles ne rencontrent pas la courbe. Les droites $y^2 - x^2 = 0$ séparent le plan en quatre régions, et il n'y a pas de points de la courbe dans les deux régions qui contiennent l'axe

des y; de plus, ces deux droites sont tangentes à la courbe aux points où elles rencontrent la droite $x = a$. Rien n'est plus aisé alors que de tracer la courbe : elle est figurée en traits pleins sur l'épure.

Quand λ varie, les deux courbes se déplacent et se déforment. Les déformations de l'hyperbole sont aisées à suivre ; nous ferons simplement remarquer qu'elle passe toujours au point A $(a, 0)$ et qu'elle admet toujours pour asymptote la droite $x = -a$. Les variations de la quartique sont presque aussi faciles à apercevoir. L'équation de cette courbe pouvant s'écrire

$$y^2 = x^2 \frac{(x+a)^2 - \lambda^2(x-a)^2}{(x+a)^2},$$

ou

$$y^2 = x^2 \frac{(1-\lambda^2)x^2 + 2a(1+\lambda^2)x + (1-\lambda^2)a^2}{(x+a)^2},$$

on voit de suite que la droite $x = -a$ est dans tous les cas une asymptote double que n'approche aucune branche réelle ; d'autre part, tant que λ est moindre que 1, les racines du numérateur sont moindres que 0 et situées de part et d'autre du nombre $-a$, il n'y a pas de points de la courbe qui correspondent aux valeurs de x comprises entre ces racines, et la courbe a une forme analogue à celle que nous avons tracée. Si, au contraire, λ est plus grand que 1, les racines du numérateur sont positives, x doit varier dans l'intervalle qu'elles forment, et la quartique se réduit à un ovale.

Pour $\lambda = 0$, elle se réduit aux droites

$$(y^2 - x^2)(x+a)^2 = 0,$$

et, pour λ infini, aux droites

$$x^2(x-a)^2 = 0.$$

Pour $\lambda = 1$, l'équation de la quartique devient

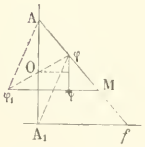
$$y^2 = \frac{4ax^2}{(x+a)^2}.$$

Il n'y a pas de points de la courbe ayant des abscisses négatives ; la courbe est symétrique par rapport à Ox, admet un point de rebroussement à l'origine et deux branches paraboliques parallèles à Ox.

Bonne solution : M. G. de Trégomain (collège Stanislas) ;
Solution satisfaisante : M. Servant.

Remarques géométriques au sujet du problème donné au concours pour l'Ecole Polytechnique en 1896, par M. **L.-D. Bicart**, sous-lieutenant d'artillerie à Bar-le-Duc.

Le cône et le conoïde donnés se coupent, outre le cercle C donné et les génératrices du cône parallèles au plan $z = 0$, suivant une courbe gauche du quatrième ordre, Σ, par laquelle passe un cylindre du second degré, et qu'on peut étudier comme intersection d'un cône et d'un cylindre, mais dont la présente note a pour objet de faire connaître un mode de génération particulier extrêmement simple.



Par l'axe Oz je mène un plan que je prends pour plan de la figure. Ce plan coupe le cercle en 2 points φ, ψ symétriques par rapport au plan $z = 0$. Il contient la génératrice du cône qui passe en φ et la génératrice du conoïde qui passe en ψ. Ces deux droites sont $A\varphi$ et la perpendiculaire ψM à OA ; elles se coupent en un point M de Σ.

La droite φO coupe ψM au symétrique φ_1 de φ par rapport à O. Soit f la trace de $A\varphi$ sur le plan (A_1) parallèle au plan $z = 0$ et passant par le symétrique A_1 de A par rapport à O.

La droite A_1f est perpendiculaire à A_1O.

Les deux segments $\varphi\varphi_1$, AA_1, ayant même milieu, les segments $A\varphi_1$, φA_1, sont égaux et parallèles. Il en résulte l'égalité des triangles $A\varphi_1M$, φA_1f ; donc on a

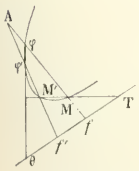
$$AM = \varphi f,$$

ce qui entraîne un mode de construction très rapide.

Tangente au point M.

Soit φ' le point du cercle infiniment voisin de φ, M′ et f' les points correspondants sur Σ et sur (A_1).

Soient T et θ les traces sur ff' de MM′ et $\varphi\varphi'$. Les coniques qui passent par les points φ, φ', M, M′ tracent sur ff' une involution. Deux couples de points homologues sont (T, θ) et (f, f'). Des égalités



$$A\varphi = Mf \qquad A\varphi' = M'f'$$

il résulte que les points $MM'\varphi\varphi'$ sont sur une hyperbole admettant ff' pour asymptote. Un des points doubles de l'involution est donc à l'infini. Donc l'autre est le milieu commun de tous les segments déterminés par deux points homologues.

Donc $$fT = f'\theta,$$

et si M et M′ viennent à se confondre, T et θ seront symétriques par rapport à f.

D'où la construction suivante (*) :

La génératrice $A\varphi M$ du cône rencontre en f le plan (A_1);

La tangente en φ au cercle rencontre en θ le même plan ;

Joindre M au symétrique T de θ par rapport à f.

Il résulte immédiatement de là les conséquences suivantes :

La courbe Σ a un point double en A. Les tangentes en ce point passent aux points de rencontre du cercle et du plan (A_1).

La construction de la tangente appliquée aux points à l'infini montre que les asymptotes de Σ sont celles du lieu de f d'une part, et les symétriques par rapport à A de celles du lieu de φ, d'autre part.

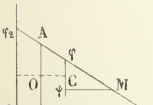
Donc la courbe Σ a pour asymptotes les asymptotes de la section du cône par le plan A_1, et passe aux points cycliques des plans parallèles au plan du cercle. Les tangentes correspondantes sont dans le plan $x + a = 0$ et se coupent au symétrique par rapport à A du centre C du cercle donné.

Projections de la courbe Σ.

Tous les résultats ci-dessus sont projectifs.

Projection sur $y = 0$.

Le plan de la figure étant le plan $y = 0$, et adoptant en projection les mêmes notations que dans l'espace, les points φ, ψ sont sur une droite fixe $x = a$.



Soit φ_2 le symétrique de φ par rapport à A ; φ_2 décrit la droite $x + a = 0$. De l'égalité

$$\varphi_2 A = A\varphi = Mf,$$

il résulte que M décrit une hyperbole qui passe en A, et dont les asymptotes sont $A_1f(z + \lambda a = 0)$ et la droite lieu de $\varphi_2(x + a = 0)$. De plus le lieu passe au point C.

La partie de la courbe située entre les droites $z \pm a = 0$ est seule projection de points réels de Σ.

Projection sur $x = 0$.

La projection sur $x = 0$ passe aux points cycliques : le foyer correspondant est symétrique de O par rapport à A. Les asymptotes du plan (A_1) donnent lieu en projection, à une asymptote double $(z + \lambda a)^2 = 0$.

Les branches correspondantes ne sont réelles que si $\lambda^2 \leqslant 1$.

Les tangentes au point double A passent aux points communs à l'asymptote double et à la projection du cercle.

La courbe est tangente aux tangentes issues de A à la projection du cercle; elle coupe cette projection sur les axes et lui est tangente sur l'axe Oz. Les tangentes aux points situés sur l'axe Oy passent au milieu de OA.

Si $\lambda = 1$ la construction montre immédiatement que notre projection devient une cissoïde.

Projection sur $z = 0$.

Cette courbe se déduit par la construction indiquée de la droite $x = a$ et de la section du cône par le plan (A_1).

Les tangentes au point double sont parallèles aux asymptotes de cette section, lesquels sont asymptotes à la projection en question.

Les branches isotropes de Σ donnent lieu à l'asymptote double $(x + a)^2 = 0$ à branches correspondantes imaginaires.

La section K du cône par le plan (A_1) touche les projections des génératrices de contour apparent du cône, lesquels se projettent suivant les bissectrices des axes, et les deux points de contact sont sur le plan $x = 2a$. Donc notre projection touche les bissectrices des axes sur la droite $x = a$.

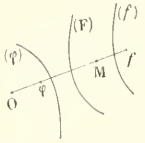
(*) Cette méthode est au fond la même que la méthode des transversales réciproques, due à M. G. de Longchamps.

La construction par points se fait facilement, en remarquant que lorsque λ varie, la conique K reste homologique à un cercle, par rapport au point A_1 et à la droite $x = 2a$.

Il est facile de poursuivre cette étude dans ses moindres détails. Nous nous arrêterons là. Signalons cependant la construction des tangentes doubles à la projection sur $y = 0$: Porter à partir du point A sur la parallèle à Oy la longueur At de la tangente issue de A à la projection du cercle et joindre A_1t: cette droite coupe la projection du cercle en deux points φ_1, φ_2 dont les homologues sur la courbe sont les points de contact de la tangente double.

GÉNÉRALISATION. — Les constructions ci-dessus ne supposent pas que le lieu de φ soit un cercle. Elles s'appliqueraient aussi bien à une suite de points deux à deux symétriques par rapport au plan $z = 0$, et par suite à une courbe quelconque, plane ou gauche, symétrique par rapport au plan $z = 0$ (au moins pour la partie de l'intersection obtenue par couples de deux points symétriques φ, ψ).

NOTE. — Ce que nous avons dit permet d'étudier la question suivante :



Soit un pôle O et deux surfaces (f), (φ).

Un rayon polaire coupe (f) en f et (φ) en φ. On détermine sur ce rayon un point M tel que

$$\overline{OM} = \overline{Of} - \overline{O\varphi};$$

Etudier le lieu (F) du point M.

Une simple généralisation des raisonnements ci-dessus montre que : Le pôle O est point singulier. Le cône des tangentes a pour directrice l'intersection des surfaces (f), (φ).

Le plan tangent en M à (F) contient la droite symétrique par rapport à f de l'intersection des plans tangents en f, φ à (f) et (φ).

Les plans asymptotes de (F) sont : les plans asymptotes de (f) d'une part, et de l'autre, les symétriques par rapport au pôle des plans asymptotes de (φ).

Résultats analogues si, au lieu de surfaces, on considère deux courbes tracées sur un cône de sommet O, en particulier deux courbes planes dans un plan passant par O.

Citons un cas particulier : si la surface (φ) est une sphère de centre O, la surface F devient une conchoïde de (f), d'où un moyen de construire les tangentes aux conchoïdes

Si on substitue à la surface φ sa symétrique φ_1 par rapport à O, la transformation définie par

$$r = r_f - r_\varphi$$

deviendra

$$r = r_f + r_{\varphi_1}$$

On peut remplacer les surfaces f et φ par des homothétiques, et ajouter une troisième surface. Procédant de proche en proche, on arrivera ainsi, étant données des surfaces $S_1, S_2, \ldots, S_n$, en nombre quelconque, et autant de coefficients numériques $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; à étudier la surface S définie par la transformation polaire

$$r = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots + \alpha_n r_n.$$

PHYSIQUE ET CHIMIE

482. — *Un récipient clos est exactement rempli d'eau liquide à 0° sous la pression atmosphérique. On refroidit le tout à — 1°. Que devient la pression intérieure dans l'hypothèse où l'eau reste en surfusion ? Comment pourrait-on calculer la fraction d'eau congelée en supposant qu'il n'y ait pas surfusion ?*

Coefficient de dilatation de l'eau entre — 1° et 0°	$\alpha =$	-60×10^{-6}.
— *compressibilité de l'eau (en mégadynes par cmq)*	$\mu =$	50×10^{-6}.
— *dilatation cubique de l'enveloppe*	$k =$	25×10^{-6}.
— *compressibilité de l'enveloppe*	$\lambda =$	$2{,}2 \times 10^{-6}$.

Désignons par $P - P_0$ l'augmentation de la pression intérieure lorsque le récipient passe de 0° à — 1°, dans l'hypothèse où l'eau reste en surfusion. Si V_0 représente le volume intérieur du récipient à 0°, son volume à — 1° sera

$$V = V_0[1 + \lambda(P - P_0)](1 - k).$$

Le volume de l'eau sera

$$V = V_0[1 - \mu(P - P_0)](1 - \alpha).$$

En égalant ces deux volumes et négligeant les produits $k\lambda$ et $\alpha\mu$, on a

$$P - P_0 = \frac{k - \alpha}{\lambda + \mu} = 1^{\text{mégad.}},628.$$

Supposons maintenant qu'il n'y ait pas surfusion et désignons par P la pression pour laquelle le point de fusion de la glace est à $-1°$; la pression intérieure sera précisément P, car si elle était supérieure une partie de la glace fondrait et si elle était inférieure une partie de l'eau se congèlerait.

Désignons par x la fraction d'eau congelée, par β le coefficient d'augmentation de volume de l'eau lorsqu'elle passe, à 0° et sous la pression atmosphérique, de l'état liquide à l'état solide, par α' le coefficient de dilatation de la glace entre $-1°$ et 0°, et par μ' son coefficient de compressibilité.

En égalant les volumes du contenant et du contenu à $-1°$, on a la relation

$$[1 + \lambda(P - P_0)](1 - k) = (1 - x)[1 - \mu(P - P_0)](1 - \alpha) + \beta x[1 - \mu'(P - P_0)](1 - \alpha'),$$

d'où l'on tire, en négligeant les produits des coefficients de compressibilité par les coefficients de dilatation,

$$x = \frac{(\lambda + \mu)(P - P_0) + \alpha - k}{\beta - 1 - (\beta\mu' - \mu)(P - P_0) - (\beta\alpha' - \alpha)}.$$

M. Malplat.

Dans les questions de ce genre, nous ne saurions trop recommander à nos jeunes lecteurs de chercher à se rendre compte de l'importance relative des différents termes qui composent la solution, de supprimer ceux qui sont évidemment négligeables et de grouper les autres d'après leur signification physique.

---

424. — *Une dissolution de sulfite neutre de sodium est partagée en deux parties égales.*

1° *Dans l'une d'elles, additionnée d'empois d'amidon, on ajoute un volume* V *d'une dissolution titrée d'iode jusqu'à ce que la liqueur se colore en bleu. Un sel de baryum soluble y détermine alors la formation d'un précipité dont le poids est de* 1gr,165.

2° *L'autre moitié est soumise à une ébullition prolongée avec un excès de soufre en fleur. A la liqueur filtrée et chaude encore, on ajoute du nitrate d'argent jusqu'à cessation de précipité. Ce précipité pèse* 1gr,24. *Dans la liqueur filtrée, un sel de baryum soluble donne un précipité dont le poids est de* 1gr,165.

Déduire de ces données :

1° *Le poids de sulfite neutre contenu dans la liqueur primitive ;*

2° *Le poids du sel de sodium contenu dans la liqueur qui a été soumise à l'ébullition avec la fleur de soufre ;*

3° *La formule que l'on est conduit à attribuer à ce sel lorsqu'on connaît la formule du sulfite ;*

4° *Le volume de la solution titrée d'iode que sa dissolution serait capable d'absorber.*

O = 16 S = 32 Na = 23 Ba = 137 Ag = 108.

(*Concours général, 1895.*)

1° L'iode transforme le sulfite en une quantité équivalente de sulfate que le sel de baryum précipite. Le poids de ce précipité est une fraction x de son poids moléculaire telle que

$$x.SO^4Ba = 1,165, \qquad \text{d'où} \qquad x = 0,005.$$

Chaque partie de la liqueur primitive renfermait donc un poids de sulfite égal à $x.SO^3Na^2$, ce qui fait pour le tout 1gr,26.

2° et 3° Le précipité fourni par l'azotate d'argent est formé de sulfure dont le poids est une fraction y du poids moléculaire telle que

$$y.Ag^2S = 1,24, \qquad \text{d'où} \qquad y = 0,005.$$

Le deuxième précipité renferme donc le même poids de soufre que le premier ; il en est de même du troisième, qui pèse autant que le premier. Le nouveau sel de sodium renferme donc deux fois plus de soufre que le sulfite et l'on est conduit à lui attribuer la formule $S^2O^3Na^2$. Son poids est $x.S^2O^3Na^2 = 0^{gr},79$.

4° On sait enfin que les réactions de l'iode sur le sulfite et sur l'hyposulfite sont représentées respectivement par les équations

$$SO^3Na^2 + I^2 + H^2O = SO^4Na^2 + 2(HI),$$
$$2(S^2O^3Na^2) + I^2 = S^4O^6Na^2 + 2(NaI).$$

Comme une molécule de sulfite n'a produit qu'une molécule d'hyposulfite, la dissolution de ce dernier sel ne peut absorber qu'un volume $\frac{V}{2}$ de solution d'iode.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

529. — *On donne : 1° un paraboloïde de révolution à axe vertical ayant son foyer à 57mm au-dessous du sommet, lequel a ses projections horizontale et verticale à 170mm et 375mm au-dessus du bord inférieur de la feuille, et à 220mm du bord gauche ; 2° un cône de révolution, dont une section méridienne se compose de deux lignes droites : l'une parallèle aux deux plans de projection, et passant par le sommet du paraboloïde ; l'autre verticale se projetant à 100mm du bord gauche de la feuille. On ne considérera que la nappe de ce cône qui se projette verticalement au-dessous des deux lignes indiquées et à droite de la seconde.*

La courbe d'intersection de ce cône et du paraboloïde sert de directrice à un second cône ayant même sommet que le paraboloïde.

On demande de représenter par ses projections le solide commun aux deux cônes supposés pleins, et limités inférieurement par un plan horizontal H, *situé à 54mm au-dessous de leurs sommets.*

On tracera en traits pleins noirs les lignes d'intersection des deux cônes et du plan H.

On indiquera en traits rouges le contour apparent vertical du paraboloïde, et la construction : 1° des points les plus hauts et les plus bas de la courbe d'intersection des deux cônes limités au plan H ; *2° d'un point de la trace du cône de révolution sur le plan* H *et de la tangente en ce point.*

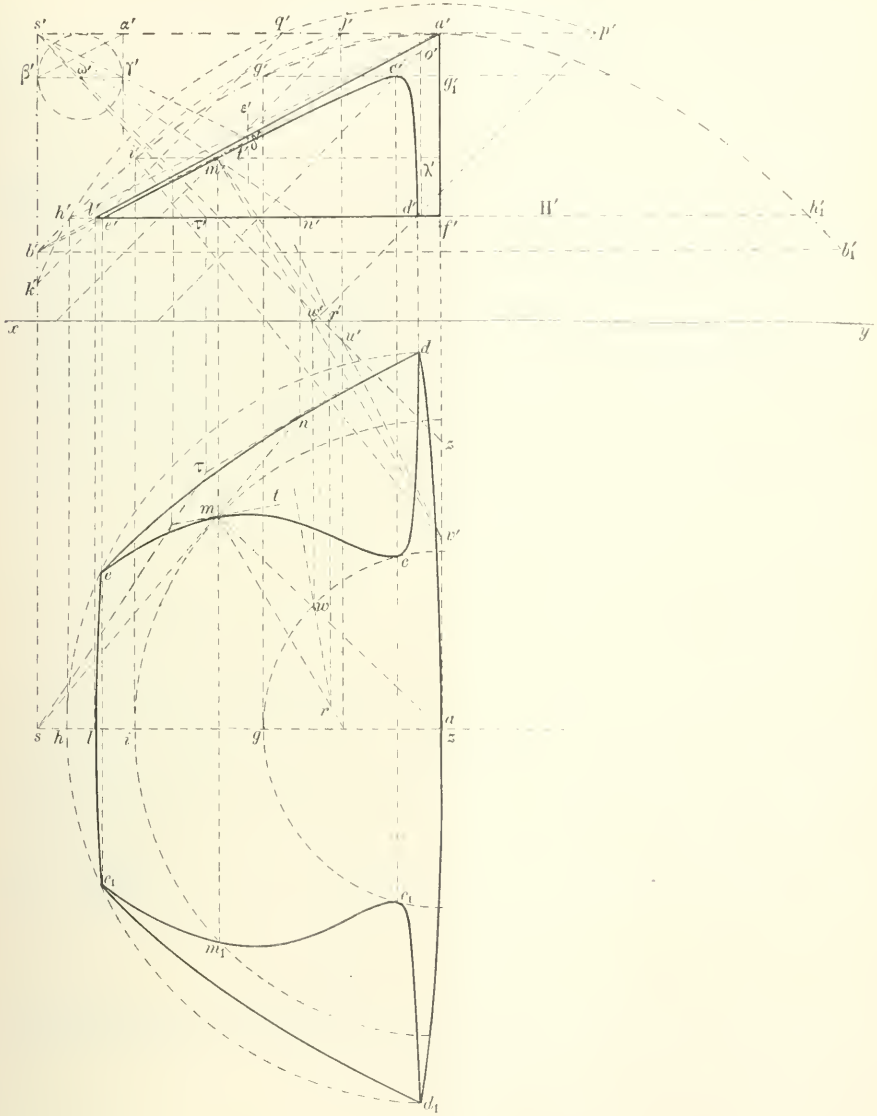
(*Ecole polytechnique, 1896.*)

Soient s, s' le sommet et sz, $s'z'$ l'axe du cône de révolution, a, a' le sommet et az, $a'z'$ l'axe du paraboloïde. La méridienne principale du paraboloïde a pour foyer f' ; nous construisons cette parabole $b'a'b'_1$ dont nous avons l'axe $a'z'$, le sommet a' et le foyer f'. Ensuite, pour avoir un point quelconque de l'intersection de ces deux surfaces, nous employons des sphères auxiliaires ayant pour centre commun le point de rencontre z, z' des axes. Construisons un point i' de la parabole et prenons la sphère passsant par i' ; elle coupe le cône suivant le parallèle de projection $j'm'$, et le paraboloïde suivant le parallèle $i'm'$, projeté horizontalement en vraie grandeur. Les droites $i'm'$ et $j'm'$ se rencontrent en un point m', projection verticale d'un point de l'intersection cherchée. On en déduit la projection horizontale des deux points projetés verticalement en m' ; ce sont m et m_1. La tangente mt, $m't'$ au point m, m' a été obtenue par la méthode des normales ; une frontale du plan des normales est $u'v'$ et une horizontale rv.

Cherchons maintenant les points les plus hauts et les plus bas. Pour cela, prenons d'abord la sphère auxiliaire inscrite dans le cône, car celle inscrite dans le paraboloïde ne coupe pas le cône ; elle touche ce cône suivant le parallèle $d'c'$ et coupe le paraboloïde suivant le parallèle $g'c'g'_1$. Les projections verticales de ces parallèles se rencontrent au point c', d'où les deux points les plus hauts de l'intersection c, c' et c_1, c'. La projection verticale de la courbe est tangente en c' à $g'c'$ qui est un parallèle limite et la projection horizontale touche en c et c_1 le cercle projection horizontale de ce parallèle du paraboloïde.

Cette sphère donne en plus le point a, a' de l'intersection qui est un point double isolé et la projection verticale de la courbe est tangente en a' à $a's'$.

Pour avoir les points les plus bas, c'est-à-dire ceux situés dans le plan horizontal donné H', on se sert de la sphère auxiliaire qui coupe le paraboloïde suivant le parallèle $h'h'_1$ situé dans H'. On construit d'abord le point h' de la parabole situé sur H' et on a la sphère auxiliaire correspondante, qui coupe le cône suivant les deux parallèles $k'q'$ et $p'd'$; ces deux droites rencontrent $h'h'_1$ aux points d' et e', ce qui donne les quatre points les plus bas c, e', c_1, e', d, d', d_1, d'.


s'
α'
q'
j'
a'
p'
β'
ω'
γ'
g'
c'
o'
g'₁
e'
i'
l'
m'
χ'
h'
h'₁
e'
τ'
n'
d'
f'
H'
b'
b'₁
k'
w'
r'
x
y
u'
d
n
z
τ
m
l
v'
e
c
w
r
a
z
s
h
l
i
g
c₁
r₁
m₁
d₁

Remarquons maintenant que le plan de front des axes est un plan de symétrie dans les deux surfaces et que par suite sa trace horizontale sz est un axe de symétrie de la projection horizontale de la courbe. D'autre part nous savons que la projection verticale est une hyperbole. Pour déterminer les asymptotes de cette hyperbole nous cherchons les plans de sections homothétiques dans le cône et dans le paraboloïde ; pour simplifier nous avons substitué au paraboloïde un cylindre de révolution à axe vertical qui lui est homothétique. A une sphère ω' inscrite dans le cône circonscrivons ce cylindre et nous obtenons comme plans de sections homothétiques les plans de bout de traces verticales $\alpha'\beta'$ et $\alpha'\gamma'$. Nous avons l'asymptote correspondant à la direction $\alpha'\beta'$ en menant la parallèle à $\alpha'\beta'$ par le point de rencontre δ' des diamètres $s'\gamma'\delta'$ et $\delta'\varepsilon'$ conjugués de cette direction dans les méridiennes principales des deux surfaces. D'ailleurs nous connaissons le centre o' de cette hyperbole qui est le milieu de $a'c'$ et il suffisait de mener par o' les parallèles $o'\delta'$ et $o'\lambda'$ aux directions asymptotiques pour avoir les asymptotes.

Prenons le deuxième cône qui a pour sommet a, a' et pour directrice la courbe précédente. Il est du second degré, car il a pour sommet un point double d'une courbe du quatrième degré qui est sa directrice. Une génératrice am, $a'm'$ de ce cône rencontre le cône de révolution en deux points, l'un a, a' et l'autre m, m' situé sur la courbe d'intersection du cône de révolution et du paraboloïde. Donc il coupera le premier cône suivant la courbe déjà obtenue précédemment.

Reste à construire les traces des deux cônes sur le plan horizontal Π'. La trace du premier est une parabole de sommet s et d'axe sz ; nous en avons obtenu précédemment quatre points d, d_1, e, e_1. Pour en avoir un point quelconque, il suffit de prendre la trace sur Π' de la génératrice sm, $s'm'$; c'est le point n, n'. La tangente $n\tau$, $n'\tau'$ est la trace sur le plan Π' du plan tangent au cône le long de sm, $s'm'$, plan défini par cette génératrice et par mt, $m't'$. On a d'ailleurs immédiatement le foyer de cette parabole par la construction de Dandelin.

Pour la trace sur Π' du cône de sommet a, a' il suffit de déterminer les points de rencontre de Π' avec les diverses génératrices. La construction a été faite pour les deux génératrices $a'b'$ et $a'f'$ de contour apparent vertical de ce cône, ce qui a donné les sommets l et a de l'axe de symétrie de la projection horizontale de cette courbe qui est une ellipse. Nous en avons quatre points e, e_1, d, d_1 ; elle est donc déterminée.

Traitons le problème par le calcul. Prenons pour axe des z la verticale az, $a'z'$ de a, a' la partie positive dirigée vers le bas, pour axe des x positifs as, $a's'$ et pour axe des y positifs la ligne de bout de a, a' en avant du plan de front de a, a'. Le paraboloïde a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0 \qquad \frac{p}{2} = 57^{\text{mm}}.$$

Le cône de révolution a pour équation

$$y^2 + 2zx - 2dz = 0 \qquad d = 120^{\text{mm}}.$$

La projection verticale de leur intersection est

$$y = 0, \qquad x^2 + 2zx + 2(d-p)z = 0,$$

c'est une hyperbole.

La projection horizontale de cette intersection est

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 - p\,.\,\frac{y^2}{d-x} = 0, \qquad \text{ou} \qquad x(x^2+y^2) - dx^2 - (d-p)y^2 = 0.$$

C'est une courbe du troisième degré admettant l'axe des x, c'est-à-dire as comme axe de symétrie. Elle a une asymptote perpendiculaire à as mais rejetée à l'infini.

Remarque. — La seule difficulté graphique est la détermination exacte du point g' où la sphère auxiliaire inscrite au cône coupe la parabole méridienne principale du paraboloïde. On l'éviterait en calculant la distance de a' à $g'c'$, c'est-à-dire à g'_1.

Dans le plan de front de a, a' la parabole méridienne a pour équation $x^2 - 2pz = 0$ et la circonférence de centre z' et passant par a' a pour équation $x^2 + z^2 - 2dz = 0$ car $a'z' = a's' = d$. Eliminant x, il vient $z^2 + 2pz - 2dz = 0$, $z = 0$ donne a' et $z = 2(d-p)$ donne g' ; donc $a'g' = 2(d-p) = 2(120-114) = 12^{\text{mm}}$.

N. C.

QUESTIONS PROPOSÉES

603. — On considère le faisceau des hyperboles (H) circonscrites à un triangle équilatéral ABC et dont une asymptote est tangente au cercle inscrit dans ce triangle. On demande de trouver et de construire les courbes suivantes :

1° L'enveloppe de la deuxième asymptote de (H) et le lieu du centre de cette hyperbole ;

2° L'enveloppe de la polaire par rapport à (H) du centre du cercle inscrit dans le triangle ABC ;

3° L'enveloppe des axes de l'hyperbole (H) ;

4° L'enveloppe de cette hyperbole.

VASNIER.

604. — On considère trois axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy, Oz, sur Ox, un point P, sur Oy, un point Q, et enfin deux paraboloïdes de révolution ayant tous deux pour foyer le point O et pour sommets respectifs les points P et Q; on considère, en outre, une quadrique (S) de révolution ayant le point O pour foyer et pour longueur de son axe focal une quantité constante représentée par $2a$, cette quadrique étant astreinte, au surplus, à toucher chacun des paraboloïdes en trois points. On demande alors :

1° Le lieu du second foyer de la quadrique (S);

2° Le lieu de l'axe de révolution ;

3° L'enveloppe du plan équatorial ;

4° Le lieu des sommets de l'axe focal. AUZERAM.

605. — Une cissoïde droite de grandeur variable a son point de rebroussement en un point fixe A et passe en un point fixe B. Montrer que le cercle tangent à la cissoïde en B et passant par A rencontre la tangente et la normale au point de rebroussement en deux points qui décrivent chacun une droite.

A. BRIERE.

606. — Quelles sont les diverses méthodes qu'on pourrait employer pour déterminer la distance focale d'un miroir sphérique concave inaccessible, c'est-à-dire sans mesurer aucune longueur à partir du miroir?

607. — On fait passer lentement un courant d'air atmosphérique successivement dans un tube long et étroit entouré de glace fondante, puis dans un tube rempli de ponce sulfurique. L'augmentation de poids du premier est p, celle du second p'. On demande de déterminer la force élastique f de la vapeur d'eau dans l'air La force élastique maxima à 0°, F_0, est supposée connue ainsi que la pression atmosphérique H.

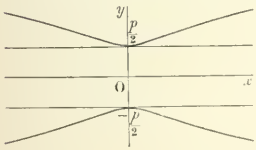
Quelle serait la signification de la condition $p = 0$ ou $p' = 0$?

DEUXIÈME PARTIE

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE NAVALE

540. — *Lieu des foyers des paraboles tangentes en O à Ox et de paramètre donné p.*

Soient α, β les coordonnées du foyer F d'une des paraboles considérées ; la direction de l'axe a pour coefficient angulaire $-\frac{\beta}{\alpha}$, puisque cette droite fait avec la tangente Ox le même angle que OF, en sens contraire.



Par suite la directrice a pour coefficient angulaire $\frac{\alpha}{\beta}$, et comme elle passe par le symétrique $(\alpha, -\beta)$ du point F par rapport à Ox, son équation est

$$y + \beta = \frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha) \qquad \text{ou} \qquad \alpha x - \beta y - (\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Nous aurons l'équation du lieu en écrivant que la distance du foyer à cette droite est égale à p, ce qui donne en remplaçant α et β par x et y,

$$4y^4 - p^2(x^2 + y^2) = 0.$$

On construit facilement cette courbe en résolvant son équation par rapport à x ; elle est symétrique par rapport aux deux axes et admet des branches paraboliques parallèles à Ox.

Bonnes solutions : M. E. DAVAUX (lycée de Dijon); M. J. BADARD.

541. — *Former l'équation générale des paraboles de paramètre p tangentes à l'axe des x et dont la directrice passe par l'origine. Construire le foyer et le sommet pour une position donnée de la directrice. Lieu du foyer et du sommet.*

L'équation demandée est de la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2;$$

en écrivant que la courbe est tangente à Ox, on obtient la condition $\alpha^2\cos^2\varphi-\beta^2\sin^2\varphi=0$, d'où l'on déduit $\alpha\cos\varphi=\pm\beta\sin\varphi$. On ne peut pas prendre le signe $-$, car le foyer n'est pas sur la directrice, on a donc la relation

$$\alpha\cos\varphi-\beta\sin\varphi=0,$$

qui exprime d'ailleurs que le symétrique du foyer par rapport à Ox est sur la directrice.

Enfin, pour que le paramètre soit égal à p, il faut que la distance du foyer à la directrice soit égale à p, ce qui donne

$$\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi=p\varepsilon. \qquad (\varepsilon=\pm 1).$$

Des deux dernières équations on tire

$$\alpha=\frac{p\varepsilon}{2\cos\varphi}, \qquad \beta=\frac{p\varepsilon}{2\sin\varphi},$$

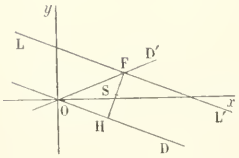
et par suite l'équation générale cherchée est

$$\left(x-\frac{p\varepsilon}{2\cos\varphi}\right)^2+\left(y-\frac{p\varepsilon}{2\sin\varphi}\right)^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2,$$

ou

$$(x\sin\varphi-y\cos\varphi)^2-\frac{p\varepsilon x}{\cos\varphi}-\frac{p\varepsilon y}{\sin\varphi}+\frac{p^2}{4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}=0.$$

Soit OD une position donnée de la directrice. Le foyer F est situé d'une part sur une droite LL′ parallèle à OD, la distance de ces deux droites étant égale à p, et d'autre part sur la droite OD′ symétrique de OD par rapport à Ox.



Le foyer étant ainsi déterminé, abaissons de ce point la perpendiculaire FH sur OD ; le milieu S de FH est le sommet.

Le problème admet deux solutions symétriques par rapport au point O, car il existe une seconde droite parallèle à OD et située à une distance de cette droite égale à p.

On peut se servir de cette construction pour avoir le lieu du foyer et du sommet.

Soit $x\cos\varphi+y\sin\varphi=0$ l'équation de la droite OD ; les équations de LL′ et de OD′ sont respectivement

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p\varepsilon=0,$$
$$x\cos\varphi-y\sin\varphi=0,$$

et on obtient le lieu du foyer en éliminant φ entre ces deux équations, ce qui donne

$$x^2y^2-\frac{p^2}{4}(x^2+y^2)=0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré symétrique par rapport aux deux axes et aux bissectrices de ces axes. On la construit aisément en résolvant l'équation par rapport à y^2.

Les coordonnées du foyer sont $\frac{p\varepsilon}{2\cos\varphi}$, $\frac{p\varepsilon}{2\sin\varphi}$; on en déduit celles du point H,

$$\frac{p\varepsilon}{2\cos\varphi}-p\varepsilon\cos\varphi, \qquad \frac{p\varepsilon}{2\sin\varphi}-p\varepsilon\sin\varphi,$$

et par suite les coordonnées du sommet sont

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{p\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}, \\[2ex] y = \dfrac{p\varepsilon}{2}\,\dfrac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

On aura l'équation du lieu du sommet en éliminant φ entre ces deux équations. En divisant membre à membre on a

$$\operatorname{tg}^3\varphi = \frac{x}{y},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin\varphi}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\cos\varphi}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}}.$$

Tirons de là $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ et portons les valeurs obtenues dans l'équation $x = \dfrac{p\varepsilon\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}$; nous aurons, après élévation au carré,

$$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{p^2}{4},$$

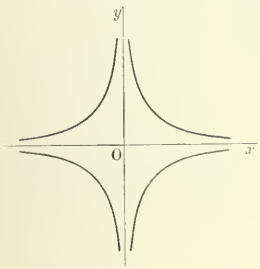
puis, en élevant au cube,

$$x^2y^2\left[x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\right] = \frac{p^6}{64},$$

et enfin, en remplaçant $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$ par p^2,

$$x^2y^2\left(x^2 + y^2 + \frac{3p^2}{4}\right) - \frac{p^6}{64} = 0.$$

Mais pour construire la courbe, il est préférable de se servir des formules (1) qui donnent les coordonnées d'un point du lieu de fonction du paramètre φ.



La courbe est symétrique par rapport aux axes ; on reconnaît facilement qu'il suffit de prendre les formules

$$x = \frac{p\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}, \qquad y = \frac{p\cos^2\varphi}{2\sin\varphi},$$

et de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$; x croît de 0 à $+\infty$, tandis que y décroît de $+\infty$ à 0.

On obtient ainsi le quart de la courbe ; en repliant autour de Ox, puis de Oy, on a la courbe tout entière.

E. Davaux (lycée de Dijon).

Bonne solution : M. J. Badard.

542. — *Former l'équation générale des paraboles ayant pour sommet l'origine et passant par un point* A *donné sur* Ox. *Construire le foyer d'une pareille parabole pour une direction donnée de l'axe. Lieu du foyer. Lieu du point de rencontre de l'axe et de la normale en* A *à la parabole.*

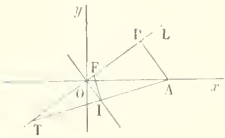
Soient $y - mx = 0$ l'équation de l'axe, $x + my = 0$ celle de la tangente au sommet ; l'équation de la parabole est de la forme

$$(y - mx)^2 + \lambda(x + my) = 0.$$

En écrivant que la courbe passe par le point $A(a, 0)$, on a $\lambda = -am^2$, et par suite l'équation générale demandée est

$$(y - mx)^2 - am^2(x + my) = 0.$$

Soit OL l'axe d'une parabole ; abaissons du point A la perpendiculaire AP sur cette droite, et prenons le symétrique T du point P par rapport à l'origine ; AT est la tangente au point A. Cette droite rencontre la tangente au sommet au point I, et d'après une propriété connue le point I est la projection du foyer sur la tangente AT. Par conséquent, la droite menée par le point I perpendiculairement à AT rencontre l'axe OL au foyer F.

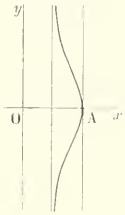


Soit $OF = \rho$, $\widehat{FOx} = \omega$; le paramètre de la parabole est égal à $\frac{\overline{AP}^2}{\overline{2OP}}$; on a donc

$$2\rho = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{2OP}}.$$

Or on a $AP = a \sin \omega$, $OP = a \cos \omega$, par suite

$$\rho = \frac{a \sin^2 \omega}{4 \cos \omega};$$



c'est l'équation en coordonnées polaires du lieu du foyer. Cette équation représente une cissoïde droite.

Le coefficient angulaire de la tangente AT est $+\frac{m}{m^2+2}$, par suite l'équation de la normale au point A est

$$\frac{y}{x-a} = -\frac{m^2+2}{m}.$$

Nous aurons l'équation du lieu demandé en éliminant m entre cette équation et celle de l'axe $y - mx = 0$.

On obtient sans difficulté

$$2x(x^2+y^2) - a(y^2+2x^2) = 0.$$

On construit cette courbe en résolvant l'équation par rapport à y^2.

Elle est symétrique par rapport à Ox et admet pour asymptote la droite $x = \frac{a}{2}$.

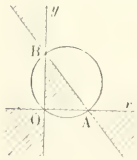
E. Davaux (lycée de Dijon).

Bonne solution : M. J. Badard.

543. — *Former l'équation générale des paraboles circonscrites à un triangle rectangle* OAB : 1° *Combien de ces paraboles passent par un point donné du plan ; quel lieu doit décrire ce point pour que les axes des deux paraboles correspondantes soient rectangulaires ?* 2° *Par un point donné du plan passent trois axes de ces paraboles ; quel lieu doit décrire ce point pour que deux des axes soient rectangulaires ? Construire les trois axes qui passent par un point pris sur ce lieu.* 3° *Lieu des projections de l'origine* O *sur les axes de ces paraboles.*

Soit $OA = 2a$, $OB = 2b$; l'équation générale des paraboles circonscrites au triangle OAB est

$$(1) \qquad (y - mx)^2 - 2am^2x - 2by = 0.$$



1° Cette équation étant du deuxième degré par rapport à m, par un point du plan il passe deux des paraboles considérées. Ces paraboles sont réelles si l'équation a ses racines réelles, ce qui donne la condition

$$x^2y^2 - (x^2 - 2ax)(y^2 - 2by) > 0$$

ou

$$2xy(bx + ay - 2ab) > 0.$$

Cette condition exprime que le point donné doit se trouver dans les régions du plan non couvertes de hachures.

Les racines de l'équation (1) sont les coefficients angulaires des axes des paraboles qui passent au point (x, y). Pour que ces axes soient rectangulaires, il faut que le produit des racines soit égal à -1, ce qui donne

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0;$$

le lieu est le cercle circonscrit au triangle AOB.

2° L'équation de l'axe de la parabole représentée par l'équation (1) est

$$(m^2 + 1)(y - mx) + am^3 - b = 0,$$

ou

$$(2) \qquad m^3(x - a) - m^2y + mx - (y - b) = 0.$$

Cette équation étant du troisième degré en m, par un point du plan il passe trois axes.

Pour que deux de ces axes soient perpendiculaires, il faut que deux racines de l'équation (2) aient leur produit égal à -1.

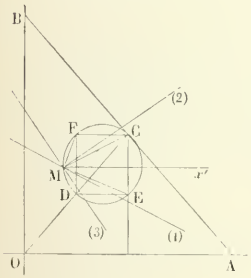
Or le produit des trois racines étant égal à $\frac{y-b}{x-a}$, pour que le produit de deux d'entre elles soit égal à -1, il faut et il suffit que le produit changé de signe, c'est-à-dire $-\frac{y-b}{x-a}$, soit racine de l'équation (2). En remplaçant m par $-\frac{y-b}{x-a}$ dans l'équation (2), et en supprimant le facteur $(y-b)(x-a)$ qui ne peut être nul, on a

$$(y-b)^2 + y(y-b) + x(x-a) + (x-a)^2 = 0,$$

ou

$$(y-b)(2y-b) + (x-a)(2x-a) = 0.$$

C'est l'équation du lieu. On reconnaît, sous cette forme, l'équation d'un cercle dont les points $C(a, b)$ et $D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ sont les extrémités d'un diamètre.



Soit $M(x, y)$ un point de ce cercle. L'une des racines de l'équation (2) est $-\frac{y-b}{x-a}$, c'est le coefficient angulaire de MC changé de signe. L'axe correspondant (1) fait avec OA le même angle que MC en sens contraire.

Divisons le premier membre de l'équation (2) par $m + \frac{y-b}{x-a}$, il reste l'équation

$$m^2 - \frac{2y-b}{x-a}m - 1 = 0.$$

En posant $m = \operatorname{tg}\varphi$, on en déduit

$$-\frac{x-a}{y-\frac{b}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = \operatorname{tg}2\varphi.$$

Soit E le point qui a pour coordonnées a, $\frac{b}{2}$, (ce point est sur le cercle), et F le point diamétralement opposé. Le coefficient angulaire de ME est $\frac{y-\frac{b}{2}}{x-a}$, celui de MF est $-\frac{x-a}{y-\frac{b}{2}}$. En menant alors Mx' parallèle à Ox, on voit que les deux autres axes (2) et (3) sont les bissectrices de l'angle des droites MF et Mx'.

3° On a le lieu demandé en éliminant m entre l'équation (2) et l'équation de la perpendiculaire menée du point O sur l'axe, $x + my = 0$.

On obtient ainsi

$$(x^2 + y^2)^2 - ax^3 - by^3 = 0.$$

L'équation de cette courbe, en coordonnées polaires, est

$$\rho = a \cos^3 \omega + b \sin^3 \omega.$$

Pour étudier les variations de ρ, nous formons la dérivée

$$\rho' = 3 \sin \omega \cos \omega (b \sin \omega - a \cos \omega),$$

et nous voyons que ρ passe par un maximum pour $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$, et par un minimum lorsqu'on a $\operatorname{tg} \omega = \frac{a}{b}$, c'est-à-dire lorsque le rayon vecteur est dirigé suivant la hauteur OH.

Bonnes solutions : MM. J. Badard ; E. Davaux (lycée de Dijon) ; F. Pégorier, à Toulouse.

544. — *Former l'équation générale des hyperboles ayant l'origine pour sommet et la droite $x = a$ pour asymptote : 1° Combien de ces hyperboles passent par un point donné M du plan ? Construire la seconde asymptote pour une position donnée du point M ; 2° Lieu du second sommet ; 3° Lieux des projections des deux sommets sur la seconde asymptote ; 4° Lieu des foyers.*

1° Comme le sommet est équidistant des asymptotes, la deuxième asymptote est tangente au cercle (C), qui a pour centre l'origine et pour rayon a ; son équation est de la forme

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - a = 0,$$

ou, en posant $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$,

$$x(1 - t^2) + 2ty - a(1 + t^2) = 0.$$

Par suite l'équation générale des hyperboles est

$$[x(1 - t^2) + 2ty - a(1 + t^2)](x - a) - a^2(1 + t^2) = 0,$$

ou

$$x^2(1 - t^2 + 2txy - 2ax - 2aty = 0.$$

Cette équation étant du deuxième degré par rapport à t, on en conclut qu'il passe deux hyperboles par un point donné M du plan.

Pour que ces courbes soient réelles, il faut que l'équation en t

$$-t^2x^2 + 2ty(x - a) + x^2 - 2ax = 0$$

ait ses racines réelles, ce qui donne la condition

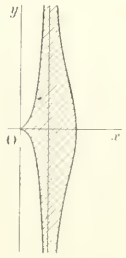
$$y^2(x - a)^2 + x^3(x - 2a) \geqslant 0 ;$$

par suite le point M doit se trouver dans la région positive de la courbe qui a pour équation

$$y^2(x - a)^2 + x^3(x - 2a) = 0.$$

L'équation de cette courbe en coordonnées polaires est

$$\rho = \frac{a}{\cos \omega} \pm a.$$



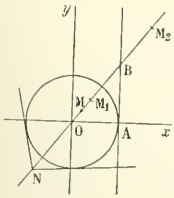
Sous cette forme on reconnaît que la courbe est une conchoïde de la droite $x = a$.

L'axe des y est dans la région positive de la courbe ; par conséquent, pour que les hyperboles qui passent au point M soient réelles, il faut que le point M soit situé dans la région du plan non couverte de hachures.

La droite OM rencontrant l'asymptote donnée au point B doit rencontrer la deuxième asymptote en un point N tel que l'on ait

$$\overline{ON} = \overline{BM}.$$

Les tangentes menées par le point N au cercle (C) sont les secondes asymptotes des deux hyperboles du faisceau qui passent par le point M.

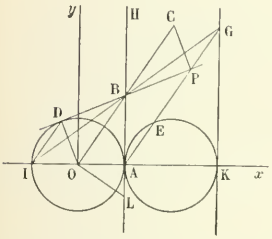


Pour que ces droites soient réelles, il faut que le point N soit en dehors du cercle, c'est-à-dire que $\overline{ON}$ soit extérieur à l'intervalle $(-a, +a)$. Il doit en être de même de $\overline{BM}$, et par suite le point M doit se trouver en dehors de la portion de droite M_1M_2, les points M_1 et M_2 étant choisis sur OB en sorte que $BM_1 = BM_2 = a$.

Quand la droite OM tourne autour du point O, les points M_1 et M_2 décrivent la conchoïde dont nous avons parlé. On en conclut que le point M doit être situé dans la région de cette conchoïde qui ne contient pas l'asymptote $x - a = 0$. On est conduit au même résultat que précédemment.

2° Le centre B d'une des hyperboles est sur la droite $AH(x - a = 0)$. Le deuxième sommet C est symétrique du point O par rapport au point B ; il en résulte que le lieu de ce point est la droite

$$x - 2a = 0.$$



3° Menons du point B la deuxième tangente au cercle, soit BD. Cette droite est la deuxième asymptote de l'hyperbole.

La projection du point O sur cette droite est précisément le point D, le lieu de ce point est le cercle (C).

La projection de l'autre sommet C sur l'asymptote BD, le point P, est symétrique de D par rapport à B. Les triangles AOB et BCP étant égaux, AP est parallèle à OC et par suite à DI. Sur la droite AP prenons $PG = DI$; les triangles BDI et BPG sont égaux, par suite la parallèle à Oy menée par le point G rencontre Ox au point K tel que $AK = AI$.

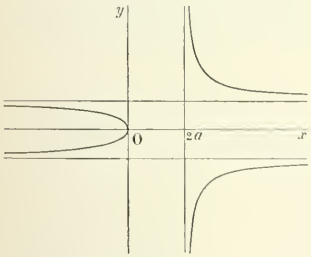
La droite AG rencontre le cercle décrit sur AK comme diamètre en un point E tel que l'on ait $AE = DI = PG$.

Il en résulte que le lieu du point P est une cissoïde droite relative au cercle AK.

4° Menons OL perpendiculaire à OB. Les foyers de la courbe sont à l'intersection de l'axe OB et du cercle de centre B et de rayon BL.

Soit λ l'ordonnée du point B ; l'équation de ce cercle est

$$(x - a)^2 + (y - \lambda)^2 = \left(\frac{a^2}{\lambda} + \lambda\right).$$



celle de OB est

$$\frac{y}{x} = \frac{\lambda}{a}.$$

On aura le lieu des foyers en éliminant λ entre ces deux équations. On trouve ainsi

$$(x - a)^2 + \frac{y^2}{x^2}(x - a)^2 = \frac{a^2(x^2 + y^2)^2}{x^2y^2},$$

ou en divisant par $(x^2 + y^2)x$,

$$y^2(x - 2a) - a^2x = 0.$$

La construction de cette courbe ne présente aucune difficulté.

Très bonne solution de M. E. Davaux (lycée de Dijon.)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1895) [*Suite*]

Géométrie descriptive (*Suite*)

458. — Déterminer une sphère : 1° passant par quatre points dont trois sont situés dans le plan horizontal ; 2° passant par trois points (dans le plan horizontal) et tangente à un plan donné (par la ligne de terre et un point) ; 3° passant par deux points donnés et tangente à deux plans donnés.

459. — Section d'une sphère par un plan déterminé par son échelle de pente. — Axes de la projection.

460. — Mener à une surface de révolution un plan tangent passant par un point donné : 1° faisant un angle donné avec un plan donné ; 2° passant à une distance donnée d'un autre point donné.

461. — Intersection d'une droite quelconque avec un ellipsoïde de révolution à axe vertical ou de bout, par des constructions élémentaires.

462. — On donne un axe vertical ou de bout et une droite qui en tournant autour de l'axe engendre un hyperboloïde. — Déterminer les génératrices de la surface qui sont parallèles à un plan donné P. — Peut-on mener par un point donné un plan coupant la surface suivant deux droites parallèles? — Mener un plan tangent parallèle à une droite donnée et ayant son point de contact sur une génératrice donnée.

463. — Mener à un hyperboloïde d'axe vertical un plan tangent faisant un angle α avec le plan horizontal : 1° par un point donné ; 2° parallèlement à une direction donnée.

464. — Un hyperboloïde à axe vertical est défini par son cercle de gorge et sa trace horizontale. — Déterminer la section par un plan passant par une génératrice donnée et un point donné.

465. — Déterminer la courbe d'ombre pour un hyperboloïde d'axe vertical éclairé par des rayons lumineux issus d'un point donné ou parallèles à une direction donnée. — Trouver le point de la courbe d'ombre situé sur une génératrice donnée.

466. — Intersection d'un hyperboloïde d'axe vertical : 1° avec la ligne de terre ; 2° avec une droite qui rencontre l'axe.

467. — Intersection de la surface engendrée par une droite en tournant autour de la ligne de terre avec un plan dont on donne la trace horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal.

468. — On donne un hyperboloïde dont l'axe est de front. Connaissant la projection verticale d'un point, déterminer sa projection horizontale et le plan tangent en ce point. — Mener un plan tangent parallèle à un plan donné. — Contour apparent horizontal. — Intersection avec une droite qui rencontre l'axe. — Section par un plan de front ou un plan horizontal. — Section par un plan défini par la ligne de terre et un point.

469. — Contours apparents d'un hyperboloïde d'axe quelconque engendré par la rotation d'une droite donnée autour de cet axe.

470. — Déterminer les génératrices d'un hyperboloïde qui sont parallèles à un plan donné P. — Cas particulier d'un hyperboloïde engendré par une droite horizontale tournant autour d'un axe de front.

471. — Une surface de révolution est engendrée par une courbe quelconque en tournant autour d'un axe de front. — Connaissant la projection verticale d'un point, déterminer sa projection horizontale et le plan tangent en ce point. — Mener un plan tangent perpendiculaire à une droite donnée.

472. — Contours apparents de la surface de révolution engendrée par la rotation d'un cercle donné dans le plan vertical autour d'un axe de front donné.

473. — Une surface de révolution est engendrée par une courbe donnée dans un plan de bout et qui se projette horizontalement suivant un cercle, en tournant autour d'un axe de front. — Courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface parallèlement à une direction donnée.

474. — Déterminer le sommet du cône circonscrit à une surface de révolution engendrée par une courbe donnée en tournant autour d'un axe quelconque, le long du parallèle décrit par un point donné de la courbe génératrice.

475. — Mener à une surface de révolution engendrée par la rotation d'une courbe située dans un plan vertical autour d'un axe quelconque, un plan tangent parallèle à une droite donnée et ayant son point de contact sur un parallèle donné.

476. — Contours apparents de la surface de révolution engendrée par la rotation autour d'un axe quelconque : 1° d'un cercle situé dans un plan horizontal ou de front ; 2° d'une courbe située dans un plan vertical ou de bout et projetée suivant un cercle.

477. — Contour apparent horizontal de la surface de révolution engendrée par la rotation d'un cercle situé dans un plan donné par son échelle de pente autour d'un axe incliné à 45° sur le plan horizontal et dont on donne la projection horizontale et la trace.

478. — Section plane d'une surface de révolution à axe de front définie par sa méridienne principale.

479. — Section par un plan horizontal d'une surface de révolution engendrée par la rotation autour d'un axe de front d'une courbe située dans un plan de bout et dont la projection horizontale est un cercle.

480. — Section par un plan déterminé par la ligne de terre et un point d'une surface de révolution engendrée par une courbe du plan horizontal en tournant autour d'un axe quelconque.

481. — Intersection d'un hyperboloïde avec un cône ou un cylindre. — Condition pour qu'il y ait des branches infinies.

482. — Intersection d'un hyperboloïde à axe vertical avec un cylindre ayant sa base dans le plan horizontal et ses génératrices de front.

483. — Intersection d'une sphère avec un cône dont le sommet est situé sur le contour apparent vertical de la sphère et dont la base est une courbe donnée dans le plan horizontal.

484. — Intersection d'une sphère avec un cône ayant pour base une section de la sphère par un plan de bout.

485. — Intersection d'un tore à axe vertical avec un cône ou un cylindre dont la base est donnée dans le plan horizontal.

486. — Intersection d'un tore à axe vertical avec un cône dont le sommet est un point de l'axe du tore et la directrice une section déterminée dans le tore par un plan de bout.

487. — Ombre portée par une sphère éclairée par des rayons lumineux parallèles sur un cône de révolution à axe vertical.

488. — Intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution.

489. — Intersection d'un tore et d'un cône de révolution ayant leurs axes dans un même plan de front.

490. — Intersection des deux hyperboloïdes engendrés par la rotation d'une horizontale donnée en tournant successivement autour de deux droites données dans un même plan de front.

491. — On donne dans un même plan de front deux droites et un cercle. Intersection des deux surfaces engendrées par la rotation du cercle autour de ces deux droites.

492. — Mener par un point une droite faisant des angles donnés : 1° avec deux droites données ; 2° avec deux plans donnés (un plan de bout et un plan vertical). — Mener par un point une droite faisant un angle α avec une droite donnée et passant à une distance r d'un point donné.

493. — Mener par un point une normale à un cône. — Cas d'un cône de révolution.

494. — Mener une droite qui rencontre quatre droites données de l'espace. — Si trois droites sont parallèles à un même plan, toutes les droites qui s'appuient sur celles-là sont parallèles à un autre plan.

QUESTIONS PROPOSÉES

608. — Lorsqu'un triangle rectangle a ses côtés de l'angle droit placés sur deux droites fixes et que la somme de leurs longueurs est constante, faire voir que :

1° Le milieu de l'hypoténuse décrit une ligne droite ;

2° L'hypoténuse enveloppe une parabole ;

3° Le cercle circonscrit au triangle passe par deux points fixes ;

4° Le centre de gravité du triangle T formé par les trois centres des cercles ex-inscrits au triangle rectangle décrit une hyperbole ;

5° Le centre du cercle circonscrit à ce même triangle T décrit aussi une hyperbole.

E.-N. Barisien.

609. — Par les extrémités O et A d'un rayon fixe d'un cercle, on fait passer un cercle mobile qui coupe le cercle fixe en un nouveau point B; par le point B on mène, dans le cercle mobile, une corde BM parallèle à une direction fixe. Trouver le lieu du point M et dire ce que devient ce lieu quand la direction choisie est parallèle à OA ou perpendiculaire à OA.

J. Badard, élève de l'Ecole des mines, à Saint-Etienne.

610. — On considère un cercle fixe de rayon R et un point fixe A, à une distance a du centre de ce cercle. Trouver :

1° L'enveloppe d'un cercle mobile passant par A et ayant son centre sur le cercle fixe;

2° Le lieu des foyers des hyperboles équilatères bitangentes au cercle fixe et passant par A. Dire ce que devient ce lieu, quand $a = R\sqrt{2}$ et le construire dans ce cas.

J. Badard.

611. — On considère deux droites rectangulaires, Ox et Oy, et un cercle (C) tangent à ces deux droites en A et B; par le point O on mène une sécante mobile qui rencontre le cercle (C) en M et N.

1° Faire passer une hyperbole équilatère par les quatre points A, B, M et N, et trouver le lieu du point de rencontre des tangentes à cette hyperbole en M et N :

2° Trouver le lieu du point de rencontre des droites AM et BN.

3° Par les points A, B, M, N, on fait passer une parabole (P). Montrer qu'il passe deux paraboles (P) par un point du plan et qu'on peut choisir un paramètre variable tel que l'équation générale des paraboles (P) soit rationnelle par rapport à ce paramètre.

4° Trouver le lieu décrit par l'intersection de (P) avec celui de ses diamètres qui passe au point O.

BIBLIOGRAPHIE

Curso de analyse infinitesimal, por F. Gomes Teixeira, director e professor na Academia Polytechnica do Porto, antigo professor na Universidade de Coimbra, socio correspondende das Academias Reaes das Scientias de Lisboa e Madrid, e das Sociedades Reaes das Scientias de Liège, Praga, etc. — *Calculo differencial.* — 3ª edição. — Porto. Typographia occidental — 1896.

Je connais trop peu le portugais pour analyser profondément l'ouvrage dont M. F. Gomès Teixeira a eu l'amabilité de me faire hommage. Mais j'ai pu néanmoins, avec un peu d'attention, me rendre suffisamment compte des nombreuses qualités de cet ouvrage pour éprouver le désir de le signaler à nos lecteurs.

L'auteur y traite avec rigueur et avec méthode toutes les questions importantes qui se rattachent au calcul différentiel, depuis l'introduction des nombres irrationnels, négatifs et imaginaires, jusqu'aux beaux travaux de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler sur les fonctions régulières dans tout le plan ou régulières sauf en des points isolés du plan.

La théorie des séries, des produits infinis, des fractions continues, dans ce que chacune a d'essentiel, l'exponentielle, le logarithme, les fonctions circulaires directes ou inverses et les relations qui les unissent aux deux précédentes sont placés dans l'introduction à l'analyse infinitésimale. Il faut féliciter l'auteur du soin qu'il a mis à exposer et à présenter aux lecteurs toutes ces notions indispensables.

Viennent ensuite les principes du calcul des infiniment petits, les dérivées, leurs applications à la géométrie, la formule de Taylor et ses applications analytiques et géométriques; puis enfin les deux importants chapitres consacrés aux fonctions définies par des séries, aux singularités qu'elles peuvent présenter, et aux recherches de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler sur les fonctions uniformes.

Cet ouvrage contient quantité de formules intéressantes et utiles, un grand nombre de faits analytiques importants; il est parfaitement ordonné et conçu dans un excellent esprit, simple et rigoureux à la fois. Ceux de nos lecteurs qui ont quelques connaissances en portugais trouveront dans la lecture de ce livre une excellente occasion de les fortifier tout en développant leurs connaissances mathématiques.

E. H.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

7e Année. N° 5. Février 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

AXES DES PROJECTIONS DES SECTIONS PLANES DU CYLINDRE ET DU CONE

par M. **Achille Provost**, Maître Répétiteur au Collège Chaptal.

Nous nous proposons dans cette note de construire directement les axes, sur les plans horizontal et vertical de projection, des *sections elliptiques* des cylindres et des cônes à bases *circulaires* données dans l'un des plans de projection.

La construction des axes en question n'est fournie jusqu'à présent que d'une manière indirecte, en ce sens que l'on construit d'abord deux diamètres conjugués de la projection étudiée, à l'aide desquels, par une des nombreuses constructions connues, mais qui n'ont plus trait immédiatement à la question, on achève la détermination cherchée.

Nous diviserons cette note en trois parties traitant respectivement les problèmes suivants :

1° Détermination des axes de la projection verticale de la section plane d'un cylindre de révolution à axe vertical.

2° Détermination des axes des deux projections de la section plane d'un cylindre à directrice circulaire dans le plan horizontal.

3° Détermination des axes des deux projections de la *section elliptique* d'un cône à directrice circulaire donnée dans le plan horizontal.

Il est clair que la solution donnée de chacun de ces problèmes comportera la solution du problème en quelque sorte inverse, à savoir celui de la « construction des axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués ».

Nous insisterons principalement, en raison de leurs solutions particulièrement simples, sur le premier problème et son problème inverse. Disons dès maintenant que, malgré les données très spéciales de ce premier problème, notre méthode donnera, du problème inverse correspondant, une solution comprenant comme cas particuliers *toutes* les solutions que l'on en pourrait obtenir à l'aide de la géométrie descriptive en considérant l'ellipse, définie par deux diamètres conjugués, comme projection cylindrique sur l'un des plans de projection, d'un cercle donné dans l'autre plan de projection. C'est ainsi que les solutions données par M. Caron dans son Cours de Géométrie descriptive (p. 42) et par M. Jullien dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1875, p. 324) rentrent dans notre construction générale.

N. B. — Afin de ne pas compliquer les épures, nous ferons remarquer qu'un plan est suffisamment défini sur l'épure par deux points représentant respectivement les projections horizontale et verticale d'un point du plan donné et par une droite représentant à elle seule les projections confondues de l'intersection de ce plan avec le plan bissecteur du second et du quatrième dièdre. Le plan serait complètement fixé, suivant le mode de représentation ordinaire, par une droite (la ligne de terre) perpendiculaire à la droite (ligne de rappel) qui joint les projections du point considéré.

Première Partie

Problème.

Détermination des axes de la projection verticale de la section plane d'un cylindre de révolution à axe vertical.

Soit (*fig.* 1), suivant le mode de représentation indiqué dans le *N. B.* précédent, un plan donné par un point (c, c') et sa droite d'intersection $(xy, x'y')$ avec le plan bissecteur du second et quatrième dièdre. Le cylindre de révolution, dont l'axe a sa projection verticale confondue suivant cc', est, en outre, défini par un cercle de centre c tracé dans le plan de l'épure.

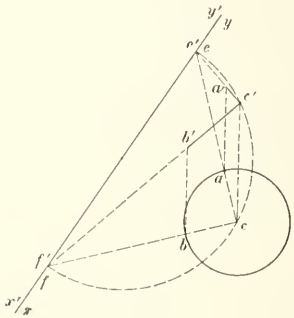


Fig. 1

Les axes de la projection verticale sont les projections de deux diamètres conjugués de l'ellipse du plan de section, lesquels se projettent à leur tour suivant deux diamètres rectangulaires du cercle e. Les deux diamètres considérés, conjugués dans l'ellipse de section, seront représentés sur l'épure par deux couples de droites rectangulaires ayant respectivement pour sommets c et c'. Mais chaque droite de l'un des couples coupera la droite de l'autre couple sur la droite $(xy, x'y')$ de l'épure respectivement en des points ee' et ff'. Nous obtiendrons donc ainsi la direction des axes cherchés : *nous joindrons à c' les extrémités e, f, du diamètre de la demi-circonférence tracée sur xy et passant par c et c'.*

Pour obtenir les extrémités a' et b' des demi-axes cherchés, il suffira de relever, parallèlement à cc', sur $c'e$ et $c'f$ respectivement, les points a et b d'intersection de ce et cf avec le cercle de centre c.

Problème inverse.

Construction des axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués.

Soient, (*fig.* 2), $c'p'$ et $c'q'$ les deux demi-diamètres conjugués donnés. Le problème sera résolu si l'on sait déterminer un cercle de centre c quelconque, tel que les parallèles $p'p$ et $q'q$ à $c'c$ coupent ce cercle en des points p et q, pour lesquels cp et cq soient rectangulaires ; car, cette détermination étant faite, on obtiendra la droite $(xy, x'y')$ du problème précédent en joignant les points d'intersection, k et l, de cp avec $c'p'$ et de cq avec $c'q'$. Alors les constructions indiquées dans le problème précédent achèveront la détermination des axes.

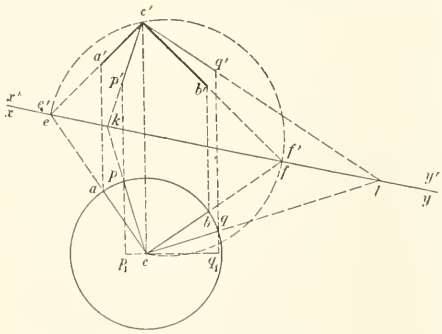


Fig. 2

Nous indiquerons la solution suivante de la détermination que l'on vient de signaler :

Prenons un point c quelconque du plan. Menons à cc' la perpendiculaire passant par le point c et coupant en p_1 et q_1 les parallèles à cc' menées par p' et q'. Plaçons sur p_1p' et q_1q' des longueurs $p_1p = cq_1$ et $q_1q = cp_1$, dans des sens tels que l'angle pcq soit droit, *ce qui est toujours possible de deux manières différentes :* cp et cq sont alors les rayons du cercle cherché c. Les points de rencontre k et l de cp avec $c'p'$, de cq avec $c'q'$, déterminent alors la droite $(xy, x'y')$ et nous achevons la construction ainsi qu'il a été dit. La figure 2 donne l'ensemble de ces constructions.

Cas particuliers.

La simplification de la construction précédente dépendra soit du choix particulier de c, soit du choix particulier de la droite $(xy, x'y')$ en observant que dans ce dernier cas le point c devra se trouver sur une circonférence de diamètre kl et placé de telle manière que les parallèles menées par p et q' à cc' rencontrent ck et cl en des points p, q tels que $cp = cq$. Ainsi pour les deux premiers cas particuliers suivants :

1° Choisissons le point c sur la perpendiculaire menée par p' à la direction $c'q'$ et prenons $p'c = c'q'$. Nous construirons p_1 et q_1 comme il a été dit plus haut ainsi que les points p et q et nous remarquerons alors que le point p se confondra avec le point p' et que la droite cq sera parallèle à la droite $c'q'$; la droite $(xy, x'y')$ se confondra avec la parallèle à $c'q'$ menée par p'. La construction obtenue par ce choix particulier du point c sera ainsi celle donnée par M. Jullien, laquelle ne diffère pas, pour la détermination de la direction des axes, de celle donnée par Chasles dans son « *Aperçu Historique* » note XV, page 362.

2° Choisissons la droite $(xy, x'y')$ de telle manière qu'elle soit confondue avec la droite joignant p et q'. Les points p et q seront alors confondus avec p' et q' ainsi que les points k et l. Le point c s'obtiendra donc en élevant au milieu de $p'q'$ une perpendiculaire d'extrémité c et de longueur égale à $\frac{1}{2}\, p'q'$. Nous obtiendrons ainsi la construction citée de M. Caron.

3° Nous pouvons indiquer, comme *construction nouvelle* déduite de notre méthode, celle dans laquelle on prendrait le point c sur une parallèle menée par c' à la droite joignant $p'q'$. Les deux rayons cp et cq du cercle c ont alors leurs extrémités sur $p'q'$ et sont également inclinés à 45° sur cette droite. La construction s'achève comme à l'ordinaire ; elle est aussi simple que les deux précédentes (*fig.* 3).

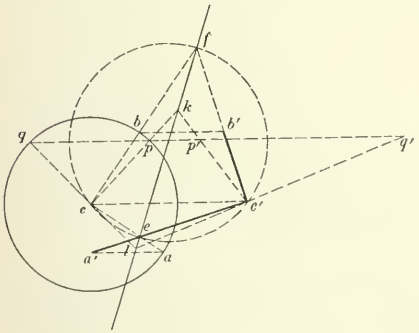


Fig. 3

Scolie.

Un cylindre elliptique étant donné par sa base dans l'un des plans de projections et par son axe perpendiculaire à ce plan, déterminer les sections de ce cylindre projetées sur l'autre plan suivant des cercles.

Les données sont ici $c'p'$ et $c'q'$ dans le plan vertical de projection, par exemple. On prendra un point c quelconque sur la ligne $c'c$ perpendiculaire à la ligne de terre. La droite $(xy, x'y')$ étant déterminée par la construction indiquée précédemment (*fig.* 2) fixera le plan sécant cherché conjointement avec le point cc' de ce plan. Comme nous l'avons fait remarquer dans le premier problème, nous aurons deux solutions, c'est-à-dire deux directions de plans coupant le cylindre donné dans les conditions énoncées.

Deuxième Partie.

Problème.

Détermination des axes des deux projections de la section plane d'un cylindre à directrice circulaire dans le plan horizontal (fig. 4).

Comme dans le problème de la Première Partie, on donne, pour déterminer le plan sécant, son

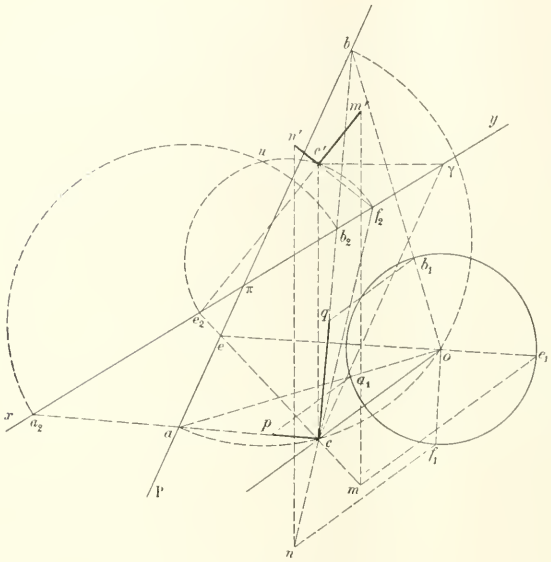


Fig. 4

intersection xy avec le plan bissecteur du second et du quatrième dièdre et l'un de ses points cc' que nous supposons être le point de rencontre de ce plan sécant avec l'axe du cylindre. Ce cylindre sera défini par sa directrice circulaire dans le plan horizontal, cette directrice étant figurée sur l'épure par un cercle de centre o.

1° *Axes de la projection horizontale.*

Soit, dans le plan de l'épure, πP la trace horizontale du plan sécant, laquelle est parallèle à la droite γc joignant c au point de rencontre γ de xy avec la perpendiculaire en c' à cc' (car $c\gamma$ et $c'\gamma$ sont les projections d'une horizontale du plan sécant).

Considérons la projection cylindrique sur le cercle o de la section plane S du cylindre par le plan donné. Deux diamètres conjugués de cette section S se projettent ainsi suivant deux diamètres rectangulaires du cercle o. Soient a et b les intersections avec πP de ces deux diamètres, alors ca et cb seront les projections horizontales des deux diamètres considérés, conjugués dans la section S. Donc :

Pour obtenir les directions des axes de la projection horizontale il suffira de prendre les points d'intersection avec πP d'une circonférence ayant son centre sur πP et passant par o et c. Si a et b sont ces points d'intersection, ca et cb sont les directions des axes.

Les diamètres conjugués de la section S projetés sur le plan horizontal, orthogonalement suivant les directions ca et cb et cylindriquement suivant les directions oa et ob coupent le cylindre en des points situés sur les génératrices ayant pour traces a_1 et b_1 où oa et ob coupent le cercle o. Ces génératrices se projettent orthogonalement sur le plan horizontal suivant des parallèles à co. Donc :

Pour obtenir les extrémités des axes de la projection horizontale il suffira de mener par a_1' et b_1 des parallèles à oc et de prendre leurs intersections p et q respectivement avec ca et cb.

Remarque I. — On reconnaît ici la même construction que celle effectuée dans le problème précédent où l'on aurait remplacé xy et c' par πP et c. Il s'ensuit que le problème inverse ne donnerait pas une construction différente de celle donnée dans la première partie.

Remarque II. — Les directions de deux rayons rectangulaires quelconques oa_1 et ob_1 du cercle o coupent πP en a et b. Les droites joignant c a et c b sont les directions de deux diamètres conjugués quelconques de la projection horizontale. Nous désignerons par a_2 et b_2 les points où ils coupent xy.

2° *Axes de la projection verticale.*

Les points a_2 et b_2 où deux diamètres conjugués de la projection horizontale coupent xy déter-

minent sur xy deux divisions en involution; $c'a_2$ et $c'b_2$ sont les directions de deux diamètres conjugués de la projection verticale. Donc :

Pour construire les directions des axes de la projection verticale il suffira de déterminer sur xy le segment e_2f_2 de l'involution considérée, qui est vu du point c' sous un angle droit.

Il est aisé de remarquer que dans le problème qui nous occupe, les points de l'épure d'où l'on voit les segments a_2b_2 sous des angles droits sont réels. On déterminera ces points, qui sont symétriques relativement à xy, par l'intersection de deux circonférences ayant pour diamètres deux segments a_2b_2 déterminés comme on l'a dit dans la Remarque II précédente. (Nous avons figuré sur l'épure une seule de ces circonférences, celle ayant pour diamètre le segment a_2b_2 correspondant aux axes de la projection horizontale.) Désignons par u les points considérés.

Le diamètre de la circonférence passant par les points u et c' dont le centre est du reste sur xy, détermine le segment e_2f_2 d'où les directions $c'e_2$ et $c'f_2$ des axes cherchés.

Pour obtenir les extrémités des axes de la projection verticale on aura recours aux projections horizontales correspondantes, m et n, lesquelles on relèvera en m' et n' sur $c'e_2$ et $c'f_2$ parallèlement à cc'.

A cet effet, on mènera les droites ce_2 et cf_2 coupant πP respectivement en e et f; ce sont les projections horizontales correspondant à $c'e_2$ et $c'f_2$. Les droites oe et of coupant respectivement le cercle o en e_1 et f_1 sont les projections cylindriques sur le plan horizontal, correspondant aussi à $c'e_2$ et $c'f_2$. Les parallèles menées par e_1 et f_1 à co coupent respectivement ce_2 et cf_2 en m et n relevés en m' et n'.

Nous avons sur l'épure construit seulement le point e_1 par la suite d'opérations que nous venons d'indiquer. Le point f_1 a été construit en menant le rayon of_1 perpendiculaire au rayon oe_1.

Problème inverse.

Construction des axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués.

Nous ferons remarquer d'abord que le problème traité dans cette IIe partie entraîne deux solutions du problème inverse énoncé. Nous avons déjà parlé de la première de ces solutions (IIe partie. Rem. I). Nous indiquerons seulement la seconde sans y insister, puisqu'elle conduirait à une construction plus longue que celle déjà donnée pour l'objet que nous avons en vue.

Soient $c'm'$ et $c'n'$ les deux demi-diamètres conjugués donnés. On prendra dans le plan deux droites quelconques cm et cn telles que mm', nn', cc' soient parallèles entre elles. Les droites $(cm, c'm')$, $(cn, c'n')$ détermineront par leurs intersections respectives, e_2 et f_2, une droite xy. D'un point o comme centre, pris sur une droite de direction quelconque oc, on décrira une circonférence coupant les parallèles menées par m et n à oc en des points e_1 et f_1 tels que l'angle e_1of_1 soit droit. La construction de cette circonférence a été indiquée dans le problème inverse traité dans la Ire partie. Les droites oe_1, of_1 couperont les droites ce_2 et cf_2 respectivement en deux points e et f déterminant une droite πP. Nous nous trouverons alors dans les conditions du problème de la IIe partie et l'on achèvera la construction ainsi qu'il a été dit alors.

Scolie.

Un cylindre elliptique étant défini par son axe et par une section plane donnée par les projections horizontales et verticales de deux de ses diamètres conjugués, déterminer les sections de ce cylindre projetées horizontalement suivant des cercles.

Les données sont ici $(c'm', cm)$, $(c'n', cn)$ définissant la directrice du cylindre, et $(co, c'o')$ définissant l'axe du cylindre.

Les deux diamètres conjugués donnés se projettent cylindriquement sur le plan cherché suivant

deux diamètres conjugués lesquels à leur tour se projettent orthogonalement suivant deux rayons rectangulaires de la projection horizontale circulaire voulue. On fixera un point oo' sur l'axe $(co, c'o')$ et l'on construira le même cercle o que l'on vient de construire dans le problème inverse précédent.

Les points e_1 et f_1 de ce cercle seront les projections horizontales des traces, sur le plan cherché, des génératrices du cylindre passant par les extrémités (m, m'), (n, n') des demi-diamètres donnés. Ces points e_1 et f_1 se relèveront en e_1 et f'_1 sur les parallèles menées respectivement par m' et n' à $c'o'$. Les directions de plans cherchés seront alors suffisamment déterminées par les projections $(oe_1, o'e_1)$, $(of_1, o'f'_1)$ de deux droites de l'un d'eux.

Nous obtenons deux séries de plans, car, comme on l'a fait antérieurement remarquer, il existe deux couples de points e_1, f_1.

Il est clair que les sections projetées verticalement suivant des cercles s'obtiendraient d'une manière analogue. *(A suivre.)*

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1896).

Mathématiques.

530. — 1° *On considère une courbe plane telle que les coordonnées rectangulaires d'un quelconque de ses points s'expriment au moyen du paramètre t par les formules*

$$x = at^3 + bt^2 + ct, \qquad \text{et} \qquad y = t^2.$$

Quels doivent être les coefficients a, b, c, pour que les cosinus directeurs de la tangente en un point quelconque de la courbe soient des fonctions rationnelles de t ?

Démontrer que toutes les courbes que l'on obtient ainsi sont semblables et semblablement placées.

2° *Évaluer, pour l'une d'elles, la longueur de la boucle située au-dessous du point double.*

3° *Considérant, en particulier, la courbe* (C) *que représentent les formules*

$$x = t - \frac{t^3}{3} \qquad y = t^2,$$

on lui mène deux tangentes parallèles, de coefficient angulaire m : Déterminer, en fonction de m, les coordonnées du point où la courbe (C) *est rencontrée par la droite qui joint les points de contact de ces deux tangentes, et trouver l'enveloppe* (E) *de cette même droite, variable avec m.*

4° *Former les équations des tangentes menées à la courbe* (E) *par un point A_0 de la courbe* (C), *correspondant à la valeur t_0 du paramètre t. Quelle est celle de ces droites qui rencontre la courbe* (C), *abstraction faite de A_0, en deux points où les tangentes sont parallèles ?*

5° *Dans l'espace on considère la courbe* (K) *définie par les équations*

$$x = z - \frac{z^3}{3} \qquad y = z^2,$$

ainsi que les cylindres (S) *et* (S') *qui la projettent respectivement sur les plans des xy et des xz. Ces deux cylindres se coupent suivant une autre courbe* (K'). *Former l'équation du cylindre qui projette* (K') *sur le plan des yz.*

6° *Trouver le lieu des points d'intersection des tangentes à la courbe* (K') *en deux points situés sur une même génératrice du cylindre* (S'). *On figurera la projection de ce lieu sur le plan des yz.*

1. — Les cosinus directeurs de la tangente à la courbe au point de paramètre t, ont pour expressions $\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$, $\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$, x' et y' représentant les dérivées de x et y par rapport à t. Comme ces dérivées sont rationnelles, il faut et il suffit, pour que les deux cosinus directeurs soient

aussi rationnels, que $\sqrt{x'^2+y'^2}$ soit une fonction rationnelle de t, c'est-à-dire que $x'^2+y'^2$ soit un carré parfait.

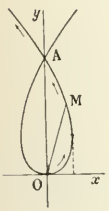
Or
$$x'^2+y'^2=(3at^2+2bt+c)^2+4t^2,$$
ou
$$x'^2+y'^2=(3at^2+2bt+c+2it)(3at^2+2bt+c-2it),$$
et cette fonction ne sera un carré parfait que si les deux trinomes sont eux-mêmes des carrés parfaits ou sont formés par les mêmes facteurs primaires ; ils ne peuvent avoir les mêmes racines, car cela exigerait que l'on eût $b+i=b-i$, égalité impossible ; chacun d'eux doit donc être un carré parfait et ceci exige que l'on ait
$$(b+i)^2-3ac=0 \qquad \text{et} \qquad (b-i)^2-3ac=0;$$
ces deux égalités entraînent $b=0$ et $3ac+1=0$ ou $a=-\frac{1}{3c}$. Les deux équations des courbes satisfaisant aux conditions exigées sont donc

$$(1) \qquad x=ct-\frac{t^3}{3c}, \qquad y=t^2,$$

c étant une constante quelconque.

Considérons maintenant les deux courbes qui correspondent à deux valeurs données de la constante c, quelconques d'ailleurs, h et kh ; les coordonnées du point de la première courbe ayant pour paramètre t ont pour valeurs
$$x=ht-\frac{t^3}{3h}, \qquad y=t^2;$$
celles du point de la seconde courbe qui a pour paramètre kt sont données par
$$x_1=k^2\left(ht-\frac{t^3}{3h}\right), \qquad y_1=k^2t^2;$$
on a donc $\frac{x_1}{x}=\frac{y_1}{y}=k^2$, ce qui montre que les deux courbes sont homothétiques par rapport à l'origine et dans le rapport k^2.

2. — Nous pouvons nous borner à étudier le cas où h est positif, car en changeant h en $-h$ on obtient une nouvelle courbe symétrique de la première par rapport à Oy. D'autre part, si on change t en $-t$, x ne fait que changer de signe, y ne change pas, la courbe (h) est donc symétrique par rapport à Oy, et, en tenant compte de cette symétrie, il suffit, pour obtenir la courbe, de faire varier t de 0 à $+\infty$. Pour $t=0$, $x=0$, $y=0$; y croît toujours ; quand t croît de 0 à h, x croît aussi : pour $t=h$, $x=\frac{2h^2}{3}$, $y=h^2$; quand t croît de h à $+\infty$, x décroît ; pour $t=h\sqrt{3}$, $x=0$, $y=3h^2$; enfin pour t infini $x=-\infty$, $y=+\infty$ et $\frac{y}{x}=0$; la branche infinie ainsi obtenue est donc une branche parabolique parallèle à Ox. Toutes ces remarques permettent de tracer immédiatement la courbe.



La longueur de la boucle située au-dessous du point double est le double de l'arc OMA, et l'on a
$$\text{OMA}=\int_0^{h\sqrt{3}} ds;$$
d'ailleurs $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\left(h+\frac{t^2}{h}\right)dt$; donc $\text{OM}=ht+\frac{t^3}{3h}$, et l'on a OMA en faisant dans cette expression $t=h\sqrt{3}$; par suite $\text{OMA}=2h^2\sqrt{3}$. La longueur totale de la boucle est donc égale à $4h^2\sqrt{3}$.

3. — Le coefficient angulaire de la tangente au point (t) de la courbe (C) a pour valeur $\frac{y'}{x'}$. Les valeurs de t qui correspondent aux points où le coefficient angulaire est égal à m, sont

données par $\frac{2t}{1-t^2} = m$, ou par l'équation $mt^2 + 2t - m = 0$. En outre les valeurs de t qui correspondent aux points de rencontre de la courbe (C) avec la droite $ux + vy + w = 0$ sont données par l'équation

$$ut^3 - 3vt^2 - 3ut - 3w = 0;$$

cette droite sera la droite demandée si l'équation du troisième degré en t admet les deux racines de celle du second degré, c'est-à-dire si l'on a

$$ut^3 - 3vt^2 - 3ut - 3w \equiv \frac{u}{m}(t-\theta)(mt^2 + 2t - m).$$

Cette identité fournit les trois équations

$$3u = \frac{u}{m}(2\theta + m),$$

$$3v = \frac{u}{m}(m\theta - 2),$$

$$3w = -\frac{u}{m}\theta m;$$

la première équation donne $\theta = m$, et alors on a

$$u = \lambda.3m, \qquad v = \lambda(m^2 - 2), \qquad w = -\lambda m^2,$$

λ étant un facteur indéterminé. La droite envisagée a donc pour équation

$$(2) \qquad 3mx + (m^2 - 2)y - m^2 = 0;$$

elle rencontre la cubique aux deux points où le coefficient angulaire de la tangente est égal à m, et en un troisième point dont le paramètre a pour valeur $t = \theta = m$.

Les coordonnées de ce point ont donc pour valeurs

$$x = m - \frac{m^3}{3}, \qquad y = m^2.$$

L'enveloppe de cette droite s'obtient en exprimant que son équation regardée comme du second degré en m a une racine double. On obtient ainsi

$$(3) \qquad 9x^2 + 8y(y-1) = 0,$$

ou

$$9x^2 + 8y^2 - 8y = 0.$$

Cette équation représente une ellipse ayant pour axe Oy et un sommet à l'origine.

4. — Pour obtenir les tangentes menées du point (t_0) à cette ellipse, il suffit d'exprimer que la droite (2) passe en ce point et de résoudre l'équation du second degré en m ainsi obtenue. On trouve d'abord

$$(t_0^2 - 1)m^2 + (3t_0 - t_0^3)m - 2t_0^3 = 0,$$

puis

$$m = \frac{t_0^3 - 3t_0 \pm \sqrt{(t_0^3 - 3t_0)^2 + 8t_0^2(t_0^2 - 1)}}{2(t_0^2 - 1)},$$

ensuite

$$m = \frac{t_0^3 - 3t_0 \pm (t_0^3 + t_0)}{2(t_0^2 - 1)},$$

et finalement

$$m' = \frac{2t_0}{1 - t_0^2}, \qquad m'' = t_0.$$

La première valeur correspond à la droite qui joint le point (t_0) au point où la tangente est parallèle à celle issue de ce point. La deuxième valeur correspond à une tangente à l'ellipse d'espèce différente.

Les équations de ces deux droites s'obtiennent en remplaçant m successivement par m' et m'' dans l'équation (2); on trouve ainsi

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} 3t_0(1 - t_0^2)x - (t_0^4 - 4t_0^2 + 1)y - 2t_0^3 &= 0, \\ 3t_0x + (t_0^2 - 2)y - t_0^3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

5. — La courbe (K) est du 3e ordre; elle est donnée par les deux cylindres qui la projettent sur le plan des xz et sur le plan des yz. Le cylindre qui la projette sur le plan des xy s'obtient en éliminant z entre les deux équations données et a pour équation

$$(5) \qquad y(3-y)^2 - 9x^2 = 0.$$

Il coupe le cylindre $x = z - \frac{z^3}{3}$ suivant une courbe totale du 9e ordre. Comme cette intersection comprend la courbe (K), l'autre portion (K') est une courbe du 6e ordre. Nous aurons le cylindre qui projette cette courbe sur le plan des yz, en remplaçant dans l'équation (5) x par $z - \frac{z^3}{3}$, puis supprimant le facteur évident $y - z^2$ qui correspond à la courbe (K); nous obtenons ainsi

$$(6) \qquad y^2 + (z^2 - 6)y + z^4 - 6z^2 + 9 = 0.$$

Ce cylindre, du quatrième ordre, coupe le cylindre $x = z - \frac{z^3}{3}$ suivant une courbe du 12e ordre qui se compose de la courbe (K') et de six droites confondues à l'infini avec la droite de l'infini du plan $z = 0$; par conséquent l'intersection à distance finie des deux cylindres est la courbe (K') elle-même.

6. — Désignons par α et γ les coordonnées d'une génératrice du cylindre $x = z - \frac{z^3}{3}$, de sorte que $\alpha = \gamma - \frac{\gamma^3}{3}$, et par β et β' les ordonnées des deux points de la courbe (K') qui sont sur cette génératrice, β et β' étant donnés par l'équation

$$y^2 + (\gamma^2 - 6)y + \gamma^4 - 6\gamma^2 + 9 = 0.$$

Le point de rencontre des deux tangentes à la courbe (K') aux points β et β' est situé à l'intersection des trois plans tangents, l'un au cylindre $x + \frac{z^3}{3} - z = 0$ et les deux autres au cylindre (6); ses coordonnées sont donc déterminées par les équations

$$x + (\gamma^2 - 1)z + 2(\alpha - \gamma) = 0,$$
$$(2\beta + \gamma^2 - 6)y + (2\beta\gamma + 4\gamma^3 - 12\gamma)z + 2\beta^2 + \beta\gamma^2 - 18\beta - 12\gamma^2 + 36 = 0,$$
$$(2\beta' + \gamma^2 - 6)y + (2\beta'\gamma + 4\gamma^3 - 12\gamma)z + 2\beta'^2 + \beta'\gamma^2 - 18\beta' - 12\gamma^2 + 36 = 0.$$

Combinons alors les deux dernières équations par soustraction, puis multiplions la première par β et retranchons-en la seconde multipliée par β, à chaque fois divisons par $\beta - \beta'$, nous aurons les deux équations

$$2y + 2\gamma z + 2(\beta + \beta') + \gamma^2 - 18 = 0,$$
$$(\gamma^2 - 6)y + (4\gamma^3 - 12\gamma)z - 2\beta\beta' - 12\gamma^2 + 36 = 0;$$

d'ailleurs on a immédiatement

$$\beta + \beta' = 6 - \gamma^2, \qquad \beta\beta' = \gamma^4 - 6\gamma^2 + 9;$$

donc les deux dernières équations se réduisent finalement à

$$2y + 2\gamma z - \gamma^2 - 6 = 0,$$
$$(\gamma^2 - 6)y + (4\gamma^3 - 12\gamma)z - 2\gamma^4 + 36 = 0.$$

Nous en déduisons

$$(7) \qquad y = \frac{2(\gamma^2 - 3)}{\gamma^2 - 2}, \qquad z = \frac{\gamma^3}{2(\gamma^2 - 2)}.$$

Ce sont les équations de la projection de la courbe cherchée sur le plan des yz en fonction du paramètre γ. L'x de la courbe est fourni par la première des trois équations envisagées plus haut; il a pour expression

$$x = (1 - \gamma^2)z + 2(\gamma - \alpha),$$

et, comme $\gamma - \alpha = \frac{\gamma^3}{3}$, nous avons finalement pour valeur de x

$$x = (1 - \gamma^2)\frac{\gamma^3}{2(\gamma^2 - 2)} + \frac{2\gamma^3}{3};$$

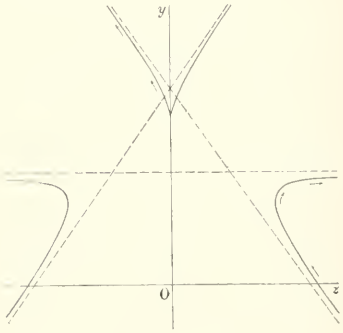
ou

$$x = \frac{\gamma^3(\gamma^2 - 5)}{6(\gamma^2 - 2)}.$$

Le lieu demandé est donc une courbe du cinquième ordre.

La projection sur le plan des yz est la cubique représentée par les équations (7). Il nous reste à construire cette courbe.

γ	y	z'	z
0	3		0
	croît	—	décroît
$\sqrt{2}$	$+\infty$		$-\infty$
	$-\infty$		$+\infty$
	croît		déc.
$\sqrt{3}$	0	—	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
			déc.
$\sqrt{6}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{6}}{4}$
	croît	+	croît
∞	2		$+\infty$



D'abord le changement de γ en $-\gamma$ indique une symétrie par rapport à Oy et il suffit de faire varier γ de 0 à $+\infty$; ensuite on a

$$y' = \frac{4\gamma}{(\gamma^2-2)^2}, \qquad z' = \frac{\gamma^2(\gamma^2-6)}{2(\gamma^2-2)^2}.$$

On peut donc construire de suite un tableau contenant les variations de x et de y. La direction asymptotique qui correspond à $\gamma = \sqrt{2}$ s'obtient en formant $\frac{y}{z}$ et en prenant la valeur de ce rapport pour $\gamma = \sqrt{2}$; on trouve ainsi $-\sqrt{2}$. On obtient l'ordonnée à l'origine de l'asymptote en formant $y + z\sqrt{2}$ et cherchant la limite que prend cette fonction de γ pour $\gamma = \sqrt{2}$; on trouve ainsi

$$y + z\sqrt{2} = \frac{\gamma^3\sqrt{2} + 4\gamma^2 - 12}{2(\gamma^2-2)},$$

ou

$$y + z\sqrt{2} = \frac{\gamma^2\sqrt{2} + 6\gamma + 6\sqrt{2}}{2(\gamma+\sqrt{2})},$$

puis

$$\lim_{\gamma=\sqrt{2}} (y + z\sqrt{2}) = \frac{7}{2};$$

l'équation de l'asymptote est donc

$$y + z\sqrt{2} - \frac{7}{2} = 0.$$

D'ailleurs sur la courbe elle-même la différence

$$y + z\sqrt{2} - \frac{7}{2}$$

a pour valeur

$$\frac{(\gamma-\sqrt{2})\left(\gamma+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}(\gamma+\sqrt{2})}$$

et cette différence est négative pour les valeurs de γ plus petites que $\sqrt{2}$ et positive pour les autres valeurs de γ. La branche de courbe qui correspond aux valeurs moindres que $\sqrt{2}$ est donc au-dessous de l'asymptote; l'autre est au-dessus. Enfin, pour $\gamma = 0$, on a $\frac{y'}{z'} = \infty$; la première tangente est l'axe des y.

Solution satisfaisante : M. Servant.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (Concours de 1896.)

547. — *Étant donnés, en coordonnées rectangulaires, l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et la sphère concentrique

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

on prend les plans polaires d'un même point M *par rapport à ces deux surfaces. Ces plans se coupent suivant une droite* Δ.

1° *On demande quel lieu* Σ *engendre la droite* Δ *quand le point* M *décrit une droite quelconque* D *de l'espace.*

2° *Quel lieu doit décrire le point* M *pour que la droite* Δ *passe par un point fixe* P ? *Quel est le degré du cône décrit par la droite* Δ ?

3° *On demande quelle relation géométrique doit exister entre deux points* M, M′ *pour que les droites correspondantes* Δ, Δ' *se coupent.*

4° *Quel lieu* Γ *doit décrire le point* M *pour que la droite* Δ *demeure dans un plan fixe* Π,

$$ux + vy + wz + p = 0.$$

Les coordonnées du point M *s'expriment alors rationnellement en fonction d'un paramètre.*

Trouver l'enveloppe E *de la droite* Δ *dans le plan* Π.

5° *Quel est le lieu de cette enveloppe quand le plan* Π *se meut parallèlement à lui-même ?*

6° *D'après la 4° partie, à tout plan* Π *se trouve attachée une ligne* Γ, *qui est le lieu des points pour lesquels la droite* Δ *correspondante se trouve dans le plan* Π *et, dans ce plan, ces droites* Δ *enveloppent une certaine courbe* E. *On suppose maintenant qu'un point* M *décrive le plan* Π : *montrer que la droite* Δ *correspondante s'appuie constamment en deux points sur la ligne* Γ *et que réciproquement, toute corde de* Γ *correspond à un point* M *du plan* Π.

7° *Quel lieu décrit* Δ *quand le point* M *se déplace sur une tangente de la ligne* E, *ou bien quand le point* M *se meut sur la ligne* E *elle-même ?*

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point M ; la droite Δ intersection des plans polaires de ce point par rapport à l'ellipsoïde et à la sphère a pour équations

$$(\Delta)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha x}{a^2} + \dfrac{\beta y}{b^2} + \dfrac{\gamma z}{c^2} - 1 = 0, \\[2ex] \alpha x + \beta y + \gamma z - R^2 = 0. \end{cases}$$

1° Si le point M décrit une droite $\dfrac{x - x_0}{u} = \dfrac{y - y_0}{v} = \dfrac{z - z_0}{w}$, les nombres α, β, γ ont pour formes, $x_0 + u\rho$, $y_0 + v\rho$, $z_0 + w\rho$, ρ étant un paramètre variable ; par conséquent, les deux équations de la droite Δ sont

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 + \rho\left(\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} + \frac{wz}{c^2}\right) = 0,$$

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 - R^2 + \rho(ux + vy + wz) = 0,$$

et on obtient le lieu de cette droite en éliminant ρ entre ces deux équations. Ce lieu est la surface du second degré ayant pour équation

$$(1)\quad \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1\right)(ux + vy + wz) - \left(\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} + \frac{wz}{c^2}\right)(xx_0 + yy_0 + zz_0 - R^2) = 0.$$

2° En écrivant que les équations (Δ) sont vérifiées par les coordonnées d'un point fixe (x_1, y_1, z_1), on obtient deux équations linéaires en α, β, γ ; par conséquent, le lieu du point M est une droite,

$$(\Delta_1)\quad \begin{cases} \dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} + \dfrac{zz_1}{c^2} - 1 = 0, \\[2ex] xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2 = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations, nous avons écrit x, y, z au lieu de α, β, γ. Il est visible que cette droite est celle des droites Δ qui correspond au point (x_1, y_1, z_1).

Il résulte alors du paragraphe précédent que le lieu de la droite Δ qui correspond à un point M mobile sur la droite Δ_1 est un cône du second degré.

3° En exprimant que deux des droites Δ_1, Δ et Δ', sont concourantes, on obtient la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{a^2} & \frac{\beta}{b^2} & \frac{\gamma}{c^2} & 1 \\ \frac{\alpha'}{a^2} & \frac{\beta'}{b^2} & \frac{\gamma'}{c^2} & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & R^2 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & R^2 \end{vmatrix} = 0;$$

cette relation est facile à interpréter, car, en supposant que le point M′ $(\alpha', \beta', \gamma')$ soit fixe et en transformant le déterminant précédent en celui qui suit

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\alpha-\alpha'}{a^2} & \frac{\beta-\beta'}{b^2} & \frac{\gamma-\gamma'}{c^2} \\ \alpha-\alpha' & \beta-\beta' & \gamma-\gamma' \\ \frac{R^2-a^2}{a^2}\alpha' & \frac{R^2-b^2}{b^2}\beta' & \frac{R^2-c^2}{c^2}\gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

on voit de suite que l'autre point, M (α, β, γ), décrit un cône du second degré ; c'est le cône décrit par les droites Δ qui passent au point M′, ainsi qu'il est facile de s'en assurer par un calcul direct qui conduit d'ailleurs exactement au premier déterminant, aux notations près. La relation qui existe entre les deux points M et M′ est donc qu'ils soient situés tous deux sur une droite Δ.

4° Pour que la droite Δ demeure dans un plan fixe, $ux+vy+wz+p=0$, il faut que l'équation de ce plan puisse se mettre sous la forme

$$\lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1\right)+\mu(\alpha x+\beta y+\gamma z-R^2)=0;$$

On doit donc avoir

$$u=\left(\frac{\lambda}{a^2}+\mu\right)\alpha, \qquad v=\left(\frac{\lambda}{b^2}+\mu\right)\beta,$$
$$w=\left(\frac{\lambda}{c^2}+\mu\right)\gamma, \qquad p=-\lambda-\mu R^2;$$

de la dernière de ces relations, nous déduisons μ, $\mu=-\frac{\lambda+p}{R^2}$, et, en portant cette valeur dans les autres relations, nous obtenons

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha=\dfrac{AR^2u}{\lambda-pA}, \\ \beta=\dfrac{BR^2v}{\lambda-pB}, \\ \gamma=\dfrac{CR^2w}{\lambda-pC}, \end{cases}$$

A, B, C désignant, pour abréger, les constantes $\frac{a^2}{R^2-a^2}$, $\frac{b^2}{R^2-b^2}$, $\frac{c^2}{R^2-c^2}$. Ces équations donnent des expressions rationnelles des coordonnées du point M en fonction d'un paramètre λ et montrent que le lieu de ce point est alors une cubique gauche ayant ses trois asymptotes rectangulaires et parallèles aux axes de coordonnées.

Au lieu de chercher directement la courbe E, nous allons chercher le cône qui la projette de

l'origine, c'est-à-dire l'enveloppe du plan variable passant par l'origine et par la droite Δ qui décrit le plan donné ; ce plan a pour équation

$$\left(\frac{R^2}{a^2}-1\right)\alpha x+\left(\frac{R^2}{b^2}-1\right)\beta y+\left(\frac{R^2}{c^2}-1\right)\gamma z=0,$$

ou

$$\frac{\alpha x}{A}+\frac{\beta y}{B}+\frac{\gamma z}{C}=0;$$

remplaçons-y $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\beta}{B}$, $\frac{\gamma}{C}$ par leurs valeurs tirées de (3), nous obtiendrons finalement

$$\frac{ux}{\lambda-pA}+\frac{vy}{\lambda-pB}+\frac{wz}{\lambda-pC}=0.$$

Nous aurons l'enveloppe de ce faisceau de plans en écrivant que cette équation, du second degré en $\frac{\lambda}{p}$, a une racine double ; ce calcul donne

$$[(B+C)ux+(C+A)vy+(A+B)wz]^2-4(ux+vy+wz)(BCux+CAvy+ABwz)=0,$$

ou

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{r}(B-C)^2u^2x^2+(C-A)^2v^2y^2+(A-B)^2w^2z^2+2(C-A)(B-A)vwyz\\ +2(A-B)(C-B)uwxz+2(A-C)(B-C)uvxy\end{array}\right\}=0.$$

Cette équation représente un cône du second degré ; la courbe E est l'intersection de ce cône et du plan donné ; cette courbe est donc une conique. Il est facile de voir que cette conique est tangente aux trois plans de coordonnées ; de plus, le plan $ux+vy+wz=0$ est tangent au cône ; par conséquent la conique E est une parabole tangente aux trois plans de coordonnées.

5° Le cône précédent étant indépendant de p, est justement le lieu des coniques E obtenues en faisant varier le plan parallèlement au plan fixe, $ux+vy+wz=0$.

6° Considérons un point (α, β, γ) du plan Π et la ligne Δ correspondante ; les équations de cette ligne sont

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1=0,$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-R^2=0,$$

avec la relation

$$u\alpha+v\beta+w\gamma+p=0.$$

En tenant compte de cette relation, les équations de la droite Δ s'écrivent

$$\alpha\left(\frac{px}{a^2}+u\right)+\beta\left(\frac{py}{b^2}+v\right)+\gamma\left(\frac{pz}{c^2}+w\right)=0,$$

$$\alpha(px+R^2u)+\beta(py+R^2v)+\gamma(pz+R^2w)=0;$$

si nous portons dans ces équations, à la place de x, y, z, les valeurs (3) qui donnent les coordonnées de chaque point de la courbe Γ, nous obtenons deux fois la même équation en λ,

$$\frac{\alpha u}{\lambda-pA}+\frac{\beta v}{\lambda-pB}+\frac{\gamma w}{\lambda-pC}=0,$$

ce qui nous montre bien qu'il y a deux points (λ_1 et λ_2) de la courbe Γ situé sur la droite Δ du point (α, β, γ).

Nous pouvons d'ailleurs déterminer α, β, γ de façon que les deux racines de cette équation soient quelconques ; par conséquent toute corde de Γ correspond à un point du plan Π.

7° Les tangentes à la courbe E ont pour équations

$$ux+vy+wz+p=0,$$

$$\frac{ux}{\lambda-pA}+\frac{vy}{\lambda-pB}+\frac{wz}{\lambda-pC}=0;$$

considérons l'une d'elles, qui répond à une valeur particulière de λ, et désignons encore par α, β, γ les coordonnées d'un de ses points ; les équations de la ligne Δ correspondante seront

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - R^2 = 0,$$

avec les relations

$$u\alpha + v\beta + w\gamma + p = 0$$

et

$$\frac{u\alpha}{\lambda - pA} + \frac{v\beta}{\lambda - pB} + \frac{w\gamma}{\lambda - pC} = 0.$$

Multiplions la première par R^2 et retranchons-en la seconde, nous aurons

$$\frac{\alpha x}{A} + \frac{\beta y}{B} + \frac{\gamma z}{C} = 0,$$

puis, en rendant la seconde homogène à l'aide de la troisième,

$$\alpha(px + R^2 u) + \beta(py + R^2 v) + \gamma(pz + R^2 w) = 0 ;$$

par conséquent le lieu de la droite Δ, immédiatement trouvé en éliminant α, β, γ entre les trois équations qui sont homogènes, est représenté par

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{z}{C} \\ px + R^2 u & py + R^2 v & pz + R^2 w \\ \frac{u}{\lambda - pA} & \frac{v}{\lambda - pB} & \frac{w}{\lambda - pC} \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons alors par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point de la courbe Γ qui correspond à la valeur λ du paramètre ; retranchons de la première ligne du déterminant la dernière multipliée par R^2, puis de la seconde la dernière multipliée par λR^2, nous aurons

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \frac{x - x_0}{A} & \frac{y - y_0}{B} & \frac{z - z_0}{C} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{u}{\lambda - pA} & \frac{v}{\lambda - pB} & \frac{w}{\lambda - pC} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente un cône du second degré ayant pour sommet le point (x_0, y_0, z_0). Il est facile de voir que c'est le cône qui de ce point projette la cubique Γ.

Désignons maintenant par α, β, γ les coordonnées d'un point de la courbe E, nous aurons les relations

$$u\alpha + v\beta + w\gamma + p = 0,$$

$$(B - C)^2 u^2 \alpha^2 + \cdots + 2(C - A)(B - A) vw\beta\gamma + \cdots = 0 ;$$

puis, en vertu de la première relation, les deux équations de la droite Δ s'écriront

$$\alpha\left(\frac{px}{a^2} + u\right) + \beta\left(\frac{py}{b^2} + v\left(\gamma + \right)\frac{pz}{c^2} + w\right) = 0,$$

$$\alpha(px + R^2 u) + \beta(py + R^2 v) + \gamma(pz + R^2 w) = 0 ;$$

de là, nous déduisons

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{\beta}{M} = \frac{\gamma}{N},$$

L, M, N étant des fonctions du second degré de x, y, z ; par conséquent, le lieu cherché est une surface du quatrième ordre,

$$(6) \qquad (B - C)^2 u^2 L^2 + \cdots + 2(C - A)(B - A) vwMN + \cdots = 0.$$

Il est facile de voir par le calcul ce que représente l'équation (6). Pour cela, revenons aux équations de la droite Δ et remplaçons-y x, y, z par les valeurs (3), pour obtenir les points communs à cette droite et à la courbe Γ; nous trouvons ainsi, comme nous l'avons déjà vu, deux fois la même équation du second degré,

$$\frac{\alpha u}{\lambda - p\mathrm{A}} + \frac{\beta v}{\lambda - p\mathrm{B}} + \frac{\gamma w}{\lambda - p\mathrm{C}} = 0,$$

et, dans le cas présent, cette équation a deux racines égales, puisque c'est en exprimant ce fait que nous avons obtenu la relation du second degré qui existe entre α, β, γ. Cela veut dire que les droites Δ envisagées sont les tangentes de la cubique Γ; par conséquent, l'équation (6) représente la développable formée par les tangentes à la courbe Γ.

Solution géométrique. — 1° Soient P_1 et P_2 les plans polaires du point M par rapport à l'ellipsoïde et à la sphère. Quand le point M décrit une droite D, le plan P_1 tourne autour de la droite D_1 polaire réciproque de D par rapport à l'ellipsoïde, et le plan P_2 tourne autour de la droite D_2 polaire réciproque de D par rapport à la sphère; les deux faisceaux de plans P_1 et P_2 sont homographiques à la série M et par conséquent homographiques entre eux; leur intersection décrit donc une quadrique passant par les droites D_1 et D_2.

2° Pour que la droite Δ passe par un point P, il faut que le point M soit dans les plans polaires du point P, c'est-à-dire sur une certaine droite D intersection de ces deux plans. Les droites correspondantes D_1 et D_2 se rencontrent alors et la quadrique engendrée par la droite Δ est un cône.

3° Nous venons de voir que pour que les droites Δ et Δ' qui correspondent à deux points M et M', se rencontrent en un certain point, il faut et il suffit que ces deux points soient sur la droite Δ qui correspond à ce point.

4° Soit Q un point du plan Π; les droites Δ qui passent en ce point engendrent un cône du second degré; il y a donc deux de ces droites situées dans le plan Π; par suite, la courbe E est de seconde classe, c'est une conique. Cette conique est tangente aux trois plans de coordonnées et au plan de l'infini, car chacune des droites d'intersection du plan Π avec ces quatre plans est une droite Δ, puisque les quatre plans signalés ont chacun le même pôle par rapport aux deux surfaces.

Soient maintenant M_1 et M_2 les deux pôles du plan Π et Δ_1, Δ_2 les deux droites qui correspondent à ces points; ces droites sont deux droites Δ du plan Π, deux tangentes particulières de la conique E. Pour qu'une droite Δ appartienne au plan Π, il faut qu'elle rencontre Δ_1 et Δ_2 et ne passe pas au point qu'elles ont en commun; or les points dont les droites Δ rencontrent Δ_1 appartiennent au cône C_1 qui correspond à cette droite, ceux dont les droites Δ rencontrent Δ_2 appartiennent au cône C_2 qui correspond à Δ_2; ces deux cônes ont en commun la droite des sommets, qui correspond au point de rencontre de Δ_1 et Δ_2, et, en outre, une cubique gauche; la ligne des sommets est à rejeter, car les droites Δ des points de cette ligne sont les droites qui passent par le point de concours de Δ_1 et Δ_2. Donc le lieu des points M qui correspondent aux tangentes à E est une certaine cubique gauche Γ, qui passe aux points M_1 et M_2.

5° Toutes les droites qui passent à l'origine sont des droites Δ; il en est de même de toutes celles qui sont parallèles à l'un des axes. Si donc on considère un plan passant par l'origine, la parabole située dans ce plan se décompose en un point situé à l'origine et un point à l'infini; les droites Δ de ce plan qui ne passent pas à l'origine sont donc parallèles; par conséquent, lorsque le plan Π se déplace en restant parallèle à un plan fixe, la conique E reste homothétique à elle-même par rapport au point O et engendre un cône du second degré ayant son sommet en ce point.

6° Par tout point du plan Π passent deux droites Δ qui correspondent à deux points de la cubique Γ; donc à tout point du plan correspond une corde de la cubique Γ et réciproquement.

7° Quand M se meut sur une tangente à E, la droite correspondante décrit un cône du second degré ayant son sommet au point de Γ qui correspond à la tangente à E, et comme, d'autre part, cette droite variable Δ est une corde de Γ, ce cône est le cône du second degré qui projette la cubique.

Enfin si le point M est sur E, les deux droites Δ qui y passent sont confondues, la corde correspondante est donc une tangente de Γ; le lieu demandé est la développable des tangentes à la cubique gauche Γ.

M. E. Barré (à Valenciennes) a envoyé une solution très complète, très détaillée de cette question, et l'a, en outre, généralisée.

QUESTIONS PROPOSÉES

612. — Autour d'un point P on fait pivoter une droite dont on prend les pôles Q, Q′ par rapport à deux coniques données.

1° L'enveloppe de la droite QQ′ est une conique (C).

2° Quelle doit être la position du point P pour qu'il soit un foyer de la conique (C)?

P. Puig, Professeur au lycée d'Agen.

613. — Lieu des centres des coniques d'excentricité donnée, tangentes aux trois cotés d'un triangle.

Construire le lieu lorsque le triangle est équilatéral. P. Puig.

614. — En un point A d'une hyperbole équilatère on mène la normale, qui rencontre la courbe en un second point A_1; en A_1 on répète la même construction, on obtient le point A_2, ..., etc; trouver les coordonnées du point A_n. Le point A_n peut-il coïncider avec le point A? P. Puig.

615. — On sait qu'il y a quatre paraboles circonscrites à un triangle et tangentes à une droite Δ. Construire ces paraboles.

Trouver l'enveloppe de Δ lorsque deux de ces paraboles ont leurs axes rectangulaires. P. Puig.

616. — Toutes les cubiques gauches passant par les sommets d'un tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires et par l'orthocentre de ce tétraèdre sont équilatères. V. Ferret d'Eperlecques.

617. — On considère une cubique gauche équilatère Γ et un triangle ABC inscrit dans Γ; puis on suppose que le plan du triangle ABC se déplace parallèlement à lui-même, et on demande :

1° Le lieu du point de concours des hauteurs du triangle ABC;

2° La surface engendrée par le cercle conjugué au triangle;

3° Cette surface est une sphère et on demande le lieu de son centre quand la direction du plan du triangle varie. (Id.)

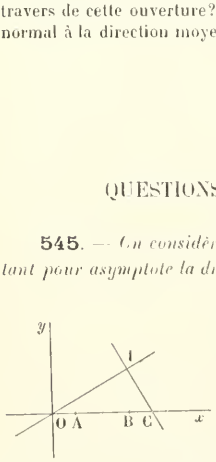
618. — Un objet lumineux AB est placé vis-à-vis d'une sphère réfringente d'indice n à une distance a du centre. Etudier les diverses positions que prend son image par réfraction quand le rayon R de la sphère varie depuis 0 jusqu'à l'infini.

619. — La surface d'une masse d'eau éclairée par le soleil est couverte d'un écran mince, opaque, percé d'une très petite ouverture de section ε. Quelle est la forme du faisceau lumineux qui pénètre dans l'eau au travers de cette ouverture? Quel éclairement produit-il sur un écran placé à une distance d de l'ouverture et normal à la direction moyenne des rayons réfractés?

DEUXIÈME PARTIE

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE NAVALE

545. — *On considère l'hyperbole équilatère passant par deux points A et B donnés sur Ox et admettant pour asymptote la droite $y = mx$. Lieux du centre et des sommets quand m varie.*



La deuxième asymptote rencontre Ox en un point fixe C défini par l'égalité OA = BC; par suite le lieu du centre I est le cercle décrit sur OC comme diamètre.

En désignant par a et b les abscisses des points A et B, l'équation de l'hyperbole s'écrit

$$(y - mx)(x + my - a - b) - mab = 0;$$

nous aurons le lieu des sommets en éliminant m entre cette équation et l'équation de l'ensemble des axes,

$$y - mx = \varepsilon(x + my - a - b), \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

On obtient ainsi

$$[x^2 + y^2 - (a+b)x]^2 - ab(x + \varepsilon y)(\varepsilon y - x + a + b) = 0;$$

Cette équation représente deux courbes du quatrième degré symétriques par rapport à Ox; nous construirons l'une d'elles, par exemple, celle qui correspond à la valeur positive de ε. Elle a pour équation

$$[x^2 + y^2 - (a+b)x]^2 - ab(x + y)(y - x + a + b) = 0.$$

Transportons l'origine des coordonnées au point qui a pour coordonnées $x = \frac{a+b}{2}$, $y = -\frac{a+b}{2}$ l'équation devient

$$[x^2 + y^2 - (a+b)y]^2 + ab(x^2 - y^2) = 0,$$

ou, en passant aux coordonnées polaires,

$$\rho = (a+b)\sin\omega \pm \sqrt{-ab\cos 2\omega}.$$

L'équation $\rho = (a+b)\sin\omega$ représente un cercle qui est le lieu du centre.

On aura donc les points de la courbe en augmentant et en diminuant les rayons vecteurs du cercle de la quantité $\sqrt{-ab\cos 2\omega}$.

En changeant ω en $\pi + \omega$, les valeurs de ρ changent de signe. Il suffit donc de faire varier ω dans un intervalle quelconque d'étendue égale à π. En changeant ω en $-\omega$, ρ change également de signe; par suite, la courbe est symétrique par rapport à Oy, nous en aurons la moitié en faisant varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

1° $ab > 0$. Pour que ρ soit réel il faut que $\cos 2\omega$ soit négatif; nous ferons varier ω de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$. ρ ne s'annule pour aucune valeur de ω, on a la figure I.

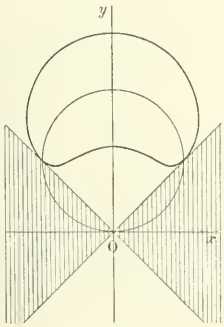


Fig. I

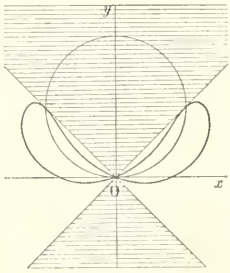


Fig. II

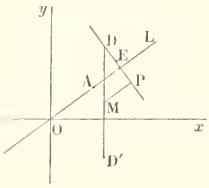
2° $ab < 0$. Pour que ρ soit réel, il faut que $\cos 2\omega$ soit positif; on doit faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{4}$. ρ s'annule pour les valeurs de ω définies par l'équation

$$\operatorname{tg}^2\omega = -\frac{ab}{a^2 + b^2 + ab};$$

on obtient la figure II.

---

546. — *On considère les hyperboles ayant un foyer à l'origine, passant par un point donné* M *et admettant une asymptote parallèle à* Oy. *Déterminer géométriquement les hyperboles qui correspondent à une direction donnée de l'axe transverse. Construire la directrice qui correspond au foyer* O *et les sommets situés sur l'axe transverse. Lieux du centre et des sommets, quand on fait tourner l'axe autour du point* O. *Construire ces deux lieux en supposant le point* M *situé sur* Ox.



On sait que dans une hyperbole la distance d'un point quelconque de la courbe au foyer est égale à la distance de ce point à la directrice correspondante, cette distance étant comptée parallèlement à une asymptote.

Menons alors par le point M une parallèle à Oy, et prenons sur cette droite un point D tel que $MD = MO$, la directrice relative au foyer O passe par le point D.

Soit OL l'axe transverse donné, la directrice considérée est la perpendiculaire abaissée du point D sur la droite OL.

Il y a une deuxième solution correspondant au point D′ symétrique du point D par rapport au point M.

L'hyperbole est bien déterminée géométriquement par le foyer O, la directrice correspondante DE et le point M. Abaissons de ce point MP perpendiculaire sur la directrice, les sommets de la courbe A et A′ sont situés sur OL et sont déterminés par les relations

$$\frac{AO}{AE} = \frac{A'O}{A'E} = \frac{MO}{MP}.$$

Pour obtenir les lieux du centre et des sommets, cherchons l'équation des hyperboles. Elle est de la forme

$$x^2 + y^2 = \lambda(ux + vy + w)^2;$$

en écrivant que l'une des asymptotes est parallèle à Oy et que la courbe passe par le point M (x_0, y_0) on a

$$1 = \lambda v^2,$$
$$x_0^2 + y_0^2 = \lambda(ux_0 + vy_0 + w)^2$$

d'où l'on tire en posant

$$x_0^2 + y_0^2 = d^2,$$
$$ux_0 + v(y_0 \pm d) + w = 0.$$

Si l'on remarque que d désigne la distance OM, on voit que cette relation exprime que la directrice passe par l'un des points D ou D′.

Posons $v = 1$, nous avons

$$w = -ux_0 - y_0 + \varepsilon d, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

et par suite l'équation générale des hyperboles est

$$x^2 + y^2 = [u(x - x_0) + y - y_0 + \varepsilon d]^2.$$

Lieu du centre. Il faut éliminer u entre les équations

$$x = u[u(x - x_0) + y - y_0 + \varepsilon d],$$
$$y = u(x - x_0) + y - y_0 + \varepsilon d;$$

on en déduit $u = \dfrac{x}{y}$, et en portant cette valeur dans la deuxième équation on a

$$x(x - x_0) - y(y_0 - \varepsilon d) = 0.$$

Le lieu se compose de deux paraboles.

Lieu des sommets. Il faut éliminer u entre l'équation de la courbe

$$x^2 + y^2 = [u(x - x_0) + y - y_0 + \varepsilon d]^2,$$

et celle de l'axe

$$x - uy = 0.$$

On obtient

$$(x^2 + y^2)y^2 = [x(x - x_0) + y(y - y_0 + \varepsilon d)]^2.$$

Supposons que le point M soit Ox, nous avons $y_0 = 0$, $d = \pm x_0$, et l'équation de la courbe devient

$$(x^2 + y^2)y^2 = (x^2 + y^2 - xx_0 \pm yx_0)^2;$$

aux deux signes correspondent deux courbes symétriques par rapport à Ox; nous construirons l'une d'elles, celle qui a pour équation

$$(x^2 + y^2)y^2 = [x^2 + y^2 - (x + y)x_0]^2.$$

Passons aux coordonnées polaires, nous avons

$$\rho^2 \sin^2 \omega = [\rho^2 - \rho(\cos \omega + \sin \omega)x_0]^2,$$

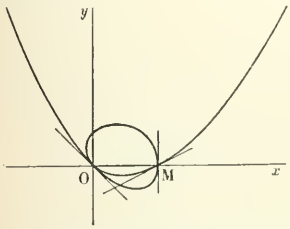
ou

$$\pm \rho \sin \omega = \rho - (\cos \omega + \sin \omega)x_0.$$

On a ainsi les deux équations

$$\rho = \frac{(\cos \omega + \sin \omega)x_0}{1 - \sin \omega}, \qquad \rho = \frac{(\cos \omega + \sin \omega)x_0}{1 + \sin \omega};$$

ces deux équations représentent la même courbe, car l'une des équations se déduit de l'autre en changeant ρ en $-\rho$ et ω en $\pi + \omega$.



Nous considérerons seulement l'équation

$$\rho = \frac{(\cos \omega + \sin \omega)x_0}{1 - \sin \omega},$$

et nous ferons varier ω de 0 à 2π.

Prenons la dérivée, nous avons

$$\rho' = \frac{(1 + \cos \omega - \sin \omega)x_0}{(1 - \sin \omega)^2},$$

et l'on reconnaît aisément que le numérateur s'annule en changeant de signe pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ et $\omega = \pi$.

On en déduit le tableau suivant :

ω	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
ρ'		+	0	—		—	0	+		+		+	
ρ	x_0	croît	$+\infty$ | $+\infty$	décroît	0	décroît	$-x_0$	croît	$-\frac{x_0}{2}$	croît	0	croît	x_0

ce qui donne la forme de la courbe.

Les branches infinies sont paraboliques, car $\rho \cos \omega$ croît indéfiniment quand ω tend vers $\frac{\pi}{2}$.

---

560. — *On donne deux cercles* O *et* O′, *le cercle* O *ayant son centre sur le cercle* O′, *et on mène d'un point* M *du cercle* O′ *les tangentes* MA, MB *au cercle* O, *qui rencontrent à nouveau le cercle* O′ *en* C *et* D. *Montrer que, lorsque* M *décrit le cercle* O′ :

1° *La droite* CD *conserve une direction fixe ;*

2° *Le point d'intersection des droites* AB, CD *décrit une droite ;*

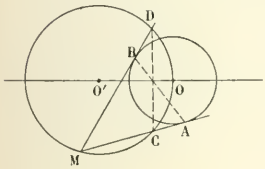
3° *Le point d'intersection des deux autres tangentes au cercle* O *menées de* C *et* D *décrit le cercle* O′.

Prenons pour axes de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle O′ ; l'un, O′x, passant par le centre du cercle O ; les équations des deux cercles seront

$$x^2 + y^2 - R'^2 = 0$$

et

$$(x - R')^2 + y^2 - R^2 = 0.$$



1° Les coordonnées d'un point quelconque du cercle O′ sont $R' \cos \varphi$, $R' \sin \varphi$ et l'équation quadratique des tangentes menées de ce point au cercle O est

$$[R'^2(\cos \varphi - 1)^2 + R'^2 \sin^2 \varphi - R^2](x - R')^2 + y^2 - R^2$$
$$- [R'(x - R') \cos \varphi - 1) + R' \sin \varphi . y - R'^2]^2 = 0 ;$$

par suite, l'équation aux coefficients angulaires de ces droites est

$$[R'^2(\cos \varphi - 1)^2 + R'^2 \sin^2 \varphi - R^2](x^2 + y^2) - [R'(\cos \varphi - 1)x + R' \sin \varphi . y]^2 = 0,$$

ou

$$(R'^2 + R'^2 \cos^2 \varphi - 2R'^2 \cos \varphi - R^2)m^2 + 2R'^2 \sin \varphi(1 - \cos \varphi)m + R'^2 \sin^2 \varphi - R^2 = 0.$$

Désignons maintenant par $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite CD; nous obtiendrons u, v, w en exprimant que les coefficients angulaires des droites MC et MD sont donnés par l'équation précédente. Formons donc l'équation aux coefficients angulaires des droites MC et MD; pour cela, portons l'origine des axes au point M et éliminons la variable d'homogénéité entre les deux équations nouvelles du cercle O′ et de la droite,

$$x^2 + y^2 + 2R'(x \cos \varphi + y \sin \varphi) = 0$$

et

$$ux + vy + R'(u \cos \varphi + v \sin \varphi) + w = 0;$$

nous aurons ainsi

$$K(x^2 + y^2) - 2R'(ux + vy)(x \cos \varphi + y \sin \varphi) = 0,$$

en posant

$$K = R'(u \cos \varphi + v \sin \varphi) + w,$$

puis

$$(K - 2R'v \sin \varphi)m^2 - 2R'(u \sin \varphi + v \cos \varphi)m + K - 2R'u \cos \varphi = 0.$$

Nous n'avons plus qu'à identifier les deux équations du second degré en m, pour avoir u, v, w; nous obtenons alors

$$K - 2R'u \cos \varphi = \lambda(R'^2 \sin^2 \varphi - R^2),$$

$$K - 2R'v \sin \varphi = \lambda(R'^2 + R'^2 \cos^2 \varphi - 2R'^2 \cos \varphi - R^2),$$

$$-2R'(u \sin \varphi + v \cos \varphi) = \lambda . 2R'^2 \sin \varphi(1 - \cos \varphi).$$

La valeur de K s'obtient immédiatement en multipliant la première équation par $\sin^2 \varphi$, la seconde par $\cos^2 \varphi$, en les ajoutant, puis tenant compte de la dernière; ensuite nous aurons u, v, w :

$$K = \lambda(R'^2 + R'^2 \cos^2 \varphi - 2R'^2 \cos \varphi - R^2),$$

$$u = \lambda R'(\cos \varphi - 1), \qquad v = 0, \qquad w = \lambda[R'^2(1 - \cos \varphi) - R^2],$$

λ étant dans toute cette suite de calculs un nombre quelconque. L'équation de la droite CD est donc

$$x - R' + \frac{R^2}{R'(1 - \cos \varphi)} = 0,$$

et l'on voit qu'elle reste toujours parallèle à l'axe des y.

2° L'équation de la polaire du point M par rapport au cercle O est

$$R'(x - R')(\cos \varphi - 1) + R' \sin \varphi \, y - R^2 = 0,$$

ou

$$x - R' + \frac{R^2}{R'(1 - \cos \varphi)} - \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} y = 0;$$

elle montre de suite que cette droite et la droite CD se coupent toujours sur la droite fixe $y = 0$ (axe des x).

3° L'équation de la droite CD ne dépend que de $\cos \varphi$; elle est donc donnée par les deux points M et M′ de paramètres φ et $2\pi - \varphi$; par conséquent les autres tangentes menées des points C et D se coupent en M′. Les deux points M et M′ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à Ox.

Solution géométrique. — 1° La bissectrice de l'angle des deux tangentes passe au centre O du premier cercle; ce point est donc le milieu de l'arc CD. Par conséquent CD est perpendiculaire au diamètre fixe O′O.

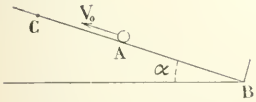
3° La droite CD étant ainsi placée, les autres tangentes menées des points C et D sont symétriques de MB et de MA par rapport à O′O; elles se coupent donc au point M′ du cercle O′, symétrique de M par rapport à O′O.

2° Les deux couples de droites MA et MB, M′A′ et M′B′, forment deux coniques doublement tangentes au cercle O; les cordes des contacts AB et A′B′ se rencontrent donc au point de concours des sécantes communes, CD et O′O. Il en résulte que le point de rencontre de CD et de AB décrit la droite fixe O′O.

Bonnes solutions géométriques : MM. G. de Trégomain ; J. Lhériaud (lycée de Toulouse).

PHYSIQUE ET CHIMIE

369. — *D'un point* A *on lance avec une vitesse* V_0, *sur un plan incliné formant avec l'horizon un angle* α, *suivant la ligne de plus grande pente, et de bas en haut, une bille mobile sans frottement, qui, après s'être élevée en un point* C *redescend et vient frapper un obstacle placé en* B *à la partie inférieure du plan.*



Un observateur placé en A *mesure le temps* T, *écoulé entre l'époque du départ du mobile et l'instant où lui parvient le bruit produit par le choc.*

On demande de calculer la distance $x = AB$.

Exemple numérique : Vitesse du son $V = 34000^{cm}$ *à la seconde,* $V_0 = 2452^{cm},5$ *à la seconde,* $g = 981^{cm}$, $T = 17^s$, $\alpha = 30^0$.

(*École Centrale, 1891, 2me session.*)

Désignons respectivement par t et t' la durée du trajet du mobile et le temps que le son met à venir de B en A.

$$T = t + t',$$

$$-x = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha,$$

$$x = V t'.$$

Éliminons t et t' ; il vient

$$g \sin \alpha \left(\frac{x}{V}\right)^2 - 2(V - V_0 + g \sin \alpha T) \frac{x}{V} + g \sin \alpha T^2 - 2V_0 T = 0,$$

d'où
$$\frac{x}{V} = \frac{V - V_0 + g \sin \alpha T \pm \sqrt{(V - V_0)^2 + 2g \sin \alpha VT}}{g \sin \alpha}.$$

La quantité $V - V_0 + \sqrt{(V - V_0)^2 + 2g \sin \alpha VT}$ est toujours positive, même quand V_0 est plus grand que V. Donc le signe + donnerait pour $\frac{x}{V}$, c'est-à-dire pour le temps que le son met à venir de B en A, une valeur supérieure à T, ce qui est inadmissible. Il faut, par conséquent, prendre le signe —.

Avec les valeurs numériques données, on trouve

$$\frac{x}{34000} = \frac{39886 - 39525}{490,5} = \frac{361}{490,5}, \qquad x = 25000^{cm}.$$

Remarque. — En supposant $V_0 = 0$ et $\alpha = 90^0$, on résout le problème connu par lequel on mesure la profondeur d'un puits :

$$\frac{x}{V} = \frac{V + gT - \sqrt{V^2 + 2gVT}}{g}.$$

---

370. — *On chauffe* $3^{gr},72$ *d'oxalate neutre de potassium sec avec un excès d'acide sulfurique concentré. Le mélange gazeux qui se dégage est dirigé dans un tube en porcelaine rempli de braise et chauffé au rouge vif, puis le gaz à sa sortie est reçu dans un tube eudiométrique sur la cuve à mercure. Quand l'expé-*

rience est terminée, on fait passer dans l'eudiomètre un certain volume d'oxygène pur, préparé par le bichromate de potassium et l'acide sulfurique concentré. On excite l'étincelle électrique et on agite le gaz restant avec un excès de lessive de potasse. On demande :

1° *Quels sont les gaz qui se dégagent avant leur passage dans le tube à braise incandescente et quel est le volume total du mélange qu'ils forment ;*

2° *Quel est le gaz recueilli dans l'eudiomètre, quel est son volume et ce qu'il devient après le passage de l'étincelle ;*

3° *Quel est le poids de bichromate de potassium nécessaire pour fournir un volume d'oxygène tel que le résidu gazeux soit nul après l'absorption par la potasse.*

On supposera les gaz secs et dans les conditions normales de température et de pression.

Poids du litre d'air : $1^{gr},293$, $\delta = 0,0694$.

Poids atomiques : $H = 1$, $C = 12$, $O = 16$, $K = 39$, $Cr = 52$.

Écrire toutes les équations et faire les croquis des appareils.

(*École Centrale, 1894, 2me session*).

Les réactions sont représentées par les équations suivantes :

$$x[C^2O^4K^2 + 2(SO^4H^2) = 2(SO^4KH) + H^2O + CO + CO^2],$$
$$x[CO + CO^2 + C = 3CO],$$
$$x[3CO + 3O = 3CO^2],$$
$$x[Cr^2O^7K^2 + 4(SO^4H^2) = SO^4K^2 + (SO^4)^3Cr^2 + 4H^2O + 3O].$$

La première donnée numérique permet de calculer x ; en effet, $C^2O^4K^2$ représentant un poids égal à 166, on doit avoir

$$x.166 = 3,72, \qquad \text{d'où} \qquad x = 0,02241.$$

Les données 1,293 et 0,0694 permettent de calculer le volume moléculaire, c'est-à-dire le volume de 2^{gr} d'hydrogène : on trouve $22^{lit},29$.

Les équations des réactions mettent alors la solution en évidence :

1° Le volume du mélange d'oxyde de carbone et de gaz carbonique est une fraction x de deux volumes moléculaires, c'est-à-dire

$$0,02241 \times 2 \times 22,29 = 1^{lit} \text{ (exactement } 0^{lit},999).$$

2° Le volume d'oxyde de carbone recueilli dans l'eudiomètre est les $\frac{3}{2}$ du précédent, ou $1^{lit},5$.

3° Le poids de bichromate est $x.Cr^2O^7K^2 = 6^{gr},588$.

CONCOURS DE 1896 (*Suite*)

École des Mines de Saint-Étienne.

Physique et Chimie.

I. — **620**. Un calorimètre de laiton pesant 500^{gr} contient 1^{kg} de glace à la température initiale de $-10°$. Avec une vitesse constante, on fait tomber dans le calorimètre un filet d'eau à 80° de façon que dans chaque minute le poids d'eau écoulé soit de 50^{gr}.

On supposera que le calorimètre ne subit aucune perte de chaleur et que le mélange se fait instantanément.

On prendra pour chaleur spécifique du laiton 0,095 ;

id. id. de la glace 0,5.

id. pour chaleur de fusion de la glace à 0°.....79^{cal}.

On demande

1° Au bout de combien de temps la température aura atteint 0° ;

2° Au bout de combien de temps elle aura atteint $+10°$;

3° D'établir la marche de la température en fonction du temps et de la représenter par une courbe. On portera les temps en abscisses et les températures en ordonnées.

II. — Lois de la dissociation.

III. — **621**. On a un mélange de sulfate de potassium et de sulfate de sodium dont le poids est de 1^{kg}.

On le dissout dans l'eau et on traite la liqueur par un excès de chlorure de baryum. Le poids du précipité est de $1^{gr},5$.

On demande quelles étaient les quantités de sulfate de sodium et de sulfate de potassium dans le mélange primitif.

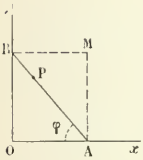
On prendra pour poids atomiques :

Baryum, 137 ; potassium, 39 ; sodium, 23 ; soufre, 32 ; oxygène, 16.

(Durée : 3 heures 1/2.)

Mathématiques.

622. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point fixe P de coordonnées x_0, y_0. Par P on mène une droite quelconque rencontrant les axes aux points A et B. Appelant φ l'angle OAP, on demande de résoudre les questions suivantes :



1° Exprimer les longueurs des côtés du triangle OAB en fonction des paramètres x_0, y_0, φ.

2° Un point M étant déterminé par la rencontre des parallèles aux axes menées par A et B, trouver le lieu de ce point M quand φ varie de manière que la droite APB pivote autour du point fixe P.

3° On considère les cercles de centres $O_1(x_1, y_1)$, $O_2(x_2, y_2)$, $O_3(x_3, y_3)$, $O_4(x_4, y_4)$ inscrit et exinscrits au triangle OAB, et un point Q dont les coordonnées x et y satisfont aux relations

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}, \qquad \frac{4}{y} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}.$$

Déterminer le lieu du point Q pour les différentes positions de AB.

4° Lieu du foyer de la parabole tangente aux axes de coordonnées respectivement en A et en B.

(Cette dernière partie est susceptible d'une solution géométrique, mais on devra en tous cas donner une solution analytique).

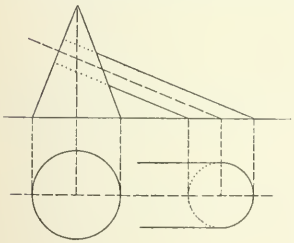
(Durée : 4 heures.)

Calcul trigonométrique.

Calculer les côtés, les angles et la surface du parallélogramme dont on connaît :

Le côté $\overline{AB} = 210^m,3672$, la diagonale $\overline{AC} = 184^m,0713$ et l'angle $\widehat{BAC} = 38° 12' 47'',50$.

(Durée : 1 heure.)



Épure de géométrie descriptive.

Intersection d'un cône droit de révolution avec un cylindre oblique à base circulaire, les axes des deux surfaces se rencontrant et le plan des axes étant parallèle au plan vertical de projection. Tangente en un point.

Représenter à part le solide commun et y figurer un certain nombre de génératrices prises à égale distance sur les circonférences de base des deux surfaces.

Développer les faces du solide commun.

(Durée : 3 heures.)

QUESTIONS PROPOSÉES

623. — Deux paraboles de grandeurs constantes tournent autour de leurs sommets respectifs, supposés fixes, de façon que par leurs quatre points de rencontre passe un cercle. Trouver :

1° Le lieu du centre de ce cercle ;

2° Le lieu du centre, l'enveloppe des axes et l'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères qui passent aux points de rencontre des deux paraboles. L. D. Bicart, lieutenant d'artillerie, à Vannes.

624. — On donne une parabole fixe et on considère une hyperbole équilatère ayant ses axes parallèles aux directions principales de la parabole, passant au sommet de cette parabole et la touchant en un autre point. On demande le lieu du centre de cette hyperbole, le lieu des sommets et le lieu du centre du cercle passant par les trois points communs.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons sur les applications géométriques de l'analyse, par Louis Raffy, chargé de cours à la Faculté des sciences, Maître de conférences à l'École normale supérieure, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1897.

L'ouvrage dont nous allons donner à nos lecteurs une rapide analyse ne peut manquer d'être accueilli avec faveur par les étudiants en mathématiques de nos facultés des sciences, car il comble une véritable lacune : les applications géométriques du calcul infinitésimal étant presque toujours disséminées dans de gros traités d'analyse où elles tiennent peu de place et semblent souvent choses complètement accessoires.

L'étudiant qui prépare sa licence, aussi bien que celui qui a pour but l'étude approfondie des sciences mathématiques, ont tous deux un grand intérêt à lire avec attention cet élégant petit volume.

Le premier y trouvera la simplicité, la clarté, la rigueur et aussi cette analyse complète des questions qui peut seule les rendre faciles, en satisfaisant pleinement l'esprit et en dissipant l'obscurité dont une étude trop superficielle ne fait que les envelopper.

Le second y trouvera une admirable préparation à l'étude de cette géométrie des surfaces qui commence à Monge et à Gauss et qui constitue, à proprement parler, la véritable géométrie supérieure de notre époque ; car l'auteur a pris soin d'indiquer, dans un cadre parfaitement composé, la plupart des questions qui se rencontrent dans cette voie et d'en faire pressentir, au moins, les solutions actuellement connues. Le lecteur, ainsi préparé, peut aborder sans crainte l'étude du remarquable ouvrage que M. Darboux a consacré à la géométrie des surfaces, et, dans lequel, il a prodigué toutes les ressources d'un esprit merveilleusement doué et pourvu de connaissances très étendues.

Dès le début, M. Raffy donne des définitions précises de ce que l'on doit entendre par lignes courbes, surfaces, points simples et points multiples; il introduit immédiatement la notion de coordonnée paramétrique d'un point sur une ligne, et celle, plus importante encore, de coordonnées curvilignes sur une surface. Puis, il passe à l'étude des éléments géométriques du premier ordre : tangente, normale, élément d'arc, pour une ligne ; plan tangent, normale, élément linéaire, pour une surface. Il aborde ensuite les trajectoires de diverses natures d'une famille de lignes et leur enveloppe, ainsi que les deux espèces d'enveloppes qui se présentent quand on envisage des systèmes de surfaces. Tout cet ensemble constitue les trois premiers chapitres du livre.

Viennent ensuite, dans les deux chapitres suivants, l'étude de la courbure et de la torsion et des éléments qui s'y rapportent, puis les formules fondamentales de la théorie des courbes, les développantes, les développées et les équations intrinsèques. Tout cela est accompagné d'applications variées, intéressantes et suggestives aux courbes les plus célèbres, beaucoup de ces applications ayant pour but de préparer le lecteur à l'étude de questions plus hautes et plus difficiles. Le chapitre V se termine par une ingénieuse définition du signe de la torsion.

Le chapitre VI est consacré aux questions de contact. J'ai remarqué particulièrement la définition nette et uniforme que l'auteur a adoptée pour le contact d'ordre n, soit qu'il s'agisse de deux courbes, soit qu'il s'agisse d'une courbe et d'une surface.

Dans les chapitres VII et VIII, l'auteur aborde la courbure des lignes tracées sur une surface et l'introduction de tous les éléments qui dérivent de cette idée : directions principales, rayons de courbure principaux, ombilics, directions conjuguées, lignes asymptotiques et lignes de courbure. L'exposé initial est fait très simplement par la considération de la droite polaire qui correspond à un point d'une ligne : l'auteur fait le plus grand usage de cette considération dans tout le cours de son livre et en déduit des démonstrations claires et uniformes. Les premiers résultats relatifs à une surface étant obtenus, tout le reste en est déduit de la façon la plus simple et la plus logique.

Le chapitre IX reprend toutes ces questions avec l'aide des coordonnées curvilignes d'un point courant sur la surface étudiée, dans un certain système de lignes coordonnées, et se termine par le théorème de Dupin et la recherche des surfaces de Joachimstal. Ce chapitre, comme tous les autres d'ailleurs, renferme de belles applications.

Le chapitre X traite des surfaces réglées : l'auteur étudie leurs principales propriétés d'abord à l'aide des équations canoniques de la droite, puis à l'aide des équations symétriques, plus communément employées aujourd'hui. Ce chapitre renferme, en particulier, une intéressante extension du principe des signes au paramètre de distribution.

Le chapitre XI renferme les applications du calcul intégral à l'évaluation des arcs, des aires et des volumes.

Il y a beaucoup à remarquer et à louer dans ce petit volume : l'enchaînement logique et réfléchi des diverses questions, l'uniformité des méthodes qui diminue les efforts imposés à la mémoire, et la précision des hypothèses faites dans chaque cas particulier qui fait connaître exactement au lecteur l'étendue et la portée de chaque théorème. M. Raffy a réussi à être original et personnel dans des questions qui depuis plus d'un siècle ont été l'objet des méditations d'une foule de géomètres distingués ; mais il a réussi encore dans une autre entreprise non moins difficile, celle de donner à ses lecteurs un modèle de bonne rédaction mathématique.

E. H.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. CORTE JACQUET

7e Année. N° 6. Mars 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

AXES DES PROJECTIONS DES SECTIONS PLANES DU CYLINDRE ET DU CONE

par M. **Achille Provost**, Maître Répétiteur au Collège Chaptal.

(Fin.)

Troisième Partie.

PROBLÈME.

Détermination des axes des deux projections de la section elliptique d'un cône de sommet donné et de directrice circulaire donnée dans le plan horizontal (fig. 5).

CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Considérons le sommet (ss') du cône comme le point de vue d'une projection conique. La section σ du cône par un plan de trace horizontale P_1, mené parallèlement au plan sécant de trace horizontale P se projette coniquement sur le plan horizontal suivant le cercle de centre o directrice du cône. Les points à l'infini sur deux diamètres conjugués de σ et le centre de σ forment un triangle autopolaire par rapport à σ et qui en projection conique reste autopolaire par rapport au cercle o ; soit $a_1b_1\omega$ ce triangle. Nous prenons *dans ce qui suit* pour section σ celle dont le plan passe par le sommet du cône. Les conclusions précédentes subsistent. Dans le triangle $a_1b_1\omega$ le point ω est la projection conique du centre de la section σ, et a_1 et b_1 sont les projections coniques des points à l'infini sur deux diamètres conjugués de σ. Les points a_1, b_1 sont sur une parallèle P_1 à la trace horizontale du plan donné, cette parallèle P_1 étant, d'après ce qui précède, la trace horizontale du plan mené parallèlement au plan donné par le sommet du cône.

En désignant par Σ la section du cône par le plan donné, on remarquera que ωa_1 et ωb_1, qui sont les projections coniques de deux diamètres conjugués de la section σ, sont aussi les projections coniques de deux diamètres conjugués de la section Σ. Les traces horizontales de ces deux diamètres conjugués de la section Σ appartiennent à la fois, en projection conique et en projection orthogonale sur le plan horizontal, à la trace horizontale P du plan donné. Par conséquent les points a et b de rencontre de P avec ωa_1 et ωb_1 sont les traces horizontales de deux diamètres conjugués de la section Σ.

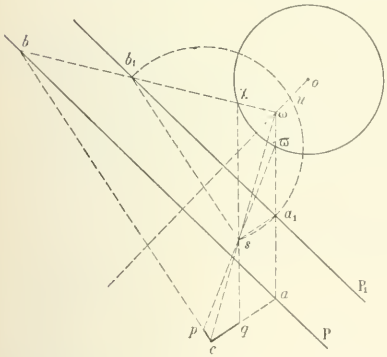


Fig. 5

1° *Axes de la projection horizontale.*

Remarquons que le centre c de la projection horizontale de la section étudiée se trouve sur $s\omega$ et qu'en outre ca et cb sont parallèles à sa_1 et à sb_1 comme étant les projections orthogonales, sur le plan horizontal, de diamètres conjugués parallèles dans Σ et σ.

Remarquons aussi que les segments ab et a_1b_1 tracés sur P et P_1 sont séparément en involution. Les directions des axes cherchés seront donc celles

suivant lesquelles on verra du point c un segment ab ou du point s un segment a_1b_1, sous un angle droit.

Nous déterminerons le segment a_1b_1 en remarquant que les circonférences de diamètres a_1b_1 passent par deux points fixes sur $o\omega$, perpendiculaire menée de o sur P_1, et symétriques par rapport à P_1. En raison de l'hypothèse dans laquelle nous nous sommes placé, ces deux points sont réels. Il est aisé de voir en outre que les circonférences dont on vient de parler sont orthogonales à la circonférence o et à la circonférence de diamètre $o\omega$, en sorte que les points fixes considérés sont les points limites ou *points de Poncelet*, de ces deux circonférences.

Soit u l'un de ces points, obtenu par l'intersection de $o\omega$ avec une circonférence orthogonale à o et dont le centre soit sur P_1. Donc :

La circonférence dont le centre est sur P_1 et qui passe par s et u, détermine le segment a_1b_1 relatif aux axes de la projection horizontale. Ces axes ont pour directions ca et cb, respectivement parallèles à sa_1 et à sb_1.

On obtiendra les extrémités des axes de la projection horizontale en remarquant que le diamètre de Σ dont la projection conique horizontale est ωa coupe le cône en un point dont la même projection conique horizontale est sur la circonférence o. Il s'ensuit que le point de rencontre ϖ de ωa avec la circonférence o détermine la projection horizontale $s\varpi$ de la génératrice passant par l'extrémité du diamètre considéré de Σ. Donc :

Le point d'intersection p de $s\varpi$ avec ca est l'un des sommets de l'axe de direction ca. L'un des sommets q de l'autre axe s'obtient par une considération semblable.

2° Axes de la projection verticale.

En raison de l'analogie de ce problème avec le problème correspondant relatif au cylindre, nous ne ferons pas de nouvelle épure et nous nous bornerons à dire que les constructions à effectuer seront identiquement celles effectuées pour le cylindre, les génératrices de ce cylindre étant remplacées par les génératrices du cône.

Problème inverse et Scolie.

Comme dans le cas du cylindre, nous aurons deux solutions du problème inverse et la plus rapide de ces deux solutions sera celle déduite de la construction des axes en projection horizontale.

Le scolie aura pour objet la détermination des sections coupant un cône, donné par son sommet et une directrice elliptique définie par deux diamètres conjugués, suivant des ellipses projetées circulairement sur un des plans de projection.

Nous donnerons seulement ici l'énoncé du problème que l'on aura à résoudre pour obtenir la solution du problème inverse et du scolie considérés. Cet énoncé s'obtient aisément par des considérations semblables à celles développées dans le cas du cylindre; nous le formulons ainsi :

Etant données quatre droites quelconques sa_1, sb_1, $s\varpi$, $s\chi$, et un point ω, situés dans un plan (fig. 5) construire un triangle ωa_1b_1 tel que son cercle conjugué passe par les points ϖ et χ de ωa_1 et ωb_1.

SUR L'ÉLIMINANT DE DEUX POLYNOMES

L'éliminant de deux polynomes est, comme on sait, une fonction entière de leurs coefficients d'un degré, par rapport aux coefficients de l'un d'eux, égal au degré de l'autre polynome.

Cet éliminant n'est pas décomposable en un produit de deux facteurs, tant que les coefficients de l'un et de l'autre polynomes restent arbitraires. C'est là une proposition dont personne ne doute ; je me propose de la démontrer rigoureusement. Il s'en suivra que, quelle que soit la méthode employée

pour arriver à la formation de l'éliminant, on obtient toujours la même fonction, abstraction faite d'un facteur numérique.

J'admettrai les théorèmes suivants :

I. Soit $f(x)$ un polynome dont les coefficients sont fonctions entières de certaines lettres $a, b, c, \ldots$; si ce polynome est divisible par un autre polynome de même nature, mais dont, de plus, les coefficients sont premiers entre eux, les coefficients du quotient sont aussi des fonctions entières de $a, b, c, \ldots$

II. Soit le polynome $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ dont les coefficients sont arbitraires. Ce polynome ne peut pas être divisible par un polynome de degré moindre et dont les coefficients sont des fonctions entières de $a_0, a_1, a_2 \ldots$

Ceci posé, soient

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m,$$
$$g(x) = b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_p$$

deux polynomes dont les coefficients sont arbitraires. Soit E l'éliminant, de degré μ par rapport aux lettres a.

Supposons que l'on ait

$$E = \varphi(a_0a_1, \ldots b_0b_1, \ldots)\psi(a_0a_1, \ldots b_0b_1, \ldots)$$

La fonction φ sera, par rapport à $b_0, b_1, \ldots, b_p$, d'un degré μ moindre que m. D'où :

$$\varphi(a_0a_1, \ldots b_0b_1 \ldots) = A_0b_p^{\mu} + A_1b_p^{\mu-1} + \cdots.$$

Les lettres A étant des fonctions entières des coefficients a et des coefficients b autres que b_p.

Posons (1) $\varphi = 0$. Cette égalité déterminera b_p en fonction des autres coefficients restés arbitraires, et les polynomes f et g auront une racine commune. Celle-ci satisfera à l'équation

$$(2) \qquad \frac{dE}{db_p}x - \frac{dE}{db_{p-1}} = 0.$$

qui ne se présente pas sous une forme illusoire, quand les a restent indéterminés. Eliminons b_p entre les équations (1) et (2). Nous obtiendrons un polynome de degré μ en x dont les coefficients seront des fonctions entières des arbitraires a et qui devrait diviser $f(x)$. C'est impossible, μ étant inférieur à m. X.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

548. — *On considère les deux paraboles* (P), (Q) *qui ont respectivement pour équations*

$$y^2 - 2x = 0, \qquad x^2 - 2y + m = 0 ;$$

combien ont-elles de points d'intersection réels ?

En un point d'intersection A, *on mène la tangente à la parabole* (P) ; *cette tangente rencontre la parabole* (Q) *en un point* A' *distinct du point* A ; *trouver le lieu du point* A' *quand* m *varie.*

Les deux paraboles (P), (Q) *ont trois tangentes communes ; on formera l'équation qui a pour racines les abscisses des points de contact sur la parabole* (Q) *et l'on montrera comment, en supposant connues les racines de cette équation, on peut déterminer les coordonnées des points de contact des tangentes communes sur les deux paraboles, ainsi que les sommets du triangle circonscrit aux deux paraboles.*

Trouver, en supposant que m *varie, le lieu du point de contact avec la parabole* (Q) *d'une tangente commune aux deux paraboles* (P), (Q) *et le lieu du point d'intersection de deux tangentes communes à ces deux paraboles.*

Quelle relation doit-il exister entre les abscisses de deux points de la parabole (R) *dont l'équation est*

$$y = 2x^2$$

pour que la droite qui joint ces deux points soit tangente à la parabole (P) ? *Démontrer qu'il y a une infinité de triangles circonscrits à la parabole* (P) *et inscrits dans la parabole* (R).

Le système des équations

$$(P) \qquad y^2 - 2x = 0,$$

$$(Q) \qquad x^2 - 2y + m = 0,$$

est équivalent au système

$$x = \frac{y^2}{2},$$

$$(1) \qquad y^4 - 8y + 4m = 0,$$

cette dernière étant obtenue en remplaçant x par $\frac{y^2}{2}$ dans l'équation de la parabole (Q) ; il en résulte que le nombre des points d'intersection réels des deux paraboles est égal au nombre des racines réelles de l'équation (1).

L'équation dérivée $4(y^3 - 2) = 0$ admet la seule racine réelle $\sqrt[3]{2}$; en la substituant dans le premier membre de l'équation (1) on a un résultat du signe de $m - \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$.

Par suite si m est plus petit que $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$, les paraboles (P) et (Q) ont deux points communs réels ; si m est plus grand que $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$, elles n'ont aucun point commun réel. Enfin si $m = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$, elles sont tangentes.

Soient x', y' les coordonnées d'un point A commun aux deux paraboles, nous avons

$$y'^2 - 2x' = 0, \qquad x'^2 - 2y' + m = 0.$$

La tangente en ce point à la parabole (P) a pour équation

$$x - x' - (y - y')y' = 0$$

ou

$$\frac{x - x'}{y'} = \frac{y - y'}{1} = \rho ;$$

par suite un point quelconque de cette droite a pour coordonnées

$$x = x' + \rho y', \qquad y = y' + \rho.$$

Ecrivons que ce point est sur la parabole (Q), nous avons

$$(x' + \rho y')^2 - 2(y' + \rho) + m = 0$$

d'où l'on tire, puisque le terme indépendant de ρ est nul,

$$\rho = \frac{2(1 - x'y')}{y'^2},$$

c'est la valeur de ρ relative au point A'. Par suite les coordonnées de ce point sont

$$x = x' + \frac{2(1 - x'y')}{y'}, \qquad y = y' + \frac{2(1 - x'y')}{y'^2},$$

ou en remplaçant x' par $\frac{y'^2}{2}$

$$(2) \qquad x = \frac{4 - y'^3}{2y'}, \qquad y = \frac{2}{y'^2}.$$

En éliminant y' entre ces deux équations nous obtenons l'équation du lieu du point A',

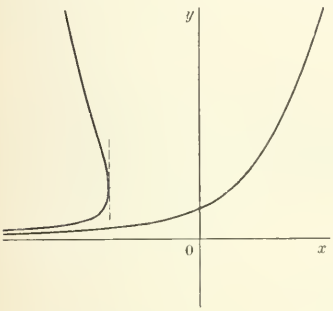
$$2y^3 - (xy + 4)^2 = 0.$$

Mais pour construire cette courbe il est préférable de se servir des formules (2) qui donnent les coordonnées d'un point du lieu en fonction du paramètre y'. On obtient aisément le tableau de variations suivant

y'	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		$\sqrt[3]{4}$		$+\infty$
x	$-\infty$	croît	$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ (max.)	décroît	$-\infty$ | $+\infty$	décroît	0	décroît	$-\infty$
y	0		croît		$+\infty$ | $+\infty$		décroît		0

et la courbe ci-contre.

La tangente au point (x, y) à la parabole (Q) a pour équation $Xx - Y - y + m = 0$,



ou en remplaçant y par $\frac{x^2+m}{2}$,

$$Xx - Y - \frac{x^2 - m}{2} = 0.$$

Ecrivons que cette droite est tangente à la parabole (P) dont l'équation tangentielle est $v^2 - 2uw = 0$, nous avons

$$(2) \qquad x^3 - mx + 1 = 0,$$

c'est l'équation demandée.

Soit x_1 une racine de cette équation ; c'est l'abscisse du point de contact sur la parabole (Q) d'une tangente commune, l'ordonnée de ce point est $\frac{x_1^2+m}{2}$, et l'équation de la tangente est

$$xx_1 - y - \frac{x_1^2 - m}{2} = 0.$$

Le point de contact sur la parabole (P) est à l'intersection de cette droite et du diamètre conjugué par rapport à ladite parabole, $-1 + x_1 y = 0$. Par suite l'ordonnée du point considéré est $\frac{1}{x_1}$, et son abscisse est donnée par l'équation

$$xx_1 - \frac{1}{x_1} - \frac{x_1^2 - m}{2} = 0,$$

d'où l'on tire $x = \frac{1}{2x_1^2}$ en remarquant que l'on a $x_1^3 - mx_1 + 1 = 0$.

Considérons enfin deux tangentes communes relatives aux racines x_1 et x_2 de l'équation (2).

$$xx_1 - y - \frac{x_1^2 - m}{2} = 0, \qquad xx_2 - y - \frac{x_2^2 - m}{2} = 0.$$

Le point de rencontre a pour coordonnées

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{x_1 x_2 + m}{2},$$

ce qu'on peut écrire en désignant par x_3 la troisième racine

$$x = -\frac{x_3}{2}, \qquad y = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_3} - m\right).$$

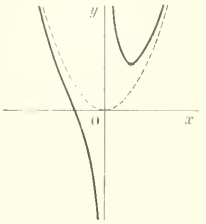
Le lieu du point de contact avec la parabole (Q) d'une tangente commune aux deux paraboles s'obtient en éliminant m entre les équations

$$x^2 - 2y + m = 0, \qquad x^3 - mx + 1 = 0,$$

ce qui donne

$$2x^3 - 2xy + 1 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire



$$y = x^2 + \frac{1}{2x};$$

on construit aisément la courbe représentée par cette équation en augmentant les ordonnées de la parabole $y = x^2$ de la quantité $\frac{1}{2x}$.

Le point où la tangente est parallèle à Ox a pour coordonnées $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ et $\frac{3\sqrt[3]{4}}{4}$.

Nous avons vu plus haut que le point de rencontre de deux tangentes communes aux deux paraboles (P, Q) avait pour coordonnées

$$x = -\frac{x_3}{2}, \qquad y = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_3} - m\right),$$

x_3 étant racine de l'équation

$$x_3^3 - mx_3 + 1 = 0.$$

On aura le lieu de ce point en éliminant x_3 et m entre ces trois équations. Le calcul ne présente aucune difficulté, on obtient $y = 2x^2$, c'est l'équation de la parabole (R).

Soient x' et x'' les abscisses de deux points de cette courbe, la droite qui joint ces deux points a pour équation

$$\frac{y - 2x'^2}{x - x'} = \frac{2(x''^2 - x'^2)}{x'' - x'},$$

ou

$$2x(x' + x'') - y - 2x'x'' = 0.$$

Pour que cette droite soit tangente à la parabole (P) il faut qu'on ait

$$8x'x''(x' + x'') - 1 = 0.$$

Pour établir qu'il existe une infinité de triangles circonscrits à la parabole (P) et inscrits dans la parabole (R), prenons un point arbitraire A_1 sur (R), et de ce point menons des tangentes à (P). Ces tangentes rencontrent la parabole (R) aux points A_2 et A_3 ; tout revient à démontrer que la droite A_2A_3 est tangente à (P).

Soient x_1, x_2, x_3 les abscisses des points A_1, A_2, A_3, nous avons

$$8x_1x_2(x_1 + x_2) - 1 = 0,$$
$$8x_1x_3(x_1 + x_3) - 1 = 0;$$

éliminons x_1 entre ces deux équations. En les retranchant membre à membre on a $x_1 = -(x_2 + x_3)$, et en remplaçant x_1 par cette valeur dans la première équation, il vient

$$8x_2x_3(x_2 + x_3) - 1 = 0,$$

ce qui prouve que la droite A_2A_3 est tangente à la parabole (P).

G. DE TRÉGOMAIN (Collège Stanislas).

Autre solution par M. Joanny GAUTHIER, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne.

---

551. — *On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et on considère les paraboles P tangentes en O à Ox.*

1° *Déterminer la relation qui doit exister entre les deux paramètres restant dans l'équation de P, de telle façon, qu'à chaque instant, les axes des paraboles P touchent leur enveloppe au foyer correspondant. Cette relation dépend d'une constante arbitraire qu'on fixera pour la suite de la question.*

2° *Lieu commun qui constitue le lieu des foyers et l'enveloppe des axes des paraboles P.*

3° *Lieu des projections de O sur les axes des paraboles P.*

4° *Lieu des sommets et enveloppe des tangentes aux sommets des paraboles P. Déterminer les points d'inflexion du premier de ces lieux.*

5° *Enveloppe des directrices des paraboles P.*

1. L'équation générale des paraboles tangentes en O à Ox est

$$(y - mx)^2 - 2\lambda y = 0.$$

L'axe de la parabole qui correspond aux valeurs m et λ des paramètres est le diamètre conjugué des cordes ayant $-\frac{1}{m}$ pour coefficient angulaire ; il a donc pour équation

$$mf'_x - f'_y = 0,$$

ou

$$(m^2 + 1)(y - mx) - \lambda = 0.$$

En regardant λ comme une fonction de m, cette droite, variable avec m, admet une enveloppe dont le point de contact avec elle vérifie l'équation dérivée par rapport à m,

$$2my - (3m^2 + 1)x - \frac{d\lambda}{dm} = 0.$$

Cherchons maintenant les coordonnées du foyer et exprimons qu'elles vérifient cette dernière équation, nous aurons $\frac{d\lambda}{dm}$ en fonction de m.

Il est avantageux, dans le cas actuel, de chercher d'abord l'équation de la directrice, puis de déterminer le foyer comme pôle de la directrice. La directrice est le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires ; nous en aurons donc un point en cherchant la tangente parallèle à Oy, c'est-à-dire pour quelle valeur de x les deux valeurs de y fournies par l'équation de la parabole sont confondues ; nous trouvons ainsi $x = -\frac{\lambda}{2m}$. L'équation de la directrice est donc

$$y + \frac{1}{m}\left(x + \frac{\lambda}{2m}\right) = 0,$$

ou

(1) $$2m(x + my) + \lambda = 0.$$

Les coordonnées du foyer sont fournies par les équations

$$\frac{1}{2}f'_x = 2\theta m, \qquad \frac{1}{2}f'_y = 2\theta m^2, \qquad \frac{1}{2}f'_z = \theta\lambda.$$

ou

$$y - mx = -2\theta, \qquad y - mx - \lambda = 2m^2\theta, \qquad y = -\theta;$$

nous déduisons de là sans peine

(2) $$x = -\frac{\lambda}{2m(1 + m^2)}, \qquad y = \frac{\lambda}{2(1 + m^2)}.$$

Exprimons maintenant que ces nombres vérifient l'équation $\frac{d\lambda}{dm} = 2my - (3m^2 + 1)x$, nous aurons

$$\frac{d\lambda}{dm} = \frac{\lambda m}{1 + m^2} + \frac{\lambda(3m^2 + 1)}{2m(1 + m^2)},$$

puis

$$\frac{d\lambda}{dm} = \lambda\frac{3m^2 + 1}{2m(1 + m^2)},$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dm} = \frac{1}{2m} + \frac{2m}{1 + m^2},$$

et enfin

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dm}{2m} + \frac{2m\,dm}{1 + m^2}.$$

L'intégration de cette équation est immédiate et donne

$$\mathrm{L}\frac{\lambda}{\mathrm{C}} = \mathrm{L}\sqrt{m} + \mathrm{L}(1 + m^2);$$

ou, mieux,

(3) $$\lambda = \mathrm{C}\sqrt{m}(1 + m^2).$$

C désignant une constante arbitraire, que nous supposerons déterminée et fixée dans tout ce qui suit.

2. Les formules (2) deviennent alors

$$x = -\frac{C}{2\sqrt{m}}, \qquad y = \frac{C\sqrt{m}}{2};$$

le lieu des foyers a donc pour équation $4xy + C^2 = 0$. C'est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les deux axes de coordonnées.

3. L'équation de l'axe de la parabole correspondant à la valeur m du paramètre devient

$$y - mx - C\sqrt{m} = 0,$$

ou, en posant

$$\sqrt{m} = \mu,$$

$$y - \mu^2 x - C\mu = 0.$$

Le lieu des projections de l'origine sur cette droite s'obtient en éliminant μ entre cette équation et $\mu^2 y + x = 0$, qui est perpendiculaire à cet axe ; la dernière équation donne d'abord $\mu^2 = -\frac{x}{y}$, puis, la première $\mu = \frac{x^2 + y^2}{Cy}$; en portant cette valeur dans la relation $\mu^2 y + x = 0$, on a le lieu cherché.

(4) $$(x^2 + y^2)^2 + C^2 xy = 0.$$

C'est la podaire par rapport à l'origine de l'hyperbole précédente.

4. Le sommet est l'intersection de l'axe et de la parabole ; il est donc déterminé par les deux équations

$$(y - \mu^2 x)^2 - 2C\mu(1 + \mu^4)y = 0,$$

$$y - \mu^2 x - C\mu = 0.$$

Remplaçons dans la première $y - \mu^2 x$ par $C\mu$, nous aurons $y = \frac{C\mu}{2(1 + \mu^4)}$; portons ensuite cette valeur de y dans la seconde équation, nous aurons x, $x = -\frac{C(1 + 2\mu^4)}{2\mu(1 + \mu^4)}$. Le lieu des sommets est donc la courbe du cinquième ordre représentée par les deux équations

(5) $$x = -\frac{C(1 + 2\mu^4)}{2\mu(1 + \mu^4)}, \qquad y = \frac{C\mu}{2(1 + \mu^4)}.$$

Il serait facile de construire cette courbe ; nous allons nous borner à trouver ses points d'inflexion. Pour cela, nous annulerons la dérivée de $\frac{y'}{x'}$.

Nous avons d'abord

$$y' = \frac{C}{2}\frac{1 - 3\mu^4}{(1 + \mu^4)^2}, \qquad x' = \frac{C}{2\mu^2}\frac{2\mu^8 - \mu^4 + 1}{(1 + \mu^4)^2},$$

puis

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\mu^2(1 - 3\mu^4)}{2\mu^8 - \mu^4 + 1};$$

prenons comme paramètre variable $\mu^2 = t$, nous aurons $\frac{y'}{x'} = \frac{t(1 - 3t^2)}{2t^4 - t^2 + 1}$; l'équation $D_t\left(\frac{y'}{x'}\right) = 0$ donne alors les paramètres des points d'inflexion ; nous trouvons ainsi

$$6t^6 - 3t^4 - 8t^2 + 1 = 0,$$

équation qui admet la racine inacceptable $t^2 = -1$, puis les deux racines acceptables de l'équation du second degré

$$6t^4 - 9t^2 + 1 = 0.$$

La tangente au sommet est la perpendiculaire à l'axe menée par le sommet ; elle a donc pour équation

$$\mu^2 y + x - k = 0,$$

k étant déterminé par la condition que l'équation soit vérifiée pour les coordonnées du sommet ; cela donne $k = -\frac{C}{2\mu}$, et, par suite, l'équation de la tangente au sommet

$$\mu^2 y + x + \frac{C}{2\mu} = 0.$$

L'enveloppe de cette droite est une courbe de troisième classe dont l'équation tangentielle s'obtient en éliminant θ et μ entre les trois équations $\theta u = \mu^2$, $\theta v = 1$, $\theta w = \frac{C}{2\mu}$; ce calcul se fait sans difficulté et donne

$$4uw^2 = C^2 v^3. \tag{6}$$

L'équation ponctuelle de cette même enveloppe s'obtient en exprimant que l'équation en μ,

$$\mu^3 y + \mu x + \frac{C}{2} = 0,$$

a une racine double ; cela donne

$$16x^3 + 27C^2 y = 0. \tag{7}$$

5. Nous avons trouvé antérieurement pour équation de la directrice

$$2mx + 2m^2 y + \lambda = 0,$$

λ ayant pour expression $C\sqrt{m}(1 + m^2)$; donc, en posant comme antérieurement $\sqrt{m} = \mu$, nous obtenons pour équation de la directrice

$$2\mu x + 2\mu^3 y + C(1 + \mu^4) = 0.$$

Cette droite enveloppe une courbe de quatrième classe dont l'équation tangentielle provient de l'élimination de θ et μ entre les relations $\theta u = 2\mu$, $\theta v = 2\mu^3$, $\theta w = C(1 + \mu^4)$; en divisant les deux premières l'une par l'autre, on a $\mu^2 = \frac{v}{u}$; la dernière donne alors $\theta = \frac{C}{w}\frac{u^2 + v^2}{u^2}$, et, en portant dans la première élevée au carré, on a finalement

$$C^2(u^2 + v^2)^2 = 4uvw^2. \tag{8}$$

Cette courbe est doublement tangente à la droite de l'infini aux points situés sur les axes de coordonnées.

Dérivons maintenant l'équation de la droite par rapport à μ et résolvons par rapport à x et à y, nous aurons les équations de l'enveloppe en fonction du paramètre μ,

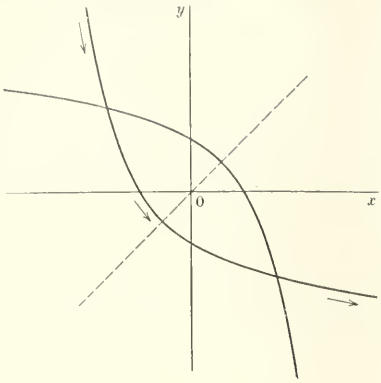
$$x = -\frac{C}{4\mu}(3 - \mu^4), \qquad y = \frac{C(1 - 3\mu^4)}{4\mu^3}, \tag{9}$$

et ces équations montrent que la courbe est du quatrième ordre.

Pour terminer, construisons cette courbe. Le changement de μ en $-\mu$ change x en $-x$, y en $-y$; l'origine est donc un centre de symétrie, et nous aurons l'une des moitiés de la courbe en faisant varier μ de 0 à $+\infty$; nous avons de suite

$$x' = \frac{3C(1 + \mu^4)}{4\mu^2}, \qquad y' = -\frac{3C(1 + \mu^4)}{4\mu^4},$$

ce qui montre, en supposant pour fixer les idées $C > 0$, que x croît toujours et que y décroît toujours.



Quand μ part de 0, x part de $-\infty$ et y de $+\infty$; y devient nul pour $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$, x, pour $\mu = \sqrt{3}$; enfin, pour μ infini, x devient $+\infty$ et y, $-\infty$.

D'autre part, si l'on change μ en $\frac{1}{\mu}$ x se change en y et y en x, la branche que nous construisons est donc symétrique par rapport à la première bissectrice. La courbe se tracera immédiatement quand nous connaîtrons la nature de ses branches infinies et les asymptotes, s'il y a lieu. Or on a $\frac{y'}{x'} = -\frac{1}{\mu^2}$; la première branche infinie est donc parabolique et parallèle à Oy, la seconde est aussi parabolique et parallèle à Ox.

E. BARRÉ, à Valenciennes.

---

552. — *On considère l'hyperbole équilatère* (H) $xy - k^2 = 0$, *une droite fixe* (D) $x - d = 0$ *et une droite mobile* (D_1) $y - x + \rho = 0$.

1° *Équation générale de la famille des coniques qui passent par l'origine, par les points communs à* (H) *et à* (D_1) *et dont l'une des asymptotes est la droite fixe* (D).

2° *Déterminer les coniques singulières de la famille.*

3° *Déterminer et construire l'enveloppe des coniques* (C). *Le degré de l'enveloppe peut-il s'abaisser?*

4° *Déterminer et construire l'enveloppe de la seconde asymptote* (Δ).

5° *Par un point* M *du plan passent deux coniques* (C) *et* (C'), *de centres* ω *et* ω', *auxquelles correspondent deux asymptotes* (Δ) *et* (Δ') *se coupant en un point* μ. *Connaissant les coordonnées de* M, *trouver celles de* μ *et réciproquement; définir géométriquement la correspondance entre* μ *et* M.

6° *Lieu des points* μ *tel que le quadrilatère* $\mu O\omega\omega'$ *soit inscriptible dans une circonférence.*

7° *Dans cette hypothèse, construire le lieu du point* M.

1. L'équation générale des coniques passant par les points de rencontre de l'hyperbole (H) et de la droite (D_1) est

$$xy - k^2 + (y - x + \rho)(ux + vy + w) = 0.$$

Écrivons successivement que cette conique passe par l'origine et admet pour asymptote la droite $x - d = 0$, nous avons

$$-k^2 + \rho w = 0, \qquad v = 0, \qquad d + ud + w = 0.$$

On en déduit $w = +\frac{k^2}{\rho}$, $u = -\frac{\rho d + k^2}{\rho d}$, et, par suite, l'équation générale demandée est

$$(1) \qquad x^2(k^2 + \rho d) - k^2xy - x(d\rho^2 + k^2\rho + k^2d) + k^2dy = 0.$$

2. Pour que cette équation représente une conique singulière il faut que le discriminant du premier membre soit nul, ce qui donne la condition $\rho(\rho d + k^2 - d^2) = 0$.

On doit donc avoir ou bien $\rho = 0$, dans ce cas la conique se réduit aux droites $(y - x)(x - d) = 0$, ou bien $\rho = \frac{d^2 - k^2}{d}$, dans ce cas la conique se compose des droites $(d^2x - k^2y)(x - d) = 0$.

Ces résultats pouvaient être prévus géométriquement; dans la première hypothèse ($\rho = 0$) la droite (D_1) passe par l'origine; dans la deuxième $\left(\rho = \frac{d^2 - k^2}{d}\right)$, la droite ($D_1$) passe par le point de rencontre de l'hyperbole (H) et de la droite (D).

3. Ordonnons l'équation (1) par rapport à ρ, nous avons

$$-\rho^2 dx + \rho x(dx - k^2) + k^2(x - y)(x - d) = 0,$$

et écrivons que cette équation a une racine double, nous obtenons

$$x^2(dx - k^2)^2 + 4k^2 dx(x - y)(x - d) = 0,$$

c'est l'équation de l'enveloppe des coniques (C).

Le premier membre est divisible par x; l'existence de ce facteur s'explique en observant que pour $x = 0$, l'équation du second degré en ρ a une racine double infinie. La conique correspondante à cette racine se réduit à l'axe Oy et à la droite de l'infini.

En excluant cette solution singulière, l'équation de l'enveloppe peut s'écrire

$$y = \frac{x[(dx + k^2)^2 - 4k^2d^2]}{4k^2d(x - d)},$$

ou

$$y = \frac{x(dx + k^2 + 2kd)(dx + k^2 - 2kd)}{4k^2d(x - d)}.$$

Les valeurs de x qui annulent le numérateur sont 0, $-\frac{k^2 + 2kd}{d}$ et $-\frac{k^2 - 2kd}{d}$; en outre le dénominateur s'annule pour $x = d$.

On peut toujours supposer d et k positifs; cela étant, deux hypothèses sont à faire :

1° $k > 2d$. Les valeurs remarquables de x se succèdent dans l'ordre suivant :

$$-\frac{k^2 + 2kd}{d}, \qquad -\frac{k^2 - 2kd}{d}, \qquad 0, \qquad d;$$

on en déduit la forme de courbe ci-dessous (*fig.* I).

2° $k < 2d$. On a la suite croissante

$$-\frac{k^2 + 2kd}{d}, \qquad 0, \qquad -\frac{k^2 - 2kd}{d}, \qquad d,$$

et la forme de courbe (*fig.* II).

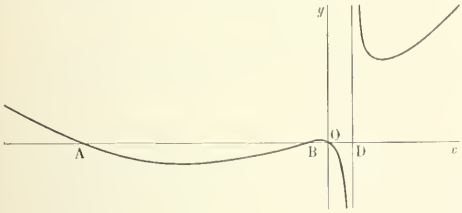


Fig. I

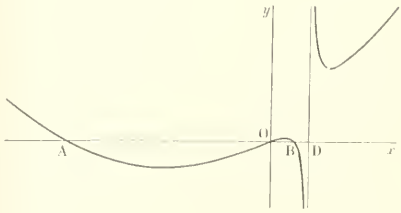


Fig. II

Les points A, B, D ont respectivement pour abscisses $-\frac{k^2 + 2kd}{d}$, $-\frac{k^2 - 2kd}{d}$, d.

Si $k = 2d$, le point B se confond avec le point O, la courbe est tangente à l'origine à l'axe des x.

Pour que le degré de l'enveloppe s'abaisse, il faut et il suffit que le numérateur de y s'annule pour $x = d$. En excluant l'hypothèse $d = 0$, cette circonstance ne peut se présenter que si l'on a $-\frac{k^2 - 2kd}{d} = d$, ou $k = d$. Dans ce cas, l'enveloppe se compose de la droite (D) et d'une parabole ayant pour équation

$$y = \frac{x(x + 3d)}{4d}.$$

Dans le cas général l'équation de l'enveloppe peut s'écrire

$$y = \frac{d^2x^2 + d(d^2 + 2k^2)x + (d^2 - k^2)^2}{4k^2d} + \frac{(d^2 - k^2)^2}{4k^2(x - d)},$$

et sous cette forme on reconnaît que la courbe construite plus haut admet la parabole asymptote qui a pour équation

$$y = \frac{d^2x^2 + d(d^2 + 2k^2)x + (d^2 - k^2)^2}{4k^2d}.$$

4 L'équation générale des coniques (C) peut être écrite

$$(x - d)[(k^2 + \rho d)x - k^2y + \rho(d^2 - k^2 - \rho d)] + d\rho(d^2 - k^2 - \rho d) = 0\,;$$

par suite, l'équation de la deuxième asymptote est

$$(k^2 + \rho d)x - k^2y + \rho(d^2 - k^2 - \rho d) = 0,$$

ou

$$\rho^2 d - \rho(dx + k^2 - d^2) + k^2(x - y) = 0.$$

L'enveloppe de cette droite a donc pour équation

$$(dx + k^2 - d^2)^2 - 4k^2d(x - y) = 0;$$

elle représente une parabole facile à construire.

5. Écrivons que l'équation (1) est vérifiée par les coordonnées x_0, y_0 du point M, nous avons

$$-\rho^2dx_0 + \rho x_0(dx_0 - k^2) + k^2(x_0 - y_0)(x_0 - d) = 0.$$

Cette équation admet deux racines ρ et ρ' auxquelles correspondent deux coniques (C) et (C'). Les asymptotes (Δ) et (Δ') ont pour équations

$$(k^2 + \rho d)x - k^2y + \rho(d^2 - k^2 - \rho d) = 0,$$
$$(k^2 + \rho' d)x - k^2y + \rho'(d^2 - k^2 - \rho' d) = 0.$$

Les coordonnées du point de rencontre μ sont

$$x_1 = \frac{k^2 - d^2 + d(\rho + \rho^2)}{d},$$

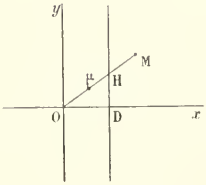
$$y_1 = \frac{d^2\rho\rho' + k^2d(\rho + \rho') + k^2(k^2 - d^2)}{k^2d},$$

ou en remplaçant $\rho + \rho'$ par $\dfrac{dx_0 - k^2}{d}$ et $\rho\rho'$ par $-\dfrac{k^2(x_0 - y_0)(x_0 - d)}{dx_0}$

$$x_1 = x_0 - d, \qquad y_1 = \frac{y_0(x_0 - d)}{x_0}\,;$$

on en déduit aisément

$$x_0 = x_1 + d, \qquad y_0 = \frac{y_1(x_1 + d)}{x_1}.$$



On voit alors que les points M et μ sont situés sur une même droite passant par l'origine, et, en désignant par H, le point où cette droite rencontre la droite (D), on a

$$\overline{O\mu} = \overline{HM}\,;$$

ce qui résulte d'ailleurs d'une propriété bien connue des asymptotes de l'hyperbole.

6. Les points ω et ω' sont situés sur la droite (D) et respectivement sur les asymptotes (Δ) et (Δ'); ils ont même abscisse d et pour ordonnées

$$y = \frac{-\rho^2d + \rho(2d^2 - k^2) + k^2d}{k^2}, \qquad y' = \frac{-\rho'^2d + \rho'(2d^2 - k^2) + k^2d}{k^2}.$$

Considérons un cercle passant par l'origine

$$X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y = 0\,;$$

écrivons que ce cercle passe par le point μ, nous avons

$$(2) \qquad x_1^2 + y_1^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1 = 0.$$

Pour écrire qu'il passe par les points ω et ω', il suffit d'exprimer que l'équation

$$Y^2 - 2\beta Y + d^2 - 2\alpha d = 0$$

a pour racines y et y', ce qui donne

$$(3) \qquad 2\beta = y + y', \qquad d^2 - 2\alpha d = yy'.$$

On a

$$y + y' = \frac{-d(\rho^2 + \rho'^2) + (\rho + \rho')(2d^2 - k^2) + 2k^2 d}{k^2},$$

$$yy' = \frac{d^2\rho^2\rho'^2 - \rho\rho(\rho + \rho')d(2d^2 - k^2) - k^2 d^2(\rho^2 + \rho'^2) + \rho\rho'(2d^2 - k^2)^2 + k^2 d(\rho + \rho')(2d^2 - k^2) + k^4 d^2}{k^4}.$$

D'autre part

$$\rho + \rho' = \frac{dx_0 - k^2}{d}, \qquad \rho\rho' = \frac{-k^2(x_0 - y_0)(x_0 - d)}{dx_0},$$

ou en remplaçant x_0 et y_0 en fonction de x_1 et y_1

$$\rho + \rho' = \frac{dx_1 + d^2 - k^2}{d}, \qquad \rho\rho' = \frac{k^2(y_1 - x_1)}{d}.$$

Il est alors facile d'exprimer $y + y'$ et yy' en fonction de x_1 et y_1 ; on obtient toutes réductions faites

$$y + y' = \frac{-dx_1^2 - k^2 x_1 + 2k^2 y_1 + d^3}{k^2},$$

$$yy' = \frac{d^2 x_1^2 - (k^2 + 2d^2)x_1 y_1 + k^2 y_1^2 - 2d^3 x_1 + dy_1(2d^2 + k^2) + d^4}{k^2}.$$

Les formules (3) nous donnent alors les valeurs de α et β en fonction des coordonnées du point μ ; portons ces valeurs dans la relation (2), nous obtenons l'équation du lieu

$$k^2(x_1 - d)y_1^2 - (d^2 + k^2)(x_1 - d)^2 y_1 + dx_1(x_1 - d)(dx_1 + k^2 - d^2) = 0.$$

Divisons par $x_1 - d$ et supprimons les indices, il vient

$$k^2 y^2 - (d^2 + k^2)(x - d)y + dx(dx + k^2 - d^2) = 0,$$

ou

$$(4) \qquad (x - y)(d^2 x - k^2 y) + dx(k^2 - d^2) + dy(k^2 + d^2) = 0.$$

Cette équation représente une hyperbole qui passe par l'origine et qui admet pour asymptotes les droites

$$x - y + \frac{2k^2 d}{d^2 - k^2} = 0,$$

$$d^2 x - k^2 y - \frac{d(d^4 + k^4)}{d^2 - k^2} = 0.$$

Dans le cas particulier où $d = k$, l'équation se réduit à

$$(x - y)^2 + 2dy = 0,$$

elle représente une parabole.

7. L'équation du lieu du point M s'obtient en remplaçant dans l'équation (4) x par $x - d$ et y par $\frac{y(x-d)}{x}$. On a ainsi, après avoir supprimé le facteur $x - d$,

$$x(x - y)(d^2 x - k^2 y) + d[(k^2 - 2d^2)x^2 + 2(k^2 + d^2)xy - k^2 y^2] = 0.$$

On voit que le lieu du point M est une courbe du troisième degré admettant à l'origine un point double à tangentes réelles et distinctes. Elle a trois asymptotes réelles dont l'une est la droite (D).

La construction de cette courbe ne présente pas de difficulté.

E. BARRÉ, à Valenciennes.

M. G. de Trégomain (collège Stanislas) a résolu cette question.

553. — *On considère trois points* O, A, B *et une droite* Δ.

1° *Trouver sur cette droite les deux points* M *et* M′ *tels que la parabole tangente aux deux couples de droites* MA, MB *et* M′A, M′B *ait pour foyer le point* O.

2° *Quand on suppose fixe l'un des points* M *ou* M′ *et que l'on fixe en outre l'un des points* A *ou* B, *l'autre décrit une droite ; cette droite est la polaire de l'autre point par rapport à une certaine conique* (S).

3° *Trouver, quand le point fixé sur la droite* Δ *décrit cette droite, les lieux des sommets et des foyers de la conique* (S).

1. Prenons pour axe des x une perpendiculaire à la droite Δ menée par le point O et pour axe des y une parallèle à la droite Δ menée aussi par le point O. Désignons par h l'abscisse de la droite Δ, par a, b les coordonnées de A et par a', b' celles de B, par λ et λ' les ordonnées des points M et M′.

La parabole étant inscrite dans un quadrilatère dont A et B sont deux sommets opposés, M et M′ deux autres sommets opposés, a pour équation

$$(au + bv + w)(a'u + b'v + w) - (hu + \lambda v + w)(hu + \lambda' v + w) = 0 ;$$

il faut exprimer en outre que l'origine est un foyer, c'est-à-dire que les tangentes menées par ce point ont pour coefficients angulaires $+i$ et $-i$; or ces coefficients angulaires s'obtiennent en faisant $w = 0$ dans l'équation de la parabole ; on obtient ainsi

$$(au + bv)(a'u + b'v) - (hu + \lambda v)(hu + \lambda' v) = 0,$$

qui doit se réduire à $u^2 + v^2 = 0$; par suite, on a les deux relations

$$ab' + ba' - h(\lambda + \lambda') = 0,$$
$$aa' - bb' - h^2 + \lambda\lambda' = 0,$$

qui donnent $\lambda + \lambda'$ et $\lambda\lambda'$. Les deux valeurs de λ sont donc racines de l'équation

$$(1) \qquad h\lambda^2 - (ab' + ba')\lambda + h(bb' - aa' + h^2) = 0.$$

2. Si l'on se donne l'un des points M ou M′, il faut regarder λ comme étant donné dans l'équation (1) ; alors cette équation est une relation bilinéaire entre les coordonnées des points A et B ; de plus, elle contient symétriquement les deux couples (a, b) et (a', b') ; par conséquent, si a et b sont fixes, elle exprime que le point (a', b') décrit une droite qui est la polaire du point (a, b) par rapport à une certaine conique. Pour avoir l'équation de cette conique, écrivons la relation (1) sous la forme

$$af'_x + bf'_y + f'_z = 0, \qquad \text{ou} \qquad a' = x, \qquad b' = y,$$

les coefficients de a, b et le terme indépendant seront, comme il est indiqué, les dérivées partielles du premier membre de l'équation de la conique, et, par suite, cette équation sera

$$xf'_x + yf'_y + f'_z = 0.$$

Il n'y a donc qu'à faire $a = a' = x$, $b = b' = y$ dans la relation (1) pour avoir l'équation demandée ; on trouve ainsi

$$(2) \qquad h(y^2 - x^2) - 2\lambda xy + h(\lambda^2 + h^2) = 0.$$

3. Cette conique est une hyperbole équilatère qui a son centre à l'origine ; donc les axes ont pour équation quadratique

$$xf'_y - yf'_x = 0,$$

ou

$$\lambda(y^2 - x^2) + 2hxy = 0.$$

Le lieu des sommets s'obtient en éliminant λ entre cette équation et celle de l'hyperbole ; il a pour équation

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)^2(x^2 - y^2 - h^2) = 0.$$

Ce lieu se dédouble en un lieu exceptionnel, $(x^2 + y^2)^2 = 0$, qui correspond aux deux hyperboles équilatères exceptionnelles relatives aux valeurs $\lambda = \pm hi$, et en une hyperbole équilatère, $x^2 - y^2 - h^2 = 0$, qui est le véritable lieu.

Pour avoir le lieu des foyers, il suffit de former le faisceau quadratique des tangentes issues d'un point (x, y) et d'exprimer que les parallèles menées par l'origine à ces droites ont pour équation $X^2 + Y^2 = 0$, puis, entre les deux relations obtenues, d'éliminer λ. On obtient d'abord pour les tangentes,

$$[h(y^2-x^2)-2\lambda xy+h(\lambda^2+h^2)][h(Y^2-X^2)-2\lambda XY+h(\lambda^2+h^2)]-[(hx+\lambda y)X+(\lambda x-hy)Y-h(\lambda^2+h^2)]^2=0,$$

puis, pour les parallèles menées par l'origine,

$$[h(y^2-x^2)-2\lambda xy+h(\lambda^2+h^2)][h(Y^2-X^2)-2\lambda XY]-[(hx+\lambda y)X+(\lambda x-hy)Y]^2=0;$$

cette dernière équation se réduit à

$$(h^2+\lambda^2)[(y^2+h^2)X^2+2(h^2\lambda-xy)XY+(x^2-h^2)Y^2]=0.$$

Nous voyons qu'elle devient identiquement nulle pour $\lambda = \pm hi$, et ceci se comprend de soi si l'on remarque pour ces valeurs l'hyperbole (2) se réduit à deux droites confondues. $(y-ix)^2=0$ ou $(y+ix)^2=0$. Pour les autres valeurs de λ, l'équation précédente prend la forme $X^2+Y^2=0$, quand on a

$$x^2-y^2-2h^2=0 \qquad \text{et} \qquad xy-\lambda h^2=0;$$

la première relation étant indépendante de λ représente le lieu des foyers. Dès que nous avons eu le lieu des sommets celui des foyers était d'ailleurs évident, puisqu'il est homothétique du premier par rapport à l'origine et dans le rapport $\sqrt{2}$.

G. de TRÉGOMAIN (collège Stanislas).

Bonne solution : M. E. BAYLE, à Oriol.

---

563. — *On donne comme indices aux deux lettres x et X les n premiers nombres successifs* $1, 2, 3, \ldots, n$ *et l'on forme ainsi les $2n$ quantités :*

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_{n-1},\ x_n,$$
$$X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots X_{n-1},\ X_n.$$

A l'aide de ces $2n$ quantités, on forme les N expressions algébriques suivantes classées en n groupes :

1er groupe constitué à l'aide de l'indice 1 *et renfermant 2 expressions algébriques :*
$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \\ X_1 \end{array}\right.$$

2me groupe constitué à l'aide des indices 1 *et* 2 *et comprenant 4 expressions algébriques :*
$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2 \\ x_1+X_2 \\ X_1+x_2 \\ X_1+X_2 \end{array}\right.$$

3me groupe constitué à l'aide des indices 1, 2 *et* 3 *et renfermant 8 expressions algébriques :*
$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2+X_3 \\ x_1+X_2+X_3 \\ X_1+X_2+X_3 \\ X_1+X_2+x_3 \\ X_1+x_2+x_3 \\ X_1+x_2+X_3 \\ x_1+X_2+x_3 \end{array}\right.$$

et ainsi de suite jusqu'au n^{me} groupe inclus et toujours suivant la même loi de formation ; c'est-à-dire qu'un groupe quelconque d'ordre L *comprend toutes les sommes algébriques obtenues en combinant entre elles les* 2L *premières quantités :*

$$x_1,\ x_2, \ldots x_L,$$
$$X_1,\ X_2, \ldots X_L, \text{ prises L à L},$$

en ne conservant expressément que les combinaisons dans lesquelles les indices représentent la suite naturelle des L *premiers nombres.*

On demande :

1° *De démontrer que le nombre* N *des expressions ainsi formées a pour valeur*

$$N = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n;$$

2° *De déterminer les valeurs* numériques, entières *et* positives, *que devront recevoir les* $2n$ *quantités*

$$x_1, x_2, \ldots x_n,$$
$$X_1, X_2, \ldots X_n,$$

pour que les N *expressions soient représentées par des nombres entiers, aussi petits que possible et tous différents les uns des autres. On admettra que les sommes* numériques *ainsi obtenues*, rangées en série croissante, *ont pour premier terme* $x_1 = 1$.

I. Soit P_k le nombre des expressions algébriques du groupe k. Pour avoir les expressions du groupe $k+1$, il suffit d'ajouter à chaque expression de P_k successivement x_{k+1} et X_{k+1} ; on a donc

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= 2P_k, \\ P_n &= 2P_{n-1}, \\ P_{n-1} &= 2P_{n-2}, \\ &\ldots\ldots \\ P_2 &= 2P_1, \\ P_1 &= 2 \\ \hline P_n &= 2^n \end{aligned}$$

d'où

$$N = P_1 + P_2 \cdots + P_n = 2 + 2^2 + 2^3 \cdots + 2^n.$$

II. Nous allons déterminer les $2n$ quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n, X_1, X_2, \ldots, X_n$, de façon que les N expressions algébriques formées constituent, dans un certain ordre, la suite des N premiers nombres entiers.

Rangeons ces expressions algébriques dans l'ordre suivant :

Soient $a_1^k, a_2^k, \ldots, a_{2k-1}^k$ les expressions algébriques du groupe $k-1$, rangeons celles du groupe k dans l'ordre suivant :

(1) $\qquad a_1^k + x_k, \qquad a_2^k + x_k, \qquad \ldots, \qquad a_{2k-1}^k + x_k.$

(2) $\qquad a_1^k + X_k, \qquad a_2^k + X_k, \qquad \ldots, \qquad a_{2k-1}^k + X_k.$

Si les nombres $a_1^k, \ldots, a_{2k-1}^k$ sont des nombres consécutifs rangés dans l'ordre croissant, il en sera de même des groupes (1) et (2). Pour que les expressions du groupe k forment dans leur ensemble 2^k nombres consécutifs il faut que l'on ait

$$(\alpha) \qquad a_{2k-1}^k + x_k = a_1^k + X_k - 1,$$

et pour que ces nombres fassent suite au nombre du groupe $k-1$

$$(\beta) \qquad a_{2k-1}^k + 1 = a_1^k + x_k.$$

Mais on a

$$(\gamma) \qquad a_{2k-1}^k + X_k = a_{2k-1}^k + 2^k.$$

De l'égalité (γ) on déduit $\qquad X_k = 2^k$;

des égalités (α) et (β), $\qquad X_k = 2x_k$.

On a donc

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2^2, \quad \ldots, \quad x_n = 2^{n-1}, \quad X_1 = 2, \quad X_2 = 2^2, \quad X_3 = 2^3, \quad \ldots, \quad X_n = 2^n.$$

L. SAYOUS.

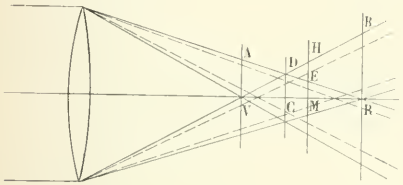
Bonne solution : M. L.-D. BICART, Sous-Lieutenant d'artillerie.

PHYSIQUE

462. — *Une lentille convergente aplanétique mais non achromatique reçoit un faisceau parallèle de lumière blanche. Étudier la coloration de la tache lumineuse que les rayons réfractés formeraient sur un écran blanc disposé entre le foyer correspondant aux rayons violets et le foyer correspondant aux rayons rouges. Que verrait-on dans un spectroscope dont on placerait la fente dans cette région ?*

Soit V le foyer des rayons violets et R celui des rayons rouges, foyers dont l'écart a été exagéré pour la clarté de la figure.

Supposons l'écran en V. Le bord A de la tache lumineuse qui s'y forme ne reçoit que des rayons rouges ; de A en V on pénètre successivement à l'intérieur des cônes formés par les rayons orangés, jaunes, etc.; ces couleurs s'ajoutent à la première et l'ensemble forme une tache d'un blanc violacé bordée de rouge. Dans le spectroscope, le spectre est constitué par une série d'images de la fente qui vont en diminuant du rouge au violet.



Supposons l'écran en R. On ne voit sur le bord que du violet; de B en R les couleurs s'ajoutent dans l'ordre inverse du précédent, produisant une tache d'un blanc rougeâtre bordée de violet. La hauteur du spectre augmente du rouge au violet.

En CD, dans le plan du cercle d'aberration, le bord de la tache reçoit les rayons extrêmes du spectre auxquels s'ajoutent successivement, quand on va de D en C, d'une part les couleurs plus réfrangibles que le rouge, d'autre part les couleurs moins réfrangibles que le violet; le tout produit une tache blanchâtre bordée de pourpre. Dans le spectroscope, la hauteur du spectre diminue depuis le rouge jusqu'à la couleur dont le foyer est en C et augmente depuis cette couleur jusqu'au violet.

Enfin, dans une position intermédiaire telle que MEH on ne trouve au bord qu'une des couleurs extrêmes, le violet par exemple, à laquelle s'ajoutent d'abord les couleurs voisines; puis, en E, apparaît l'autre couleur extrême et le spectre se complète alors des deux côtés à la fois. Dans le spectroscope, l'extrémité rouge du spectre a une hauteur correspondant à ME, l'extrémité violette a une hauteur correspondant à MH et le spectre est étranglé dans la couleur dont le foyer est en M.

D'une manière générale, les couleurs, dans le spectre, paraîtront d'autant plus vives qu'elles y occuperont une hauteur moindre, car il se propage des quantités de lumière équivalentes dans les faisceaux des différentes couleurs.

Solution assez bonne de M. Malplat, pensionnat de Valbenoîte, Saint-Etienne; solution incomplète de M. A. Laureaux, lycée de Besançon.

QUESTIONS PROPOSÉES

625. — On considère un quadrilatère et une conique S inscrite dans le triangle ABC formé par les trois diagonales du quadrilatère; on considère en outre une conique S_1 inscrite dans le quadrilatère.

1° Trouver, quand S_1 varie, le lieu des ombilics relatifs à S et à S_1. Montrer que l'enveloppe des droites qui ont même pôle par rapport à S et à S_1 est une courbe de troisième classe Γ inscrite dans le triangle ABC.

2° Soient a, b, c les points de contact de Γ avec les côtés BC, CA, AB et a_1, b_1, c_1 les points de contact des tangentes à Γ autres que les côtés du triangle et issues des points A, B, C. Montrer que les droites aa_1, bb_1, cc_1 sont tangentes à Γ et passent par un même point M.

3° Faire voir que les triangles ABC et abc sont homologiques et trouver le lieu du centre d'homologie et l'enveloppe de l'axe d'homologie quand S varie en restant inscrite dans le triangle ABC et que le point M décrit une droite fixe.

4° Enoncer les propriétés corrélatives.

L. Sayous.

626. — Étant données une eltipse et deux directions fixes Δ, Δ', par un point variable de l'ellipse, M, on mène des parallèles à Δ et Δ' qui rencontrent l'ellipse en P et Q. Montrer que le lieu du point de rencontre des tangentes à l'ellipse en P et Q est une ellipse homothétique et concentrique à l'ellipse donnée. Résultat semblable pour l'enveloppe de la droite PQ. Généraliser.

VASNIER.

627. — On considère tous les cercles passant par un point A et tangents à une droite donnée D; on associe ces cercles deux à deux de façon qu'ils soient orthogonaux et on demande :

1° L'enveloppe de la ligne des centres des deux cercles;

2° Le lieu du second point commun à ces cercles;

3° Le lieu du centre de similitude qui n'est pas situé sur la droite D;

4° Le lieu du point de contact de chacun de ces cercles avec la seconde tangente commune associée à D.

E. H.

628. — I. Soit

$$f(z) = P + Qi$$

une fonction de

$$z = x + yi;$$

on a

$$P = \varphi(x, y), \qquad Q = \psi(x, y).$$

Supposons donnée à P la valeur

$$P = \frac{e^{ay} + e^{by}}{2} \cos ex.$$

Trouver Q et la forme de $f(z)$, cette fonction devant avoir une dérivée bien déterminée.

II. On considère la fonction

$$u = \sqrt{z} = re^{\frac{\theta i}{2}}.$$

Supposons que z aille de z_0 à z_1 suivant une droite, u ira de u_0 à u_1 suivant une courbe correspondante. Trouver cette courbe.

Si z suit la spirale $r = e^{m\theta}$, trouver la route suivie par $u = f(z)$.

Réciproquement, déterminer quelle courbe il faut faire suivre à z pour que ce soit aussi la courbe suivie par u.

L.-J. GORJON, Pensionnat de Valbenoîte, Saint-Étienne.

629. — Une source lumineuse d'éclat k, ayant la forme d'un disque circulaire de diamètre a, est placée à une distance x d'une lentille convergente de diamètre D et de distance focale f.

Quel est l'éclairement produit par la lumière réfractée, à une distance L de la lentille, sur un écran perpendiculaire à l'axe du faisceau lumineux ? Comment cet éclairement varie-t-il quand on fait varier x? Comment varie, dans les mêmes conditions, la quantité de lumière reçue par un disque de diamètre Δ placé à la distance L ?

DEUXIEME PARTIE

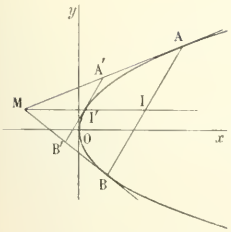
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

561. — *Soit* M *un point variable sur une droite fixe* D *et soient en outre* A *et* B *les points de contact des tangentes menées de* M *à une parabole fixe* P, *située dans un plan contenant la droite* D. *On demande de trouver, quand le point* M *se meut sur la droite* D :

1° *Le lieu du centre de gravité du triangle* MAB;

2° *Le lieu du point de concours des hauteurs de ce même triangle.*

La droite qui joint le point M au milieu I de AB est parallèle à l'axe de la parabole et rencontre



la courbe au point I' milieu de MI. La tangente en ce point est parallèle à AB ; elle rencontre MA et MB en des points A' et B', et le triangle MA'B est homothétique au triangle MAB, le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$.

Par suite les centres de gravité G' et G des triangles MA'B' et MAB sont situés sur une même droite passant par le point M et l'on a $\overline{MG} = 2\overline{MG'}$; il en est de même pour les points de concours des hauteurs.

1° Soient $y^2 - px = 0$ l'équation de la parabole et $ux + vy + w = 0$ celle de la droite D. Désignons par α, β les coordonnées du point M.

Un point quelconque de la droite MI a pour coordonnées

$$x = \alpha + \rho, \qquad y = \beta,$$

la valeur de ρ relative au point I' est racine de l'équation

$$\beta^2 - 2p(\alpha + \rho) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{\beta^2 - 2p\alpha}{2p}.$$

Le ρ du point G' est alors $\frac{2}{3} \cdot \frac{\beta^2 - 2p\alpha}{2p}$, et celui du point G, $\frac{4}{3} \cdot \frac{\beta^2 - 2p\alpha}{2p}$ ou $\frac{2(\beta^2 - 2p\alpha)}{3p}$.

Il en résulte que les coordonnées du point G sont

$$x = \alpha + \frac{2(\beta^2 - 2p\alpha)}{3p}, \qquad y = \beta.$$

nous aurons le lieu de ce point en éliminant α, β entre ces équations et la suivante $u\alpha + v\beta + w = 0$.

On obtient sans difficulté l'équation

$$2uy^2 - 3pux + pvy + pw = 0$$

qui représente une parabole dont l'axe est parallèle à Ox.

2° Les orthocentres H et H' sont situés sur la perpendiculaire menée du point M à la droite AB, et l'on a $\overline{MH} = 2\overline{MH'}$.

La droite AB a pour équation $\beta y - px - p\alpha = 0$; la perpendiculaire issue du point M est représentée par $\frac{x - \alpha}{-p} = \frac{y - \beta}{\beta}$, par suite un point quelconque de cette droite a pour coordonnées

$$x = \alpha - p\rho, \qquad y = \beta + \beta\rho.$$

Or le point H' est sur la directrice, puisque le triangle MA'B' est circonscrit à la parabole ; donc la valeur de ρ correspondant à ce point est donnée par l'équation $\alpha - p\rho = -\frac{p}{2}$, d'où l'on tire $\rho = \frac{2\alpha + p}{2p}$. Le ρ du point H est alors $\frac{2\alpha + p}{p}$ et les coordonnées de ce point sont

$$x = \alpha - (2\alpha + p), \qquad y = \beta + \beta\frac{2\alpha + p}{p},$$

ou

$$\text{(H)} \qquad x = -(\alpha + p), \qquad y = \frac{2\beta(\alpha + p)}{p}.$$

Nous aurons le lieu du point H en éliminant α et β entre ces deux équations et $u\alpha + v\beta + w = 0$, ce qui donne

$$2ux^2 + 2x(pu - w) + pvy = 0.$$

Cette équation représente une parabole dont l'axe est parallèle à Oy.

J. LHÉRIAUD (lycée de Toulouse).

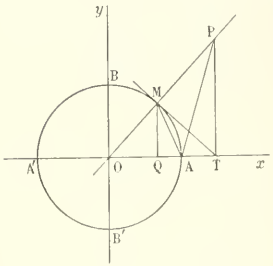
Bonnes solutions par : MM. J. Badard, élève à l'école des mines de Saint-Etienne, et G. de Trégomain (collège Stanislas).

568. — *Par un point quelconque* M *d'une demi-circonférence, on mène une tangente* MT *qui coupe le diamètre en* T.

Trouver le lieu du point de rencontre P *du rayon* OM *avec la perpendiculaire au diamètre élevée en* T.

Construire la courbe représentant les variations de $\frac{\text{vol. PAT}}{\text{vol. MAT}}$, vol. PAT *désignant le volume engendré par le triangle* PAT *tournant autour du diamètre* OA *et* A *l'extrémité du diamètre.*

Prenons pour axe des x le diamètre fixe OA et pour axe des y le diamètre perpendiculaire : désignons par r le rayon du cercle, par φ l'angle que fait le diamètre variable ou plutôt le rayon OM avec le rayon fixe OA. La tangente au point M a alors pour équation



$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - r = 0,$$

et le rayon OM, $\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi}$.

L'abscisse commune aux points T et P a pour expression $x = \frac{r}{\cos\varphi}$; nous aurons donc le lieu du point P en éliminant φ entre cette équation et celle de OM ; nous obtenons d'abord $\cos\varphi = \frac{r}{x}$, puis, $\sin\varphi = \frac{ry}{x^2}$ et, par suite, finalement

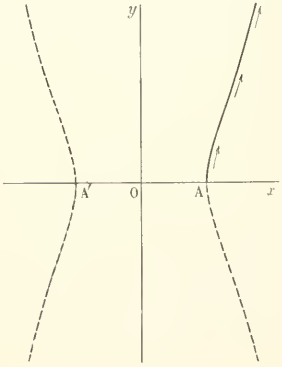
$$x^4 - r^2(x^2 + y^2) = 0. \tag{1}$$

Cette équation représente une courbe du quatrième ordre symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Pour la construire, nous résolvons l'équation (1) par rapport à y et nous étudions simplement la valeur positive de y qui correspond aux valeurs positives de x,

$$y = \frac{x}{r}\sqrt{x^2 - r^2}.$$

Cette fonction est réelle quand x est plus grand que r; elle croît de 0 à $+\infty$ quand x croît de r à $+\infty$; sa dérivée est $y' = \frac{2x^2 - r^2}{r\sqrt{x^2 - r^2}}$; elle est infinie pour $x = r$ et aussi pour x infini; la dérivée seconde est $y'' = x\frac{2x^2 - 3r^2}{r(x^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}$; elle nous montre que y' est minimum pour $x = r\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Il est alors facile de construire l'arc de courbe qui représente ces variations et ensuite la courbe entière (seconde figure).



Le volume engendré par le triangle PAT tournant autour de OA est le volume d'un cône ayant pour hauteur AT et pour rayon de base TP ; il a donc pour expression $\frac{\pi}{3}\overline{TP}^2|AT|$, c'est-à-dire, dans le premier quadrant,

$$\frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^3 \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right).$$

Le volume engendré par le triangle MAT est la différence entre les volumes de deux cônes ; il a pour expression $\frac{\pi}{3}\overline{QM}^2|AT|$, c'est-à-dire, aussi dans le premier quadrant,

$$\frac{\pi}{3} r^3 \sin^2\varphi\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right).$$

Donc le rapport $\frac{\text{vol. PAT}}{\text{vol. MAT}}$ a pour expression dans le premier quadrant $\frac{1}{\cos^2 \varphi}$. On trouverait la même expression générale dans les autres quadrants. Quand le point M décrit le premier quadrant AB, ce rapport décroît de 1 jusqu'à $+\infty$; il serait facile de représenter ces variations par une courbe dans un mode quelconque de représentation géométrique.

M. MALPLAT, à Saint-Etienne.

Bonnes solutions : MM. C. Bousquié, à Paris ; J. Badard, élève à l'Ecole des mines de Saint-Etienne.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

558. — *On considère : 1° Un hyperboloïde de révolution à axe vertical* $(oz, o'z')$ *dont le cercle de gorge situé dans le plan horizontal de cote* 100^{mm} *a* 90^{mm} *de diamètre. Les génératrices de cet hyperboloïde font avec le plan horizontal un angle de* $45°$. *L'axe de la surface est à* 110^{mm} *en avant du plan vertical.*

2° Un cône à base horizontale circulaire défini de la manière suivante : Le sommet s, s' *du cône est situé dans le plan de front de l'axe* $(oz, o'z')$ *de l'hyperboloïde. La cote de ce point est fixée à* 200^{mm}. *L'une des génératrices de front du cône est la verticale* $(sa, s'a')$ *qui passe par l'extrémité de gauche du rayon du cercle de gorge, l'autre génératrice de front est la droite* $(sb, s'b')$ *inclinée à* $45°$ *sur le plan horizontal. Cela posé, on demande :*

1° De tracer les projections de l'intersection du cône et de l'hyperboloïde, en ayant soin de déterminer les points et tangentes remarquables des courbes ainsi obtenues ;

2° De définir la direction des plans des sections antiparallèles à la base du cône :

3° De représenter complètement le solide formé par le cône et l'hyperboloïde, les deux surfaces étant limitées de la manière suivante :

(a) Au plan horizontal de projection ;

(b) Au plan horizontal passant par le sommet du cône ;

(c) Au plan tangent au cône suivant la génératrice $(sb, s'b')$;

(d) Au plan de section antiparallèle à la base passant par le point (a, a').

Trace horizontale de la génératrice verticale du cône.

(Ecole Centrale, 1896, 1re session.

Nous représenterons le solide commun, limité comme cela est indiqué précédemment.

Détermination d'un point et de la tangente en ce point. — L'hyperboloïde et le cône étant mis en place, nous emploierons, pour déterminer leur intersection, des plans horizontaux auxiliaires. Soit H' l'un de ces plans, il coupe les deux surfaces suivant des cercles projetés horizontalement en vraie grandeur. Ce plan H' rencontre la génératrice principale γf, $\gamma' f'$ de l'hyperboloïde en p, p' et la projection horizontale du parallèle de l'hyperboloïde a pour centre o et passe par p; il rencontre $s\omega$, $s'\omega'$, lieu des centres des cercles horizontaux du cône en q, q' et la projection horizontale du cercle du cône situé dans le plan H' a pour centre q et passe par s. Les projections horizontales de ces deux cercles se coupent en m et m_1 projetés verticalement au même point m'; ce sont deux points m, m' et m_1, m' de l'intersection cherchée. La tangente au point m, m' est l'intersection des plans tangents aux surfaces en ce point; la génératrice SM du cône a pour trace horizontale le point μ et la tangente μt en μ à la base du cône dans le plan horizontal de projection est la trace horizontale du plan tangent au cône en M. Les deux génératrices de l'hyperboloïde qui passent par M ont pour projections horizontales mg et mg_1 tangentes au cercle de gorge en sorte que gg_1 est la trace horizontale du plan tangent à l'hyperboloïde en M. Les traces horizontales de ces deux plans tangents se coupent en t, t' et la tangente à l'intersection en m, m' est mt, $m't'$. Si l'on fait varier H' on aura autant de points que l'on voudra de cette intersection; dans le plan horizontal de projection nous avons le point e et son symétrique e_1 par rapport à sb. Cette construction montre, ce qui était évident *a priori*, que sb est un axe de symétrie de la projection horizontale.

Nature de la projection verticale. — Le plan vertical contenant SB, qui est un plan de symétrie, étant de front, la projection verticale de l'intersection sera une conique. Cette conique est une hyperbole, car les deux cercles déterminés par le plan H' ont leurs quatre points communs deux à deux symétriques par rapport au plan de front ob. Deux de ces points sont à l'infini et leur projection verticale est le point à l'infini sur la trace verticale H' du plan horizontal auxiliaire, donc H' est une direction asymptotique de la projection verticale.

Points sur les contours apparents. — Il y a deux points c' et d' sur les contours apparents verticaux de

l'hyperboloïde et du cône ; on a sans constructions le point c' et la tangente à la courbe en c, c' est de profil, car les deux plans tangents aux surfaces en ce point sont de profil. Cherchons le point d, d' qui est le point de rencontre de sb, $s'b'$ avec l'hyperboloïde. Cette génératrice du cône est parallèle à la génératrice principale γf, $\gamma' f'$ de l'hyperboloïde et leur plan, qui a pour trace horizontale bf, coupe cette dernière surface suivant une seconde génératrice kd, $k'd'$ rencontrant sb, $s'b'$ au point cherché d, d'. Nous aurions pu d'ailleurs avoir simplement d' comme point d'intersection de $s'b'$ et de l'hyperbole équilatère de contour apparent vertical, car $s'b'$ est parallèle à une asymptote de cette hyperbole. Pour la tangente au point d' à la projection verticale, la méthode ordinaire est en défaut, car les plans tangents au point d, d' sont de bout et la projection verticale de leur intersection est un point. Pour l'obtenir nous prenons les normales en d, d' à la surface ; la normale à l'hyperboloïde est $d'\alpha'$, perpendiculaire à $k'd'$, qui rencontre l'axe $o'z'$ de la section circulaire passant par ce point en α'. La normale au cône en d, d' est la droite de front $d'\beta'$ qui coupe en β' l'axe $\omega'\beta'$ de la section circulaire horizontale du cône qui passe par ce point ; la tangente en d' à la projection verticale de l'intersection est $d'\tau'$ perpendiculaire abaissée de d' sur $\alpha'\beta'$ (*).

Asymptotes de la projection verticale. — Nous avons trouvé comme première direction asymptotique une parallèle à xy, car les plans horizontaux coupent les surfaces suivant des cercles, c'est-à-dire suivant des courbes homothétiques. Un point de l'asymptote correspondante est le point de rencontre π' des diamètres $s'\omega'$ et $o'z'$ conjugués de cette direction dans les contours apparents verticaux du cône et de l'hyperboloïde, donc une asymptote est $\sigma'\pi'$.

La seconde direction asymptotique est la trace verticale des plans de bout coupant les surfaces suivant des courbes homothétiques ; si nous substituons à l'hyperboloïde son cône asymptote et si nous transportons le cône de sommet S parallèlement à lui-même de manière que S vienne au sommet O de ce cône asymptote, nous remarquons que ces deux cônes sont alors tangents suivant la génératrice $o\varpi$, $o'\varpi'$. Alors $o'\varpi'$ est la direction de la trace verticale des plans de bout donnant des sections homothétiques, et la seconde direction asymptotique sera $o'\varpi'$. Il resterait à trouver le plan de bout, de trace verticale parallèle à $o'\varpi'$, coupant le cône et l'hyperboloïde suivant des paraboles égales. Nous avons obtenu plus rapidement la seconde asymptote en prenant sur la tangente $v'c'w'$ à l'hyperbole en c' deux longueurs égales $c'v' = c'w'$ et en menant par v' la parallèle $\sigma'v'$ à $o'\varpi'$.

Section de l'hyperboloïde par le plan tangent au cône suivant la génératrice sb, $s'b'$. — Ce plan tangent est parallèle au plan tangent au cône asymptote le long de $o\varpi$, $o'\varpi'$, donc il coupe l'hyperboloïde suivant une parabole qui a pour projection verticale la droite $s'd'$ et pour projection horizontale une parabole $\lambda d\lambda_1$ de sommet d et d'axe sd. Si nous remarquons que le plan de bout $a'l'$ est symétrique du précédent par rapport au plan du cercle de gorge, les sections paraboliques par ces deux plans ont même projection horizontale et le plan auxiliaire H' précédemment employé, donne un point quelconque n, n' de cette parabole. La tangente en ce point s'obtient par l'intersection du plan sécant et du plan tangent au cône suivant la génératrice sn, $s'n'$.

Section du cône par le plan antiparallèle à la base passant par a, a'. — La droite $a'l'$ est antiparallèle de $a'b'$ par rapport à l'angle $a's'b'$ et par conséquent le plan antiparallèle à la base passant par a, a' est le plan de bout de trace verticale $a'l'$. Il coupe le cône oblique suivant un cercle projeté verticalement sur la droite $a'l'$ et horizontalement suivant une ellipse de petit axe al. Le grand axe est perpendiculaire à al en son milieu i et a pour longueur $jj_1 = a'l'$. Le plan horizontal auxiliaire H' a donné un point quelconque v de cette ellipse.

Représentation du solide. — Nous avons représenté le solide commun au cône et l'hyperboloïde limité aux plans de bout $s'a'$, $a'l'$ et aux plans horizontaux de s' et de a'. En projection verticale, ce solide est limité par $s'a'$, $s'd'$, $a'\delta'$ et par l'arc d'hyperbole méridienne $d'\delta'$.

En projection horizontale, l'ellipse et la parabole se coupent en λ, λ_1 sur la courbe $e\lambda madam_1\lambda_1 e_1$ dont l'arc $\lambda madam_1\lambda_1$ seul reste. Les portions $\lambda a\lambda_1$ de l'ellipse et $\lambda d\lambda_1$ de la parabole restent et tout est vu ainsi qu'en projection verticale. Le cercle de gorge seul, qui reste comme ligne de contour apparent en projection horizontale, est caché.

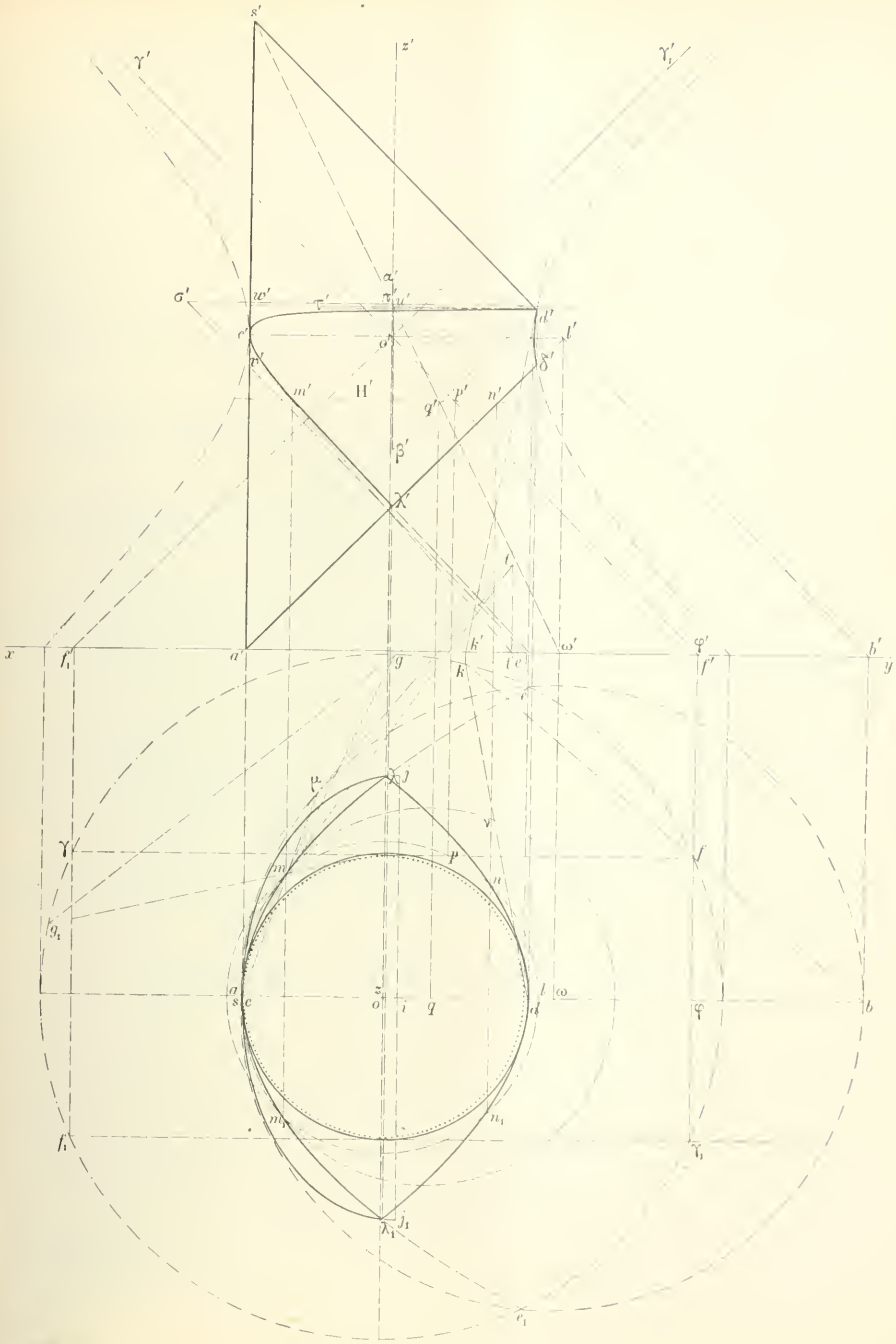
On peut se rendre compte de la courbe d'intersection par le calcul. Prenons pour axe des x le rayon $o'l'$ du cercle de gorge, pour axe des z la droite $o'z'$ et pour axe des y le rayon du cercle de gorge perpendiculaire à $z'o'l'$ en avant. L'hyperboloïde a pour équation

$$x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0 \qquad \text{et le cône} \qquad (x + z + a - h)^2 + 4y^2 - (z - h)^2 = 0.$$

La projection verticale de l'intersection est

$$z^2 + zx + (2a - h)x + az + a(2a - h) = 0.$$

(*) Voir pour la démonstration de cette construction le *Cours de Géométrie descriptive* de M. Antomari, n° 494, page 437.


s'
z'
γ'
γ'₁
σ'
w'
τ'
α'
u'
d'
l'
c'
o'
δ'
b'
m'
H'
p'
n'
q'
β'
λ'
t'
x
f₁
a
g
k'
ω'
φ'
f'
b'
y
k
i
e
e
u
j
v
γ
p
f
m
n
g₁
a
z
l
ω
s
c
o
i
q
d
φ
b
m₁
n₁
f₁
γ₁
j₁
λ₁
e₁

C'est une hyperbole de directions asymptotiques $z = 0$ $z = -x$ dans le plan $z'o'l'$. On a dans l'épure $a = 4^{cm},5$ $h = 10^{cm}$.

Quant à la projection horizontale, on aurait son équation en éliminant z entre les équations des deux surfaces. N. C.

QUESTIONS PROPOSÉES

630. — Un point mobile (x_0, y_0) décrit la courbe définie par l'équation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, par rapport à deux axes rectangulaires.

1° Trouver l'enveloppe des hyperboles équilatères passant à l'origine et admettant pour asymptotes les droites $x = x_0$, $y = y_0$.

2° Trouver le lieu des sommets de ces hyperboles.

3° Trouver l'enveloppe de leurs développées.

P. Sicard (lycée de Marseille).

631. — Les asymptotes d'une hyperbole de grandeur constante passent par deux points fixes A et B. Trouver le lieu des foyers de cette hyperbole, ainsi que le lieu des sommets.

(*Id.*)

632. — Etant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy, une droite AB se meut dans leur plan de façon que ses coordonnées à l'origine satisfassent à la relation $ob = k^2$. Trouver le lieu des foyers des paraboles circonscrites au triangle OAB et admettant le point O pour sommet.

(*Id.*)

633. — On considère une ellipse E et l'hyperbole équilatère H ayant ses sommets aux foyers de E. On trace la corde polaire d'un point quelconque de H par rapport à E. Le lieu du point de rencontre des normales à E aux extrémités de cette corde est une sextique que l'on demande de construire.

(E.-N. Barisien.)

634. — Déterminer les normales à l'ellipse dont la distance au centre est maximum. — Même question quand on remplace le centre par un foyer.

P. Brück.

635. — Une cloche cylindrique, pesant 2^{kg}, a un diamètre extérieur de 20^{cm}, une hauteur de 40^{cm} et une épaisseur de paroi uniforme de 1^{mm}. Elle flotte sur l'eau, guidée latéralement de manière à se tenir verticale. Elle est mise intérieurement en communication avec un réservoir contenant de l'air à la pression P au moyen d'un tube de volume négligeable qui ne la touche pas. La pression extérieure est de 76^{cm} de mercure.

1° Pour quelle valeur de P la cloche serait-elle complètement immergée?

2° Pour quelle valeur de P se remplirait-elle complètement d'air?

3° Ce dernier résultat étant obtenu, et la communication avec le réservoir étant supprimée, de combien doit-on surcharger la cloche pour l'immerger complètement?

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS

Un Congrès international des Mathématiciens aura lieu à Zurich, dans les locaux de l'École polytechnique fédérale, les 9, 10 et 11 août 1897.

Le Comité d'organisation est composé de MM. Bleuler, Burkhardt, Cremona, Dumas, Franel, Geiser, Greenhill, Herzog, Hill, Hurwitz, F. Klein, Markoff, Mertens, Minkowski, Mittag-Leffler, Oltramare, Poincaré, Rebstein, Rudio, Vondermühll, Weber.

Le programme sera communiqué aux personnes intéressées. Adresser les correspondances concernant les affaires du Congrès à M. le Professeur Geiser, Kusnacht-Zurich.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

7e Année. N° 7. Avril 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA CLASSIFICATION DES CUBIQUES PLANES

par **M. Dumont**, Professeur au lycée d'Annecy.

On peut se servir pour la classification des courbes, de divers caractères dont les deux principaux sont : le nombre, la nature et la disposition des points à l'infini, c'est-à-dire des directions asymptotiques ; le nombre, la nature et la disposition des points singuliers ou des tangentes singulières.

Le premier caractère a été placé en première ligne dans les classifications de Newton et de Plücker pour les cubiques. Les espèces établies ainsi par Newton sont au nombre de 72 auxquelles Stirling en a ajouté 4. Plücker en considérant de plus le caractère tiré de la position de la droite satellite (*) de la droite de l'infini, et de la nature du contact avec les paraboles asymptotes dans certains cas a donné 219 espèces. Une première section (138 espèces) contient les courbes à 3 asymptotes à distance finie ; une seconde (39 espèces), les courbes à une asymptote parabolique ; une troisième (7 espèces), les courbes ayant 2 asymptotes parallèles ; une quatrième (13 espèces), les courbes à asymptote semi-parabolique ; la cinquième (1 espèce) ne contient que le trident, et la sixième (1 espèce) ne contient que la parabole cubique.

Indépendamment de la multiplicité des espèces, cette classification a un double inconvénient : 1° des courbes de sections différentes sont réductibles les unes aux autres par une transformation homographique ; 2° des courbes d'une même section sont, au contraire, irréductibles les unes aux autres par une telle transformation.

Or, il semble que la classification sera plus naturelle si les grandes divisions sont choisies telles que la transformation homographique la plus générale ne puisse changer les unes en les autres que les courbes d'une même section (**). Telle est la classification de Salmon (V. Courbes planes, trad. Chemin), qui établit une trentaine d'espèces, en subordonnant le caractère tiré des asymptotes au caractère tiré des points singuliers.

Nous allons suivre une marche analogue, mais en établissant d'abord, pour plus de netteté, des genres.

(*) On sait (V. Salmon) que la droite satellite d'une droite d coupant une cubique en A, B, C est la droite contenant les trois points où la courbe est coupée par les tangentes en A, B, C. La droite satellite de celle de l'infini est donc la droite contenant les trois points où la courbe est coupée par ses asymptotes.

(**) Il ne faut pas cependant s'exagérer l'importance d'un caractère non altéré par la transformation homographique, puisque sans sortir du domaine du 3e ordre nous en trouvons un qui n'a qu'une importance secondaire, savoir le rapport anharmonique des quatre tangentes menées d'un point d'une cubique sans point singulier à cette courbe.

Il n'a qu'une importance secondaire, car ce rapport varie quand on passe d'une cubique à une autre en différant très peu, tandis qu'il peut être le même pour des courbes très différentes, l'une ayant trois asymptotes, une autre une seule, une troisième des points d'inflexion à l'infini, etc.

Nous dirons que des cubiques appartiennent à une même famille lorsqu'elles dérivent par projection centrale de paraboles cubiques représentées par la même des 5 équations suivantes (*) (à la valeur des paramètres près) :

(1) $y^2 = Ax^3$;

(2) $y^2 = Ax^2(x+b)$, (A et b de même signe) ;

(3) $y^2 = Ax^2(x+b)$, (A et b de signes contraires) ;

(4) $y^2 = Ax[(x+b)^2+c^2]$;

(5) $y^2 = Ax(x-b)(x-c)$.

Nous dirons que deux cubiques d'une même famille appartiennent à un même genre, lorsque la nature des points d'intersection avec la droite de l'infini sera la même.

Enfin, des caractères plus ou moins variés pourront servir, s'il y a lieu, à partager certains genres en espèces.

Les formules générales de la transformation homographique plane

$$x = \frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{ax'+by'+c}, \qquad y = \frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{ax'+by'+c},$$

font passer à l'infini la droite actuelle

$$(a_2b-b_2a)x+(b_1a-a_1b)y+a_1b_2-a_2b_1 = 0$$

et projettent la droite de l'infini actuelle sur

$$ax'+by'+c = 0.$$

Elles font passer à l'infini l'axe des y si l'on a $a_1 = b_1 = 0$.

Elles y font passer l'axe des x si l'on a $a_2 = b_2 = 0$.

Si l'on a à la fois $a_1 = b_1 = b = c = 0$, il y a permutation entre l'axe des y et la droite de l'infini.

Enfin si l'on a à la fois $a_2 = b_2 = a = c = 0$, il y a permutation entre l'axe des x et la droite de l'infini.

Si avec $a_1 = b_1 = b = c = 0$, on a $a_2 = c_2 = 0$, les équations réduites à

$$x = \frac{m}{x'}, \qquad y = \frac{ny'}{x'}$$

expriment à la fois permutation entre Oy et la droite de l'infini et conservation de l'axe Ox. (Or on peut toujours supposer que dans la figure transformée on prenne pour axe $O'y'$ la projection de la droite de l'infini de la première figure, et que pour l'axe $O'x'$ soit choisie la droite projection de Ox.)

De même les formules $x = \frac{px'}{y'}$, $y = \frac{q}{y'}$ expriment à la fois permutation entre Ox et la droite de l'infini et conservation de l'axe Oy.

Appelons dorénavant i la droite que nous projetons à l'infini.

Première famille. — Cubiques déduites de la parabole $y^2 = Ax^3$.

1er *Genre*. — Les formules $x = a_1x'+b_1y'+c_1$, $y = a_2x'+b_2y'+c_2$ qui donnent une transformation dans laquelle la droite de l'infini est conservée, fournissent un premier genre. D'ailleurs comme $a_1b_2-a_2b_1$ est nécessairement non nul, on peut choisir les droites

$$a_1x'+b_1y'+c_1 = 0, \qquad a_2x'+b_2y'+c_2 = 0$$

pour axes de coordonnées ; par suite les cubiques de ce premier genre peuvent encore être toutes représentées par $y^2-Ax^3 = 0$, les axes de coordonnées faisant entre eux un angle quelconque.

Pour toutes ces courbes, la droite de l'infini est tangente d'inflexion.

(*) La démonstration du théorème de Newton-Chasles (V. Salmon, p. 234-235), qui est du reste bien connue, est omise ici pour abréger.

2e *Genre.* — i est la tangente de rebroussement de la parabole. Les formules

$$x = \frac{px'}{y'}, \qquad y = \frac{q}{y'}$$

nous donnent l'équation $y = Kx^3$ des *courbes à centre* de cette famille, pour lesquelles la droite de l'infini est tangente de rebroussement.

3e *Genre.* — i est la droite joignant le point de rebroussement au point d'inflexion de la parabole (c'est-à-dire l'axe Oy). Les formules $x = \frac{m}{x'}$, $y = \frac{ny'}{x'}$ nous donnent l'équation $xy^2 = K$, représentant les courbes ayant à l'infini, à la fois point d'inflexion et point de rebroussement.

4e *Genre.* — i est une droite quelconque passant par le point de rebroussement. En faisant tourner les axes et permutant après l'axe Oy et la droite de l'infini, on trouve les courbes à une asymptote simple et une de rebroussement

$$xy^2 = K(y+p)^3.$$

5e *Genre.* — i est une droite quelconque passant par le point d'inflexion et coupant en outre en deux points réels la parabole (c'est-à-dire une parallèle à Oy, située du côté des x positifs si $A > 0$). En transportant d'abord l'axe Oy parallèlement à lui-même et le permutant ensuite avec la droite de l'infini par les formules $x = \frac{m}{x'}$, $y = \frac{ny'}{x'}$ nous avons la forme $xy^2 = c^2(x-l)^3$, courbes à trois asymptotes réelles, dont une d'inflexion, c'est-à-dire des *hyperboles redondantes* particulières.

6e *Genre.* — i est une droite quelconque passant par le point d'inflexion et coupant la parabole en deux points imaginaires. On trouve

$$xy^2 = -c^2(x-l)^3.$$

Si ces deux points imaginaires sont projetés sur les ombilics du plan, on a une *espèce particulière*, savoir :

$$xy^2 = -(x-l)^3, \qquad (c = 1, \text{axes rectang.}),$$

cubiques circulaires, contenant en particulier la cissoïde de Dioclès.

On a des *hyperboles défectives* particulières.

7e *Genre.* — i est une droite coupant en trois points réels et quelconques.

On trouve

$$(y-hx)(y-kx)(y-lx) + qy^2 = 0.$$

Ce genre contient plusieurs espèces distinctes d'hyperboles redondantes.

8e *Genre.* — i est une droite quelconque coupant en un point réel. L'équation est de la forme

$$(y-hx)[y^2 + a(x-b)^2] + cy^2 = 0.$$

Parmi les espèces contenues dans ce genre de courbes à une asymptote réelle se trouvent les *cubiques circulaires*

$$(y-hx)[y^2 + (x-b)^2] + cy^2 = 0.$$

9e *Genre.* — i est une tangente à la parabole.

On a l'équation :

$$(y-hx)^2(y-kx) + cy^3 = 0.$$

A la direction asymptotique double correspond une asymptote transportée à l'infini. On a des hyperboles paraboliques.

Il est aisé de voir que toute cubique *cuspidale* est comprise dans l'un de ces neuf genres.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

564. — *On donne une quadrique* Q *et deux points* A *et* A′ *diamétralement opposés sur* Q, *et on considère les deux cônes de sommets* A *et* A′ *et ayant pour directrice commune la section de* Q *par un plan variable* P, *passant par une droite donnée* Δ. *Ces deux cônes admettent une deuxième courbe plane située dans un plan* P′. *Trouver :*

1° *Le lieu de la droite d'intersection des plans* P *et* P′ ;

2° *Le lieu du centre de la section contenue dans le plan* P′ ;

3° *Le lieu des foyers de cette même section plane.*

Supposons, pour fixer les idées, que la quadrique Q soit un ellipsoïde et prenons pour axe des z le diamètre AA′, pour axes des x et des y les deux axes de la section centrale faite par le plan diamétral conjugué de AA′; nous aurons pour équation de la quadrique Q,

$$Q = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

a, b, c étant les longueurs des demi-diamètres portés par les axes de coordonnées, et, pour coordonnées des points A et A′, les deux groupes $0, 0, c$ et $0, 0, -c$.

Désignons maintenant par

$$P = ux + vy + wz + 1 = 0$$

l'équation du plan P et par

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

les équations de la droite Δ ; nous aurons les deux relations

$$(1) \qquad \begin{cases} ux_0 + vy_0 + wz_0 + 1 = 0, \\ u\alpha + v\beta + w\gamma = 0, \end{cases}$$

qui expriment que le plan P contient la droite Δ.

Pour former l'équation du cône ayant pour sommet le point A, nous porterons les axes parallèlement à eux-mêmes au point $0, 0, c$ et nous éliminerons la variable d'homogénéité entre les deux nouvelles équations de la quadrique Q et du plan P; nous obtiendrons ainsi

$$(wc + 1)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - 2\frac{z}{c}(ux + vy + wz) = 0 ;$$

nous reviendrons ensuite aux anciens axes en changeant z en $z - c$, et nous aurons, toutes réductions faites, l'équation du premier cône

$$C = (1 + wc)Q + 2\left(1 - \frac{z}{c}\right)P = 0.$$

Nous aurons l'équation du second cône en changeant c en $-c$,

$$C' = (1 - wc)Q + 2\left(1 + \frac{z}{c}\right)P = 0.$$

L'équation du plan P′ s'obtient en éliminant Q et P entre les deux équations $C = 0$, $C' = 0$; nous trouvons ainsi

$$P' = z + wc^2 = 0.$$

1. Le lieu de la droite d'intersection des plans P et P′ s'obtient en éliminant u, v, w entre les

équations (1) et les équations $P = 0$, $P' = 0$; nous trouvons d'abord

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & c^2 & z \end{vmatrix} = 0,$$

puis

$$(2) \qquad z \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} - c^2 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente un paraboloïde hyperbolique ayant pour plans directeurs le plan des xy et le plan qui passe par l'origine et par la droite Δ, et contenant en outre cette droite.

2. Pour trouver le lieu du centre de la section plane faite par le plan P' dans l'un ou l'autre des deux cônes, il faut éliminer u, v, w entre les équations (1), l'équation $P' = 0$ et les deux équations du diamètre conjugué du plan des xy dans le cône C, par exemple,

$$\frac{1}{2} C'_z = 0, \qquad \frac{1}{2} C'_y = 0,$$

ou

$$(1 + wc) \frac{x}{a^2} + u\left(1 - \frac{z}{c}\right) = 0,$$

$$(1 + wc) \frac{y}{b^2} + v\left(1 - \frac{z}{c}\right) = 0;$$

les deux dernières équations donnent u et v; en portant les valeurs ainsi obtenues dans les deux premières, on obtient aisément

$$(1 + wc)\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1\right) + \left(\frac{z}{c^2} + w\right)(c - z_0) = 0,$$

$$(1 + wc)\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right) - \gamma\left(\frac{z}{c^2} + w\right) = 0,$$

et il n'y a plus qu'à tenir compte de l'équation $P' = 0$, pour avoir de suite les deux équations du lieu,

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} - 1 = 0, \\[2ex] \dfrac{\alpha x}{a^2} + \dfrac{\beta y}{b^2} + \dfrac{\gamma z}{c^2} = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations représentent une ligne droite, la droite polaire de Δ.

3. Puisque la section plane commune aux deux cônes et contenue dans le plan P' est dans un plan parallèle au plan des xy, il suffit, pour avoir ses foyers, de la projeter obliquement sur le plan des xy parallèlement à oz et de chercher les foyers de cette projection; en éliminant z entre les deux équations $C = 0$ et $P' = 0$, on a de suite l'équation de cette seconde conique,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2ux + 2vy + 1 - c^2w^2 = 0.$$

Les axes de cette conique ont pour équations $x = -a^2u$, $y = -b^2v$: cherchons les foyers situés sur le second axe. Pour cela, portons les axes au centre, $-a^2u$, $-b^2v$, et déterminons les

carrés des longueurs des deux demi-axes, a'^2 et b'^2; nous aurons d'abord

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 - a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 = 0,$$

puis, en posant $k^2 = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1$,

$$a'^2 = a^2k^2, \qquad b'^2 = b^2k^2.$$

Les coordonnées des foyers cherchés sont donc, pour la conique de l'espace,

$$x = -a^2u \pm k\sqrt{a^2 - b^2}, \qquad y = -b^2v, \qquad z = -c^2w.$$

Nous obtiendrons le lieu de ces points en éliminant u, v, w et k entre ces trois équations, les équations (1) et la relation qui définit k; nous avons d'abord $v = -\frac{y}{b^2}$, $w = -\frac{z}{c^2}$, puis, en éliminant u entre les équations (1), $(\alpha y_0 - \beta x_0)v + (\alpha z_0 - \gamma x_0)w + \alpha = 0$.

Un premier lieu est donc immédiat; il a pour équation

$$(\alpha y_0 - \beta x_0)\frac{y}{b^2} + (\alpha z_0 - \gamma x_0)\frac{z}{c^2} - \alpha = 0,$$

ou

$$(4) \qquad \alpha\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1\right) - x_0\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right) = 0;$$

c'est un plan, le plan qui projette sur le plan des yz la droite polaire de Δ.

Pour avoir le second lieu de ces foyers, nous calculons comme précédemment v et w, puis u, à l'aide de la seconde équation (1), puis k^2, à l'aide de l'équation $x = -a^2u \pm k\sqrt{a^2 - b^2}$, et nous portons toutes les valeurs ainsi obtenues dans la relation qui définit k^2. Nous obtenons d'abord

$$\frac{a^4}{(a^2 - b^2)\alpha^2}\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right)^2 = \frac{a^2}{\alpha^2}\left(\frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1;$$

en ajoutant et retranchant $\frac{x^2}{a^2}$ au second membre, cette équation se transforme aisément en

$$(5) \qquad \frac{a^2}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right)\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{a^2 - b^2} + \frac{\alpha x}{a^2}\right) - Q = 0.$$

Le lieu des foyers envisagés est donc la conique représentée par les équations simultanées (4) et (5).

Nous aurions tout aussi aisément le lieu des autres foyers.

L. SAYOUS.

Solution géométrique. — Soient Q la quadrique donnée et C, C′ les deux cônes ayant pour sommets A, A′ et pour base la section de la quadrique Q par le plan P; les trois quadriques Q, C et C′ ont en commun une même courbe plane, les plans des autres courbes planes passent donc par la même droite; or deux de ces plans sont les plans tangents en A et A′ à la quadrique Q; le troisième plan, P′, passe donc par la droite d'intersection de ces deux plans, et, comme ces deux plans sont parallèles, il est parallèle à chacun d'eux, c'est-à-dire au plan diamétral conjugué de AA′.

Au surplus les trois quadriques C, C′ et (P, P′) font partie d'un même faisceau linéaire; on peut donc leur appliquer le théorème de Désargues. Ceci montre que la droite AA′, qui passe aux points doubles de C et C′, est divisée harmoniquement par le couple A, A′ et par les plans P, P′. Donc la correspondance qui existe entre les plans P et P′ est homographique et, par suite, la droite d'intersection de ces deux plans décrit une surface du second degré. Cette surface admet pour plan directeur le plan P′; c'est un paraboloïde.

Soit S′ la conique d'intersection du plan P′ avec l'un des cônes C ou C′; elle reste homothétique aux sections évanouissantes faites dans la quadrique Q par les plans tangents en A et A′; de plus elle s'appuie constamment sur les quatre droites qui joignent les points A et A′ aux points de rencontre de la droite Δ avec la quadrique Q; donc elle décrit une quadrique Q′. Le lieu de son centre est dans Q′ le diamètre conjugué du plan P′. Cette droite est la polaire de Δ par rapport à la quadrique Q, car on vérifie aisément que les deux points de contact des plans tangents menés par Δ à la quadrique Q sont des centres de coniques S′ particulières.

Il est évident, d'après ce qui précède, que le lieu total des foyers de S′ se compose de deux coniques.

Solution généralisée, intéressante de M. L. BIGART, à Bar-le-Duc. Le manque de place nous oblige seul à ne pas la publier.

565. — *On donne les deux quadriques ayant pour équations*

$$yz - ax = 0 \qquad et \qquad zx + a(y - z) = 0.$$

1° *Démontrer qu'elles se coupent suivant une cubique gauche et former l'équation générale des quadriques passant par cette cubique.*

2° *Trouver le lieu des sommets des paraboloïdes passant par cette cubique.*

3° *Trouver l'équation générale des cônes passant par la cubique et l'enveloppe de leurs traces sur le plan* $z = 0$.

4° *Trouver le lieu des diamètres de ces cônes qui sont conjugués des sections faites parallèlement au plan* $z = 0$.

1. Les deux quadriques données sont deux paraboloïdes hyperboliques ayant pour plan directeur commun le plan des xy ; elles ont donc en commun une droite à l'infini dans ce plan, et, par suite, se coupent encore suivant une courbe totale du troisième ordre. Cette courbe est une véritable cubique, car en coupant les deux quadriques par un plan parallèle au plan des xy, $z - at = 0$, on obtient pour coordonnées du point courant sur la courbe envisagée

$$x = \frac{at^2}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{at}{1 + t^2}, \qquad z = at.$$

Nous aurons l'équation générale des quadriques contenant la cubique en formant une troisième quadrique passant par cette courbe et qui ne fasse pas partie du faisceau déterminé par les deux premières ; or ceci se fait, soit en éliminant z entre les deux équations données, soit en éliminant t entre les deux équations qui définissent x et y ; ces deux façons d'agir donnent toutes deux le cylindre $x^2 + y^2 - ax = 0$. L'équation générale demandée est donc

$$(1) \qquad \lambda(yz - ax) + \mu(xz + ay - az) + \nu(x^2 + y^2 - ax) = 0.$$

2. Nous exprimerons que la quadrique (1) est un paraboloïde en annulant le discriminant des termes du second degré ; nous trouvons ainsi $\nu(\lambda^2 + \mu^2) = 0$; d'où les deux solutions $\nu = 0$ et $\lambda^2 + \mu^2 = 0$. La seconde ne fournit que des surfaces imaginaires ; la première seule est acceptable et l'équation générale des paraboloïdes passant par la cubique est

$$\lambda(yz - ax) + \mu(xz + ay - az) = 0.$$

La direction de l'axe de l'un de ces paraboloïdes est donnée par $z = 0$, $\lambda y + \mu x = 0$; elle a donc pour paramètres directeurs λ, $-\mu$, 0.

Nous aurons l'axe lui-même en cherchant le lieu des points pour lesquels le plan polaire est perpendiculaire à cette direction ; nous avons ainsi symboliquement $\frac{f'_x}{\lambda} = \frac{f'_y}{-\mu} = \frac{f'_z}{0}$, par suite les deux équations

$$(\lambda^2 + \mu^2)z = 0, \qquad \lambda y + \mu(x - a) = 0.$$

Le lieu des sommets est donc une courbe du plan des xy dont on obtient la seconde équation en éliminant λ et μ entre l'équation du paraboloïde et la seconde équation de l'axe, puis en faisant $z = 0$ dans le résultat ; on trouve ainsi le cercle

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - ax = 0.$$

C'est la trace du cylindre qui projette la cubique parallèlement à oz sur le plan des xy.

3. Pour que l'équation (1) représente un cône, il faut que le discriminant du premier membre soit nul, ou, ce qui revient au même, que les quatre dérivées, par rapport à x, y, z et la variable d'homogénéité, aient une solution commune.

En suivant le second procédé, on trouve de suite x et y en fonction de z, puis, en égalant les deux valeurs de z, on a la relation

$$(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\nu)^2 = 0,$$

d'où l'on déduit $\nu = -\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda}$.

Par conséquent l'équation générale de ces cônes est

$$(3) \qquad (\lambda^2+\mu^2)(x^2+y^2-ax)-\lambda^2(yz-az)-\lambda\mu(xz+ay-az)=0.$$

La trace de l'un de ces cônes sur le plan des xy a pour équation

$$(\lambda^2+\mu^2)(x^2+y^2-ax)+\lambda^2ax-\lambda\mu ay=0,$$

et on obtient son enveloppe en exprimant que cette équation du second degré en $\frac{\lambda}{\mu}$ ou en $\frac{\mu}{\lambda}$ a une racine double ; ce calcul donne

$$(4) \qquad 4(x^2+y^2)(x^2+y^2-ax)-a^2y^2=0.$$

Il est facile de voir que cette enveloppe est un limaçon de Pascal.

4. Les équations du diamètre conjugué du plan $z=0$ sont symboliquement $f'_x=0$, $f'_y=0$; en appliquant à l'équation (3), on obtient

$$(\lambda^2+\mu^2)(2x-a)+a\lambda^2-\lambda\mu z=0,$$
$$(\lambda^2+\mu^2)2y-\lambda^2z-a\lambda\mu=0.$$

On aura le lieu de ces diamètres en éliminant λ et μ entre ces deux équations ; cette élimination est immédiate et conduit à l'équation

$$(2xz+2ay-az)^2+(2yz-2ax+a^2)(2yz-2ax-z^2)=0,$$

ou à

$$(2xz+2ay)^2+(2yz-2ax)^2-4az(xz+ay)+(a^2-z^2)(2yz-2ax)=0,$$

puis, finalement à

$$(5) \qquad (z^2+a^2)[2(x^2+y^2)-yz-ax]=0.$$

Cette équation se décompose en deux : l'une, $z^2+a^2=0$, qui représente deux plans imaginaires conjugués parallèles au plan des xy ; l'autre, $2(x^2+y^2)-yz-ax=0$, qui représente un hyperboloïde à une nappe ayant pour plan cyclique le plan $z=0$. La première solution correspond aux deux cylindres hyperboliques que l'on obtient en posant $\lambda^2+\mu^2=0$ et représente les plans asymptotes de ces cylindres qui sont parallèles au plan $z=0$.

G. DE TRÉGOMAIN (collège Stanislas).

Bonne solution : M. LHÉRIAUD (lycée de Toulouse).
Solutions satisfaisantes : MM. E. BARRÉ, à Valenciennes ; L. SAYOUS.

---

566. — *D'un point* P *on peut mener cinq normales à la cubique dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est*

$$a^2y=x^3.$$

On considère la conique (C) *inscrite dans le pentagone formé par les tangentes à la cubique aux pieds des cinq normales. En supposant que* a^2 *varie :*

1° *Trouver le lieu des pieds des normales.*

2° *Démontrer que la conique* (C) *est inscrite dans un rectangle fixe, et trouver le lieu de ses foyers.*

3° *La conique* (C) *et la cubique ont, en outre des côtés du pentagone, une tangente commune ; démontrer qu'elle passe par un point fixe.*

La normale au point (x, y) de la cubique

$$(1) \qquad a^2y=x^3$$

a pour équation

$$\frac{X-x}{3x^2}=\frac{Y-y}{-a^2};$$

en écrivant que cette droite passe par le point $P(x_0, y_0)$ nous avons

$$(2) \qquad \frac{x_0 - x}{3x^2} = \frac{y_0 - y}{-a^2}.$$

Les équations (1) et (2) déterminent les coordonnées des pieds des normales issues du point P à la cubique.

De l'équation (1) on tire $y = \frac{x^3}{a^2}$, et en remplaçant y par $\frac{x^3}{a^2}$ dans l'équation (2) on a

$$(3) \qquad 3x^5 - 3a^2y_0x^2 + a^4x - a^4x_0 = 0;$$

ce qui montre que le nombre des normales est égal à cinq.

1. Éliminons a^2 entre les équations (1) et (2) nous avons

$$x(x_0 - x) + 3y(y_0 - y) = 0.$$

Cette équation représente une ellipse circonscrite au rectangle formé par les axes de coordonnées et par les parallèles à ces droites menées par le point P. Cette ellipse est le lieu demandé.

2. La tangente à la cubique au point (x, y) a pour équation

$$3Xx^2 - a^2Y - 2a^2y = 0,$$

ou en remplaçant a^2y par x^3

$$3x^2X - a^2Y - 2x^3 = 0.$$

Écrivons que cette droite est tangente à la conique qui a pour équation tangentielle

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0,$$

nous obtenons

$$(4) \qquad 4Fx^6 - 12Dx^5 + 9Ax^4 + 4Ea^2x^3 - 6Ba^2x^2 + Ca^4 = 0.$$

Pour que la conique soit inscrite dans le pentagone considéré, il faut et il suffit que l'équation (4) soit vérifiée par les cinq racines de l'équation (3), et pour cela il faut que le premier membre de l'équation (4) soit divisible par celui de l'équation (3).

En faisant la division on trouve pour quotient

$$\frac{4}{3}Fx - 4D$$

et pour reste

$$9Ax^4 + 4a^2x^3(E + Fy_0) - 2a^2\left(3B + \frac{2}{3}Fa^2 + 6Dy_0\right)x^2 + 4a^4\left(\frac{F}{3}x_0 + D\right) + a^4(C - 4Dx_0).$$

Écrivons que ce reste est identiquement nul, nous avons

$$A = 0 \qquad E + Fy_0 = 0, \qquad 3B + \frac{2}{3}Fa^2 + 6Dy_0 = 0, \qquad \frac{F}{3}x_0 + D = 0, \qquad C - 4Dx_0 = 0,$$

d'où nous tirons

$$A = 0, \qquad B = \frac{2D(a^2 - 3x_0y_0)}{3x_0}, \qquad C = 4Dx_0, \qquad E = \frac{3Dy_0}{x_0}, \qquad F = -\frac{3D}{x_0};$$

par suite l'équation de la conique est

$$\frac{4uv(a^2 - 3x_0y_0)}{3x_0} + 4x_0v^2 + 2uw + \frac{6y_0}{x_0}vw - \frac{3w^2}{x_0} = 0,$$

ou encore

$$(C) \qquad \frac{4}{3}a^2uv - 4x_0y_0uv + 4v^2x_0^2 + 2x_0uw + 6y_0vw - 3w^2 = 0.$$

Quel que soit a^2 cette conique est tangente aux droites dont les coordonnées vérifient les équations

$$uv = 0, \qquad -4x_0y_0uv + 4v^2x_0^2 + 2x_0uw + 6y_0vw - 3w^2 = 0.$$

La seconde représente une conique, les tangentes à cette conique qui sont parallèles aux axes de coordonnées forment un rectangle dans lequel est inscrite la conique (C).

Les foyers de cette conique sont déterminés par les équations

$$F(x^2 - y^2) - 2Dx + 2Ey + A - C = 0,$$

$$Fxy - Ex - Dy + B = 0;$$

la première peut s'écrire

$$-3(x^2 - y^2) - 2x_0x + 6y_0y - 4x_0^2 = 0,$$

elle ne renferme pas la variable a^2, elle représente donc le lieu des foyers.

Ce lieu est une hyperbole équilatère dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

3. La sixième racine de l'équation (4) qui ne vérifie pas l'équation (3) est $\frac{3D}{F}$ ou $-x_0$; par suite la sixième tangente commune à la cubique et à la conique a pour équation

$$3xx_0^2 - a^2y + 2x_0^3 = 0.$$

Cette droite passe par le point fixe qui a pour coordonnées $-\frac{2x_0}{3}$ et 0.

L.-D. BICART et Louis SAYOUS.

Bonne solution de M. Vasnier.

---

573. — *Soit* C *la courbe de contact du cône de sommet quelconque donné* M, *circonscrit à un ellipsoïde à axes inégaux*, E.

1° *Montrer que l'on peut trouver sur* C *une infinité de groupes de trois points* α, β, γ, *tels que les tétraèdres de sommets* M, α, β, γ *soient orthocentriques (hauteurs concourantes).*

2° *Trouver l'enveloppe des plans des faces de ces tétraèdres.*

3° *Montrer que ces tétraèdres ont tous même orthocentre* ω *et que les points* M *et* ω *sont conjugués par rapport à une quadrique fixe* S.

4° *Lieu des centres des sphères circonscrites à ces tétraèdres.*

5° *Trouver le lieu des points* M *pour lesquels les points* ω *correspondants sont sur l'ellipsoïde donné* E.

6° *On donne le point* ω, *trouver le point* M ; *montrer que ce problème comporte 3 solutions* M_1, M_2, M_3 *toujours réelles.*

7° *Prouver que le tétraèdre* $\omega M_1M_2M_3$ *est conjugué par rapport à la quadrique* S.

8° *En désignant par* O *le centre de* E, *montrer qu'en général aucun des tétraèdres* $\omega M_1M_2M_3$, $OM_1M_2M_3$ *n'est orthocentrique. En remplaçant l'ellipsoïde* E *par un hyperboloïde de centre* O, *à quelle condition doit satisfaire cet hyperboloïde pour que le tétraèdre* $OM_1M_2M_3$ *soit orthocentrique ?*

Soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipsoïde rapporté à ses axes, (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du point M, et, par suite,

$$P \equiv \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0,$$

l'équation du plan polaire de M.

1. Je dis qu'il y a une infinité de tétraèdres orthocentriques ayant pour sommet le point M et pour base un triangle inscrit dans la conique C. En effet tous ces tétraèdres sont inscrits dans une qua-

drique, E', passant par M et contenant la courbe C; choisissons l'une d'elles, par exemple, la quadrique homothétique à L,

$$E' \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0;$$

il suffira alors de montrer que l'on peut déterminer une sphère Σ harmoniquement inscrite dans E', et telle que le plan P soit encore, par rapport à cette sphère, le plan polaire de M. Si nous désignons par (α, β, γ) les cordonnées du centre de Σ et par ρ son rayon, nous aurons d'abord

$$\frac{\rho^2 - \alpha^2}{a^2} + \frac{\rho^2 - \beta^2}{b^2} + \frac{\rho^2 - \gamma^2}{c^2} + \frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2} + \frac{\gamma z_0}{c^2} = 0,$$

puis, en exprimant que le plan polaire de M par rapport à Σ coïncide avec le plan P,

$$\frac{x_0 - \alpha}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y_0 - \beta}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{z_0 - \gamma}{\frac{z_0}{c^2}} = \alpha(x_0 - \alpha) + \beta(y_0 - \beta) + \gamma(z_0 - \gamma) + \rho^2.$$

Multiplions les trois premiers rapports, haut et bas, respectivement par α, β, γ, ajoutons les résultats obtenus terme à terme et retranchons les deux termes du rapport ainsi formé de ceux du quatrième, $\frac{\alpha(x_0 - \alpha) + \beta(y_0 - \beta) + \gamma(z_0 - \gamma) + \rho^2}{1}$, nous obtiendrons un nouveau rapport égal aux autres, $\frac{\rho^2}{1 - \frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2} - \frac{\gamma z_0}{c^2}}$; multiplions de même les trois premiers rapports, haut et bas, par $\frac{\alpha}{a^2}$, $\frac{\beta}{b^2}$, $\frac{\gamma}{c^2}$, ajoutons-les ensuite terme à terme et simplifions le numérateur à l'aide de la première relation écrite, nous aurons un nouveau rapport égal au précédent, $\frac{-\rho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\frac{\alpha x_0}{a^4} + \frac{\beta y_0}{b^4} + \frac{\gamma z_0}{c^4}}$. Le point (α, β, γ) est donc situé à l'intersection de la droite $\frac{\alpha - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{\beta - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{\gamma - z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$ avec le plan

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2} + \frac{\gamma z_0}{c^2} - 1\right) - \frac{\alpha x_0}{a^4} - \frac{\beta y_0}{b^4} - \frac{\gamma z_0}{c^4} = 0;$$

il est donc bien déterminé. Le carré du rayon est alors donné sans ambiguité, soit par les rapports considérés, soit par la première relation. La sphère Σ est donc bien déterminée.

A chaque point de la courbe C correspond alors un tétraèdre autopolaire par rapport à Σ, ayant pour sommet le point M et dont les trois autres sommets appartiennent à la courbe C; c'est donc bien un tétraèdre orthocentrique satisfaisant aux conditions données.

2. Soit σ le cercle de la sphère Σ situé dans le plan P, le triangle de base du tétraèdre, $\alpha\beta\gamma$ est autopolaire par rapport à σ, et comme le point α décrit la conique C, la droite $\beta\gamma$ enveloppe la polaire réciproque de la conique C par rapport au cercle σ. Soit C' cette nouvelle conique; les plans des faces du tétraèdre, autres que le plan P, enveloppent le cône de sommet M et de base C'.

3. Tous ces tétraèdres ont même orthocentre, le centre ω de la sphère Σ; d'ailleurs, les coordonnées de ce point sont liées à celles du point M par la relation (1), et cette relation peut s'écrire

$$(b^2 + c^2)\alpha x_0 + (c^2 + a^2)\beta y_0 + (a^2 + b^2)\gamma z_0 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2 = 0.$$

Sous cette forme on voit immédiatement que les points M et ω sont conjugués par rapport à la quadrique fixe

$$S \equiv (b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=0.$$

A titre de simple renseignement, nous pouvons ajouter que cette quadrique S est le lieu des points d'où l'on peut mener trois tangentes rectangulaires à l'ellipsoïde E.

4. Soit Γ une sphère circonscrite au tétraèdre $M\alpha\beta\gamma$; elle passe au point ω_1 symétrique de ω par rapport au plan P; de plus, étant harmoniquement circonscrite à Σ, elle est orthogonale à la sphère Σ_1, concentrique à Σ, et lieu des points d'où l'on peut mener trois plans tangents rectangulaires à cette sphère Σ. Elle est donc orthogonale à Σ_1 et aux deux sphères de rayons nuls ayant pour centres les points M et ω_1. Le lieu de son centre est alors évidemment l'axe radical de ces trois sphères.

5. Le plan polaire de M par rapport à la surface S a pour équation

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)-\left(\frac{xx_0}{a^4}+\frac{yy_0}{b^4}+\frac{zz_0}{c^4}\right)=0;$$

il contient donc la droite polaire de $M\omega$ par rapport à l'ellipsoïde, car cette droite, $M\omega$, a pour équations

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{z_0}{c^2}},$$

et les plans mis en évidence dans l'équation précédente sont les plans polaires du point (x_0, y_0, z_0) et du point à l'infini $\left(\dfrac{x_0}{a^2}, \dfrac{y_0}{b^2}, \dfrac{z_0}{c^2}, 0\right)$. Alors, si le point ω vient sur l'ellipsoïde, comme le plan précédent passe aussi au point ω, il coïncide avec le plan tangent à E. Il en résulte que le lieu de M est la surface polaire réciproque de E par rapport à S.

Mais il y a d'autres points M pour lesquels le point ω est sur l'ellipsoïde : ce sont ceux pour lesquels la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan P tombe en un point ω de la courbe C; les tétraèdres répondant à la question ont tous pour arêtes ωM et les deux côtés d'un angle droit situé dans le plan P et ayant pour sommet le point ω; la sphère Σ a alors pour centre ce point ω et un rayon nul. On aura le lieu de ces nouveaux points en exprimant que le cône circonscrit issu de M contient la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan P. On trouve ainsi

$$(2)\qquad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}+\frac{z^2}{c^6}\right)-\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2=0.$$

C'est une surface du quatrième ordre ayant un point double isolé à l'origine des coordonnées, et dont le cône des directions asymptotiques a pour lignes doubles trois parallèles aux axes.

6. Si le point ω est donné, le point M est sur la cubique gauche

$$\frac{\alpha-x}{\dfrac{x}{a^2}}=\frac{\beta-y}{\dfrac{y}{b^2}}=\frac{\gamma-z}{\dfrac{z}{c^2}};$$

il est de plus dans le plan polaire de ω par rapport à S; il a donc trois positions différentes, qui sont les points de rencontre de la cubique avec le plan indiqué.

Ce plan a pour équation

$$(b^2+c^2)\alpha x+(c^2+a^2)\beta y+(a^2+b^2)\gamma z-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=0;$$

d'autre part, les équations de la cubique en fonction d'un paramètre, λ, sont

$$x=\frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda},\qquad y=\frac{b^2\beta}{b^2+\lambda},\qquad z=\frac{c^2\gamma}{c^2+\lambda};$$

les paramètres des points communs sont donc fournis par l'équation du troisième degré

$$\frac{(b^2+c^2)a^2\alpha^2}{a^2+\lambda}+\frac{(c^2+a^2)b^2\beta^2}{b^2+\lambda}+\frac{(a^2+b^2)c^2\gamma^2}{c^2+\lambda}-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=0.$$

Il est visible que cette équation a ses trois racines réelles et comprises entre $-a^2$ et $-b^2$, $-b^2$ et $-c^2$, $-c^2$ et $+\infty$; par conséquent les trois points M_1, M_2, M_3 sont réels.

7. Les points M_1, M_2 et M_3 sont conjugués de ω par rapport à S; il suffit donc de démontrer qu'ils sont conjugués deux à deux par rapport à cette même quadrique. Pour cela, soient

$$x_1=\frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda_1},\qquad y_1=\frac{b^2\beta}{b^2+\lambda_1},\qquad z_1=\frac{c^2\gamma}{c^2+\lambda_1},$$

$$x_2=\frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda_2},\qquad y_2=\frac{b^2\beta}{b^2+\lambda_2},\qquad z_2=\frac{c^2\gamma}{c^2+\lambda_2},$$

les coordonnées de deux de ces points, M_1 et M_2; nous devons avoir

$$(b^2+c^2)x_1x_2+(c^2+a^2)y_1y_2+(a^2+b^2)z_1z_2-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=0,$$

ou

$$\frac{(b^2+c^2)a^4\alpha^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{(c^2+a^2)b^4\beta^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}+\frac{(a^2+b^2)c^4\gamma^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=0.$$

Or cette relation résulte des deux relations évidentes

$$\frac{(b^2+c^2)a^2\alpha^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{(c^2+a^2)b^2\beta^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{(a^2+b^2)c^2\gamma^2}{c^2+\lambda_1}-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=0,$$

$$\frac{(b^2+c^2)a^2\alpha^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{(c^2+a^2)b^2\beta^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{(a^2+b^2)c^2\gamma^2}{c^2+\lambda_2}-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=0,$$

multipliées respectivement par λ_1, λ_2, puis soustraites l'une de l'autre.

8. Le tétraèdre $\omega M_1M_2M_3$ est inscrit dans une cubique gauche équilatère; par conséquent, s'il est orthocentrique, son orthocentre est situé sur la cubique (voir une note de M. G. Lapointe parue dans le n° d'octobre 1896); la droite qui joint le point ω à ce point est donc alors une génératrice du cône du second degré qui du point ω projette la cubique. On obtiendra donc la condition cherchée en exprimant que ce cône contient la perpendiculaire abaissée du point ω sur son plan polaire par rapport à S. Or ce cône a pour équation

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & a^2(x-\alpha) & \alpha \\ y-\beta & b^2(y-\beta) & \beta \\ z-\gamma & c^2(z-\gamma) & \gamma \end{vmatrix}=0;$$

en exprimant que le cône parallèle mené par l'origine contient la direction $(b^2+c^2)\alpha$, $(c^2+a^2)\beta$, $(a^2+b^2)\gamma$, on obtient la condition cherchée

$$\begin{vmatrix} (b^2+c^2)\alpha & a^2(b^2+c^2)\alpha & \alpha \\ (c^2+a^2)\beta & b^2(c^2+a^2)\beta & \beta \\ (a^2+b^2)\gamma & c^2(a^2+b^2)\gamma & \gamma \end{vmatrix}=0;$$

cette relation se réduit évidemment à

$$\alpha\beta\gamma\begin{vmatrix} a^2 & b^2c^2 & 1 \\ b^2 & c^2a^2 & 1 \\ c^2 & a^2b^2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

puis à

$$\alpha\beta\gamma(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2) = 0.$$

Elle n'est pas vérifiée en général : cela n'arrive, pour un ellipsoïde quelconque, que si le point ω est dans l'un des plans principaux de cet ellipsoïde.

De même le cône qui du point O projette la cubique a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & a^2x & a^2\alpha \\ y & b^2y & b^2\beta \\ z & c^2z & c^2\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

et, pour exprimer que le tétraèdre $OM_1M_2M_3$ est orthocentrique, il suffit d'exprimer que ce cône contient la direction $(b^2 + c^2)\alpha$, $(c^2 + a^2)\beta$, $(a^2 + b^2)\gamma$; on trouve ainsi la condition

$$\begin{vmatrix} (b^2 + c^2)\alpha & a^2(b^2 + c^2)\alpha & a^2\alpha \\ (c^2 + a^2)\beta & b^2(a^2 + c^2)\beta & b^2\beta \\ (a^2 + b^2)\gamma & c^2(a^2 + b^2)\gamma & c^2\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

qui se réduit à

$$\alpha\beta\gamma(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2) = 0.$$

Cette relation n'est pas satisfaite en général : cela n'arrive, pour un ellipsoïde quelconque, que si le point ω est dans l'un des plans principaux de cet ellipsoïde.

Dans le cas d'un hyperboloïde,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

cette relation est satisfaite, en particulier, quel que soit le point ω, pour $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, c'est-à-dire quand on peut circonscrire au cône asymptote un trièdre trirectangle.

V. FERRET D'EPERLECQUES.

Bonne solution : M. L. Savous.

PHYSIQUE

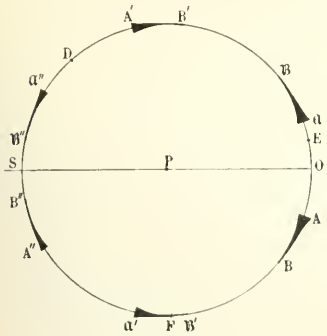
526. — *Un prisme de verre limité par deux bases normales aux arêtes et ayant la forme d'un triangle équilatéral tourne d'un mouvement très rapide autour d'un axe vertical parallèle aux arêtes et passant par les centres de gravité des bases, à l'intérieur d'une pièce ayant la forme d'un cylindre dont l'axe coïncide avec l'axe de rotation du prisme. Le diamètre de cette pièce peut être considéré comme infini vis-à-vis des dimensions du prisme. Une fente verticale pratiquée dans la paroi de la pièce laisse passer un faisceau de rayons parallèles et horizontaux juste assez large pour couvrir le prisme dans toutes les positions.*

On demande de décrire les phénomènes que verrait un observateur regardant les murs de la pièce.

Comment se servir de cette disposition pour mesurer l'indice du prisme?

(*Concours général, 1896.*)

On observera sur les murs de la pièce une apparence lumineuse produite



par les rayons réfléchis extérieurement par le prisme,

par les rayons réfractés sans réflexion intérieure,

par les rayons réfractés avec une ou plusieurs réflexions intérieures.

Les premiers produiront évidemment un éclairement continu, d'ailleurs très faible, sur tout le pourtour de la pièce.

Pour étudier le phénomène produit par les autres, nous appellerons A l'angle du prisme, n son indice, λ l'angle de réfraction limite, i l'angle d'incidence sur la première face rencontrée par la lumière, i' l'angle d'émergence des rayons qui sortent par la seconde face et k l'angle d'incidence correspondant à l'émergence rasante et donné, par conséquent, par l'équation

$$\sin k = n \sin (A - \lambda).$$

Considérons la lumière qui, ayant pénétré dans le prisme, rencontre successivement les faces dans un ordre déterminé. Les déviations des rayons qui émergent des faces prises successivement sont :

$$\Delta_1 = i + i' - A = i + i' - \frac{\pi}{3};$$

$$\Delta_2 = \pi + 2i - 2A = 2i + \frac{\pi}{3};$$

$$\Delta_3 = 2\pi + i + i' - 3A = \Delta_1 + \frac{4}{3}\pi;$$

$$\Delta_4 = 3 + 2i - 4A = \Delta_2 + \frac{4}{3}\pi;$$

$$\Delta_5 = 4\pi + i + i' - 5A = \Delta_1 + \frac{8}{3}\pi;$$

$$\Delta_6 = 5\pi + 2i - 6A = \Delta_2 + \frac{8}{3}\pi.$$

Les déviations suivantes reproduiront les premières avec une différence d'un nombre entier de circonférences.

La déviation Δ_1 passe, comme on sait, par un minimum α pour $i = i'$, et prend la valeur limite β soit pour $i = \frac{\pi}{2}$, soit pour $i = k$. Soient P le prisme, SPO la direction des rayons incidents, OA l'arc correspondant, sur les murs de la pièce, à la déviation α, OB l'arc correspondant à β. Les rayons sortant par la seconde face produiront en A, en lumière monochromatique, une tache lumineuse qui ira en se dégradant jusqu'en B; le minimum α est plus petit pour les rayons rouges que pour les rayons violets ; en lumière blanche, la tache A sera donc bordée de rouge. Ce phénomène sera le plus lumineux de tous, et cela pour les deux raisons suivantes : 1° la lumière qui le produit n'a éprouvé que de légères pertes par réflexion sur les deux faces du prisme ; 2° le mouvement de la tache lumineuse produit par la rotation du prisme a une vitesse nulle en A.

Les déviations Δ_3 et Δ_5 ne diffèrent de Δ_1 que par une constante, le phénomène observé en AB se reproduira, à l'intensité près, en A′B′ et en A″B″, à des distances de AB respectivement égales à $\frac{4}{3}\pi$ et à $\frac{8}{3}\pi$. Les phénomènes correspondant aux autres déviations d'ordre impair se superposent aux précédents.

Considérons maintenant la déviation Δ_2. Elle correspond à des incidences pouvant varier entre $\frac{\pi}{2}$ et l'incidence k' pour laquelle le rayon serait parallèle à la seconde face :

$$\sin k' = -n \cos A ;$$

si cette expression était, en valeur absolue, supérieure à l'unité, on pourrait faire varier i de $\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$; Δ_2 varie, toujours dans le même sens, de $\pi + \frac{\pi}{3}$ à $2k' + \frac{\pi}{3}$ ou $-\pi + \frac{\pi}{3}$; il en résulte une traînée lumineuse très pâle allant du point D au point E. Quand l'incidence passe par la valeur k, la réflexion sur la seconde face devient totale ; si F désigne le point correspondant, la lumière sera plus vive de F en E que de D en F.

Les déviations Δ_4 et Δ_6 reproduisent le même phénomène à des distances $\frac{4}{3}\pi$ et $\frac{8}{3}\pi$ du premier, mais seulement pour des incidences comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et 0 parce que, pour des incidences négatives, le rayon réfléchi sur la troisième face revient nécessairement sur la seconde.

En considérant les faces dans l'ordre inverse du précédent, on trouve les phénomènes symétriques des précédents par rapport à la droite SOP et en particulier les taches lumineuses a, a', a'', bordées de rouge en lumière blanche. La distance des taches A et a permettrait de déterminer la déviation minima et, par suite, l'indice du prisme.

On pourrait enfin considérer les rayons réfléchis sur les faces prises tantôt dans un certain ordre tantôt dans l'ordre inverse. On vérifierait facilement que ces rayons produisent des phénomènes superposés aux précédents et d'ailleurs très peu lumineux.

Remarque. — Ce qui précède n'est autre chose que la théorie du phénomène naturel connu sous le nom de halo et produit par la réfraction de la lumière du soleil ou de la lune dans des cristaux prismatiques de glace suspendus dans l'atmosphère. L'indice de la glace est égal à 1,31 ; on en déduit les valeurs suivantes pour les principaux angles dont il est question ci-dessus :

$$\lambda = 49^\circ\, 45'\, 40'' ;$$
$$\alpha = 21^\circ\, 51'\, 20'' ;$$
$$\beta = 43^\circ\, 27'\, 55'' ;$$
$$k = 13^\circ\, 27'\, 55'' ;$$
$$k' = -40^\circ\, 55'\, 10''.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

636. — On considère deux coniques fixes C et C' et une autre conique fixe S doublement tangente à chacune d'elles; puis, une conique variable Σ doublement tangente aussi à C et à C'. On demande de trouver l'enveloppe des cordes communes à S et à Σ.

H. Andover.

637. — On considère une ellipse (E) dont les deux foyers sont sur un cercle fixe (C), l'un, fixe, F, l'autre, mobile, F', et tangente en outre à ce cercle en un point variable I.

Trouver et construire :

1° Le lieu des sommets des ellipses (E) ;

2° Le lieu des ombilics des ellipses (E) et du cercle (C);

3° L'enveloppe des directrices de ces ellipses ;

4° L'enveloppe de la sécante commune à l'ellipse (E) et au cercle (C) qui est parallèle à la tangente en I.

Vasnier.

638. — Trouver le lieu des foyers des coniques bitangentes à deux cercles donnés (*).

(*) Cette question a déjà été proposée dans les *Nouvelles Annales* par M. Cretin. Mais nous en avons reçu deux belles solutions qui intéresseront certainement les lecteurs de la Revue. C'est ce qui nous engage à la proposer de nouveau.

639. — D'un point P on abaisse des perpendiculaires : 1° sur les génératrices; 2° sur les plans tangents à un cône (C) du second ordre et de sommet O; le lieu de leurs pieds se compose de deux courbes (Γ) et (Γ'). Quel lieu doit décrire P pour qu'elles soient planes?

(J. Limes.)

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

569. — *On considère une parabole et une corde dont la projection sur l'axe soit égale à une longueur constante donnée.*

1° *Trouver le lieu de l'intersection des normales menées aux deux extrémités de cette corde.*

2° *Mener par un point quelconque du lieu trois normales à la parabole. Que dire du cas où la projection de cette corde tend vers zéro?*

1. La normale au point (x_1, y_1) de la parabole $y^2 - 2px = 0$ a pour équation

$$\frac{x - x_1}{-p} = \frac{y - y_1}{y_1},$$

ou, en remplaçant x_1 par $\frac{y_1^2}{2p}$,

$$xy_1 + py - \frac{y_1^3}{2p} - py_1 = 0.$$

Considérons une seconde normale au point (x_2, y_2)

$$xy_2 + py - \frac{y_2^3}{2p} - py_2 = 0.$$

Le point de rencontre de ces normales a pour coordonnées

$$(1) \qquad x = \frac{y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2}{2p} + p, \qquad y = -\frac{y_1y_2(y_1 + y_2)}{2p^2}.$$

La projection sur Ox de la corde qui joint les pieds des normales est égale à la différence des abscisses de ces points. En désignant par a la longueur constante donnée on a

$$(2) \qquad y_1^2 - y_2^2 = 2pa.$$

Pour avoir l'équation du lieu il faut éliminer y_1 et y_2 entre les équations (1) et (2).

Pour éviter ce calcul très pénible nous chercherons à exprimer les coordonnées x et y d'un point du lieu en fonction d'un paramètre.

La relation (2) peut s'écrire $\qquad (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2pa,$

on en déduit $\qquad y_1 + y_2 = 2pt, \qquad y_1 - y_2 = \frac{a}{t},$

t désignant un paramètre, et $\qquad y_1 = \frac{2pt^2 + a}{2t}, \qquad y_2 = \frac{2pt^2 - a}{2t}.$

Remplaçons enfin y_1 et y_2 par ces valeurs dans les équations (1) nous avons

$$x = \frac{12p^2t^4 + 8p^2t^2 + a^2}{8pt^2}, \qquad y = -\frac{4p^2t^4 - a^2}{4pt}.$$

Le lieu cherché est donc une courbe unicursale du cinquième degré.

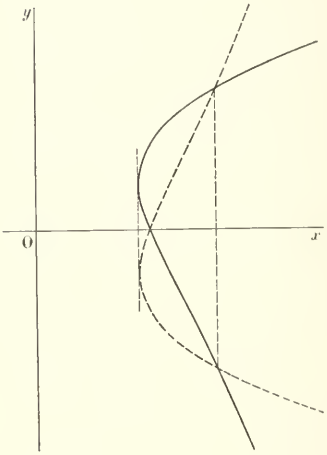
Calculons les dérivées de x et de y par rapport à t, nous obtenons

$$x' = \frac{12p^2t^4 - a^2}{4pt^3}, \qquad y' = -\frac{12p^2t^4 + a^2}{4pt^2}.$$

En changeant t en $-t$, x ne change pas et y change simplement de signe ; par suite la courbe est symétrique par rapport à Ox, et nous en construirons la moitié en faisant varier t de 0 à $+\infty$.

Nous avons le tableau suivant :

t	0		$\sqrt{\frac{a}{2p\sqrt{3}}}$		$\sqrt{\frac{a}{2p}}$		$+\infty$
x	$+\infty$	décroît	$p+\frac{a\sqrt{3}}{2}$	croît	$p+a$	croît	$+\infty$
y	$+\infty$	décroît	$\sqrt{\frac{a^3\sqrt{3}}{48p}}$	décroît	0	décroît	$-\infty$



Nous en déduisons facilement la forme de la courbe.

Pour déterminer la nature des branches infinies, considérons le rapport $\frac{y}{x}$, nous avons

$$\frac{y}{x} = -\frac{(4p^2t^4 - a^2)t}{12p^2t^4 + 8p^2t^2 + a^2}.$$

Pour $t = 0$, $\frac{y}{x}$ est nul, donc la branche infinie relative aux valeurs infiniment petites de t est parabolique dans la direction Ox.

Quand t croît indéfiniment, $\frac{y}{x}$ augmente aussi indéfiniment, par suite la branche infinie qui correspond aux valeurs de t infiniment grandes est parabolique dans la direction Oy.

En achevant la courbe par symétrie on reconnait alors l'existence de deux points doubles qu'on peut déterminer analytiquement.

Désignons pour cela par t_1 et t_2 les valeurs de t relatives à l'un des points doubles ; nous devons avoir

$$\frac{12p^2t_1^4 + 8p^2t_1^2 + a^2}{8pt_1^2} = \frac{12p^2t_2^4 + 8p^2t_2^2 + a^2}{8pt_2^2}, \qquad \frac{4p^2t_1^4 - a^2}{4pt_1} = \frac{4p^2t_2^4 - a^2}{4pt_2},$$

ou en supprimant dans la première le facteur $t_1^2 - t_2^2$ et dans la seconde le facteur $t_1 - t_2$

$$12p^2t_1^2t_2^2 - a^2 = 0, \qquad 4p^2t_1t_2(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + a^2 = 0.$$

La deuxième montre que t_1t_2 doit être négatif, nous pouvons l'écrire

$$4p^2t_1t_2[(t_1 + t_2)^2 - t_1t_2] + a^2 = 0$$

et en y remplaçant t_1t_2 par la valeur $-\frac{a}{2p\sqrt{3}}$ tirée de la première nous obtenons

$$(t_1 + t_2)^2 = \frac{a}{p\sqrt{3}};$$

on déduit de là t_1 et t_2, et par suite les coordonnées des points doubles.

2. Les ordonnées des pieds des normales issues d'un point (x_0, y_0) à la parabole sont racines de l'équation

$$(3) \qquad y^3 + 2py(p - x_0) - 2p^2y_0 = 0.$$

Si le point (x_0, y_0) appartient à la courbe que nous venons de construire, s'il correspond par

exemple à la valeur t_0 du paramètre t, nous connaissons deux racines de l'équation (3), ce sont

$$y_1 = \frac{2pt_0^2 + a}{2t_0}, \qquad y_2 = \frac{2pt_0^2 - a}{2t_0},$$

la troisième est alors égale à $-2pt_0$ puisque la somme est nulle.

3. Si a tend vers zéro la courbe du cinquième degré a pour limite une cubique dont les coordonnées des divers points ont pour expression

$$x = \frac{3}{2}pt^2 + p, \qquad y = -pt^3.$$

En éliminant t entre ces deux équations on obtient

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3,$$

C'est l'équation de la développée de la parabole ; résultat qu'il était aisé de prévoir.

---

571. — *On considère une parabole et un point fixe de l'axe de cette parabole. Par ce point, on mène une sécante variable* PQ. *On décrit un cercle passant aux points* P *et* Q *et au sommet.*

1° *Trouver le lieu du centre de ce cercle.*

2° *Trouver le lieu du point de concours des sécantes communes au cercle et à la parabole.*

3° *Trouver le lieu de la projection du quatrième point sur la corde* PQ.

Prenons pour axes les axes habituels relatifs à la parabole et désignons par a l'abscisse du point fixe situé sur l'axe de la parabole. La parabole aura pour équation $y^2 - 2px = 0$, et la sécante PQ, $y - \lambda(x-a) = 0$. Pour le cercle demandé, la seconde sécante associée à celle-ci a pour équation $y + \lambda x = 0$, car elle fait avec Ox le même angle que la précédente, en sens contraire. Par conséquent le cercle a pour équation

$$(1) \qquad \mu(y^2 - 2px) - (y + \lambda x)(y - \lambda x + \lambda a) = 0,$$

μ étant déterminé par la condition que les coefficients de x^2 et de y^2 soient égaux, $\mu = 1 + \lambda^2$; en remplaçant μ par cette valeur, cette équation se réduit à

$$(2) \qquad \lambda^2(x^2 + y^2) - [2p(1+\lambda^2) + a\lambda^2]x - a\lambda y = 0.$$

1. Les coordonnées du centre de ce cercle ont pour expressions $x = \frac{2p(1+\lambda^2) + a\lambda^2}{2\lambda^2}$, $y = \frac{a}{2\lambda}$, et nous aurons le lieu de ce point en éliminant λ entre ces deux équations ; ce calcul évident fournit l'équation

$$(3) \qquad y^2 = \frac{a^2}{4p}\left(x - p - \frac{a}{2}\right),$$

qui représente une parabole ayant Ox pour axe, pour sommet, le point d'abscisse $p + \frac{a}{2}$, et pour paramètre le nombre $\frac{a^2}{8p}$.

2. L'équation (1) représente l'équation générale des coniques passant par les points communs au cercle et à la parabole ; nous aurons donc le lieu des points de concours des sécantes communes à ces deux coniques en éliminant λ et μ entre les trois équations obtenues en annulant les dérivées partielles du premier membre de (1) par rapport à x, y, z ; ces trois équations sont

$$2p\mu + \lambda^2(a - 2x) = 0,$$
$$2y\mu - a\lambda - 2y = 0,$$
$$2px\mu + a\lambda(y + \lambda x) = 0 ;$$

la seconde est linéaire en λ et μ; nous aurons une nouvelle équation linéaire en λ et μ, en tirant λ^2 de la première équation et le portant dans la dernière; nous avons ainsi $\lambda^2 = \frac{2p\mu}{2x-a}$, puis $2px\mu + a\lambda y + \frac{2pax\mu}{2x-a} = 0$, qui se réduit à

$$4px^2\mu + ay(2x-a)\lambda = 0:$$

cette équation combinée avec la seconde des équations antérieures nous donne de suite λ et μ,

$$\frac{\lambda}{4px^2} = \frac{\mu}{ay(a-2x)} = \frac{-2y}{4apx^2 - 2ay^2(a-2x)}.$$

Il n'y a plus qu'à porter ces valeurs de λ et μ dans la première équation pour obtenir l'équation du lieu,

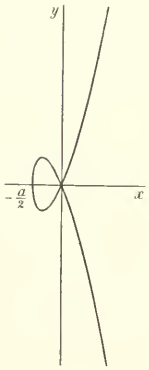
$$(4) \qquad y^2(a-2x)^2[a^2y^2 - 2px^2(2x+a)] = 0.$$

Cette équation se décompose en trois : la première, $y^2 = 0$, représente un lieu exceptionnel qui correspond à $\lambda = 0$, valeur pour laquelle les deux sécantes que nous avons envisagées coïncident; la seconde, $(a-2x)^2 = 0$, représente le lieu, évident *a priori*, du point de concours de ces deux sécantes ; la troisième,

$$(5) \qquad a^2y^2 - 2px^2(2x+a) = 0,$$

représente le lieu des points de concours des autres couples de sécantes; c'est le vrai lieu.

Cette courbe se construit immédiatement en résolvant l'équation (5) par rapport à y; elle a la forme ci-contre.



3. Le quatrième point de rencontre du cercle et de la parabole est le second point de rencontre de la parabole avec la droite $y + \lambda x = 0$; il a pour coordonnées $x = \frac{2p}{\lambda^2}$, $y = \frac{-2p}{\lambda}$. La perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite PQ a pour équation $y + \frac{2p}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\left(x - \frac{2p}{\lambda^2}\right) = 0$; nous aurons donc le lieu demandé en éliminant λ entre les deux équations

$$y - \lambda(x-a) = 0,$$
$$\lambda^3 y + 2p\lambda^2 + \lambda^2 x - 2p = 0;$$

cette élimination est immédiate et nous donne l'équation suivante :

$$(6) \qquad y^4 + 2py^2(x-a) + xy^2(x-a) - 2p(x-a)^3 = 0.$$

Le lieu est donc une courbe du quatrième degré. Nous allons construire cette courbe. Pour cela, nous ordonnons l'équation (6) par rapport aux puissances décroissantes de y, et nous discutons l'équation bicarrée ainsi obtenue,

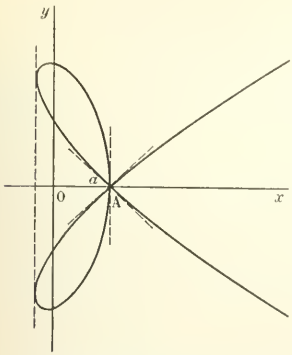
$$y^4 + y^2(x-a)(x+2p) - 2p(x-a)^3 = 0.$$

Si x est plus grand que a, l'équation du second degré en y^2 a deux racines de signes contraires ; il y a donc deux valeurs réelles de y égales et de signes contraires. Si x est plus petit que a et plus grand que $-2p$, il faut consulter la quantité sous le radical. Si x est moindre que $-2p$, il n'y a aucune valeur de y réelle.

La condition de réalité des valeurs de y^2 est

$$(x-a)^2[(x+2p)^2 + 8p(x-a)] \geqslant 0;$$

elle se réduit à $(x+2p)^2 + 8p(x-a) \geqslant 0$; or les deux racines de ce trinome sont moindres que a et comprennent entre elles le nombre $-2p$; les quatre valeurs de y ne sont donc réelles qu'à partir de la plus grande racine de ce trinome jusqu'à a, dans l'intervalle $(-6p + \sqrt{32p^2 + 8ap}, a)$. Pour $x = -6p + \sqrt{32p^2 + 8ap}$, les deux valeurs de y^2 sont égales ; pour $x = a$, toutes les valeurs de y



sont nulles ; pour x infini, toutes sont infinies. Il n'y a qu'une direction asymptotique réelle, $y = 0$, et l'asymptote correspondante est rejetée à l'infini ; les deux branches infinies réelles sont donc paraboliques. Au point (a, o) la courbe est tangente à une parallèle à Oy et aux droites de coefficients angulaires

$$\pm\sqrt{\frac{2p}{2p+a}}.$$

Tous ces résultats rapprochés les uns des autres permettent de tracer la courbe sans difficulté.

Remarque. — Pour construire les courbes, nous avons supposé a positif. Le lecteur verra sans peine quelles sont leurs formes quand a est négatif.

J. BADARD, élève à l'Ecole des mines de Saint-Etienne.

Bonnes solutions : MM. E.-N. Barisien ; M. Malplat, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne.

TRIGONOMÉTRIE

559. — *Résoudre un triangle connaissant un angle A, le périmètre $2p$ et la somme s des sinus des angles. On donnera les conditions de possibilité de ce triangle.*

$$A = 62^\circ 11' 17'', \qquad 2p = 793^m,075, \qquad s = 2,422.$$

(*École Centrale, 1896, 1re session.*)

I. — Solution et discussion du problème.

Des formules
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C};$$

on déduit
$$a = \frac{2p.\sin A}{s}.$$

On est ainsi ramené à résoudre un triangle connaissant A, a et $2p$, ou encore A, a et $b + c = 2p - a$. On a ensuite

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C},$$

ou
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{b-c}{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}.$$

On en déduit
$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{(b+c)\sin A}{2a\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a},$$

puis
$$b - c = \frac{2a\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}{\sin A} = \frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

La première formule donne $\frac{B-C}{2}$; on connaît $\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$; on en déduira B et C.

La seconde formule donne $b-c$; on connaît $b+c$; on en déduira b et c.

Reste à calculer $S = \frac{1}{2} bc \sin A$. On peut éviter le calcul de log. sin A en remplaçant sin A par $2 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2}$. Les formules à employer sont les suivantes :

$$a = 2 \cdot \frac{2p . \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2}}{s}, \qquad b+c = 2p - a, \qquad \cos\frac{B-C}{2} = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a},$$

$$b-c = \frac{a \sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \qquad S = bc \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2}.$$

Discussion. — La valeur trouvée pour $\cos\frac{B-C}{2}$ doit être inférieure ou égale à 1 :

$$\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a} \leqslant 1,$$

d'où

$$b+c \leqslant \frac{a}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Cela étant soit α l'arc du premier quadrant dont le cosinus est $\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a}$, on aura

$$\frac{B-C}{2} = \alpha, \qquad \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2};$$

d'où

$$B = 90^\circ - \frac{A}{2} + \alpha, \qquad C = 90^\circ - \frac{A}{2} - \alpha.$$

Les angles B et C doivent être positifs et moindres que 180°. La dernière condition est remplie d'elle-même si A, B, C sont positifs $(A+B+C = 180^\circ)$. Il suffira d'écrire que la valeur trouvée pour l'angle C est positive. Cela exige que $90^\circ - \frac{A}{2} > \alpha$,

c'est-à-dire

$$\sin\frac{A}{2} < \cos\alpha = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a},$$

d'où la condition, évidente *a priori* $a < b+c$.

Les conditions de possibilité du problème sont donc

$$a < b+c \leqslant \frac{a}{\sin\frac{A}{2}},$$

ou, en remplaçant a et $b+c$ par leurs valeurs en fonction des données, $\sin A < s - \sin A \leqslant 2\cos\frac{A}{2}$,

ou enfin

$$2 \sin A < s < \sin A + 2\cos\frac{A}{2}.$$

II. — Calcul numérique.

Données :

$A = 62^\circ 14' 17''$

$2p = 793^m,075$

$s = 2,422$

Formules :

$$a = 2 \cdot \frac{2p \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{s}$$

$$b + c = 2p - a$$

$$\cos \frac{B - C}{2} = \frac{(b + c) \sin \frac{A}{2}}{a}$$

$$b - c = \frac{a \sin \frac{B - C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$S = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

Résultats :

$B = 85^\circ\ 2' 33'',8$

$C = 32^\circ 46'\ 9'',2$

$a = 289^m,621$

$b = 326^m,2215$

$c = 177^m,2325$

$S = 25.569^{mq},12$

Calculs auxiliaires :

$\log s = 0,3841741$

79307	8993115
5	27,5

$\log 2p = 2,8993143$

$\frac{A}{2} = 31^\circ 5' 38'',5$

$31^\circ 5' 30''$	$\bar{1},7129936$
$8''$	279,2
$0'',5$	17,45

$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},7130233$

$31^\circ 5' 40''$	$\bar{1},9326346$
$-1''$	12,7
$-0'',5$	6,35

$\log \cos \frac{A}{2} = \bar{1},9326365$

50345	7019563
4	34,8

$\log (b + c) = 2,7019598$

$26^\circ 8' 10''$	$\bar{1},6439509$
$2''$	85,8
$0'',3$	12,87

$\log \sin \frac{B - C}{2} = \bar{1},6439608$

32622	5135106
1	13,3
5	6,6

$\log b = 2,5135126$

17723	2485372
2	49
5	12,25

$\log c = 2,2485433$

Calculs définitifs :

Calcul de a et $b + c$.

$\log 2 = 0,3010300$

$\log 2p = 2,8993143$

$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},7130233$

$\log \cos \frac{A}{2} = \bar{1},9326365$

$\text{colog } s = \bar{1},6158259$

$\log a = 2,4618300$

28962	285
1	15

$a = 289^m,621$

$2p = 793^m,075$

$b + c = 503^m,454$

Calcul de B et C.

$\log (b + c) = 2,7019598$

$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},7130233$

$\text{colog } a = \bar{3},5381700$

$\log \cos \frac{B - C}{2} = \bar{1},9531531$

$26^\circ 8' 20''$	451
	80
$-7''$	72,8
$-0'',7$	7,2

$\frac{B - C}{2} = 26^\circ\ 8' 12'',3$

$\frac{B + C}{2} = 85^\circ 54' 21'',5$

$B = 85^\circ\ 2' 33'',8$

$C = 32^\circ 46'\ 9'',2$

Calcul de b et c.

$\log a = 2,4618300$

$\log \sin \frac{B - C}{2} = \bar{1},6439608$

$\text{colog} \cos \frac{A}{2} = 0,0673635$

$\log (b - c) = 2,1731543$

14898	280
	263
9	261,9

$b - c = 148^m,989$

$b + c = 503^m,454$

$2b = 652^m,443$

$2c = 354^m,465$

Calcul de S.

$\log b = 2,5135126$

$\log c = 2,2485433$

$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},7130233$

$\log \cos \frac{A}{2} = \bar{1},9326365$

$\log S = 4,4077157$

25569	37
	20
1	17
2	3

$S = 25.569^{mq},12$

QUESTIONS PROPOSÉES

640. — On donne un cercle O et un point A. Ce point est le sommet d'un angle constant V dont les côtés rencontrent le cercle O aux points M et M'. — Trouver le lieu du point de rencontre P des tangentes au cercle en ces deux points. — Examiner ce que devient le lieu dans les cas particuliers suivants : 1° tg V est nul ou infini ; 2° le point A se confond avec le centre du cercle ; 3° le point A est un point du cercle.

641. — On considère les coniques circonscrites à un triangle OAB, rectangle en O, et qui sont telles que la normale au point O passe par le milieu de AB. Lieu des sommets. Séparer sur le lieu trouvé les sommets d'ellipses des sommets d'hyperboles. Etant donné un sommet d'ellipse, reconnaître s'il appartient au grand axe ou au petit axe de l'ellipse correspondante.

642. — On donne un cercle (C) et un point A ; on considère un cercle variable (C') passant par le point A et orthogonal au cercle (C). On mène une tangente commune à ces deux cercles, trouver le lieu du point de contact avec le cercle (C'). Construire ce lieu dans le cas particulier où le point A est sur le cercle (C).

CORRESPONDANCE

Un abonné de la Revue, M. E. Barré, étudiant en mathématiques à Valenciennes, me signale une erreur qui a été faite par M. Hugon dans l'article qui a paru au numéro de juillet 1895, sur l'enveloppe d'un cercle orthogonal à un cercle fixe et dont le centre décrit une conique à centre.

Page 161, M. Hugon dit que si le cercle donné est doublement tangent à la conique considérée, il y a trois anallagmaties dont les pôles sont : le pôle de la corde des contacts, le milieu de cette corde et le centre du cercle.

Or M. Barré démontre que dans ce cas l'enveloppe du cercle mobile se compose de deux cercles ayant pour centres les foyers et passant aux points de contact; par conséquent, tous les points de la corde des contacts sont des pôles d'anallagmatie. Ce résultat s'applique au cas où le cercle est osculateur à la conique en un de ses sommets.

La démonstration que donne notre correspondant est purement géométrique et s'appuie sur ce théorème : *Le lieu des centres des cercles orthogonaux à un cercle donné et tangents à un cercle également donné est une conique ayant pour cercle focal le premier cercle et pour foyer le centre du second cercle.*

Les lecteurs que cette question intéresse démontreront aisément ces diverses propriétés. Faute de place, je ne puis publier les démonstrations élégantes et simples que l'auteur m'a envoyées.

Je profite de cette rectification pour signaler une autre erreur que j'ai commise dans une généralisation trop hâtive. A la fin d'une note sur les fonctions croissantes (N° de décembre 1895), j'indique une définition employée par M. Méray, et j'affirme que cette définition peut se ramener à la définition habituelle des fonctions croissantes dans un intervalle donné. Or ceci n'est pas général et suppose la continuité des fonctions envisagées. Cette erreur m'a été signalée, il y a longtemps déjà, par M. Gérard, professeur au lycée de Lyon.

E. H.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMIE JACQUET.

7e Année. N° 8. Mai 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

RÉDUCTION SIMULTANÉE DE DEUX FORMES QUADRATIQUES A TROIS VARIABLES A DES SOMMES DE TROIS CARRÉS

par M. **A. Lagrange**, Professeur au collège de Saint-Jean-d'Angély

Soient les deux formes

$$f \equiv ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy,$$

$$\varphi \equiv a_1x^2 + a'_1y^2 + a''_1z^2 + 2b_1yz + 2b'_1zx + 2b''_1xy.$$

Le problème à résoudre est le suivant : Trouver une substitution linéaire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \\ y &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \\ z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z, \end{aligned} \right.$$

de module $\neq 0$ de manière à ramener les deux formes f et φ aux deux formes

$$F \equiv AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2,$$

$$\Phi \equiv A_1X^2 + A'_1Y^2 + A''_1Z^2.$$

Après la substitution définie par les formules (1) les formes f et φ deviennent

$$f(\alpha_1\beta_1\gamma_1)X^2 + \cdots + (\alpha_1 f'_{\alpha_2} + \beta_1 f'_{\beta_2} + \gamma_1 f'_{\gamma_2})XY + \cdots,$$

$$\varphi(\alpha_1\beta_1\gamma_1)X^2 + \cdots + (\alpha_1 \varphi'_{\alpha_2} + \beta_1 \varphi'_{\beta_2} + \gamma_1 \varphi'_{\gamma_2})XY + \cdots.$$

Si l'on remarque qu'on a identiquement

$$\alpha_1 f'_{\alpha_2} + \beta_1 f'_{\beta_2} + \gamma_1 f'_{\gamma_2} = \alpha_2 f'_{\alpha_1} + \beta_2 f'_{\beta_1} + \gamma_2 f'_{\gamma_1},$$

on voit que les coefficients α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 doivent satisfaire aux six équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \alpha_1 f'_{\alpha_2} &= 0, \\ \Sigma \alpha_1 f'_{\alpha_3} &= 0, \\ \Sigma \alpha_2 f'_{\alpha_3} &= 0. \end{aligned} \right. \qquad (3) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \alpha_1 \varphi'_{\alpha_2} &= 0, \\ \Sigma \alpha_1 \varphi'_{\alpha_3} &= 0, \\ \Sigma \alpha_2 \varphi'_{\alpha_3} &= 0. \end{aligned} \right.$$

La comparaison des deux dernières équations du système (2) et des deux dernières du système (3) donne les égalités

$$\frac{f'_{\alpha_3}}{\varphi'_{\alpha_3}} = \frac{f'_{\beta_3}}{\varphi'_{\beta_3}} = \frac{f'_{\gamma_3}}{\varphi'_{\gamma_3}}.$$

D'une manière générale trois coefficients α_i, β_i, γ_i de la substitution satisfont aux égalités

$$\frac{f'_{\alpha_i}}{\varphi'_{\alpha_i}} = \frac{f'_{\beta_i}}{\varphi'_{\beta_i}} = \frac{f'_{\gamma_i}}{\varphi'_{\gamma_i}} = -\lambda,$$

ou aux trois équations

$$(4)\qquad \begin{cases} f'_{\alpha_i} + \lambda\varphi'_{\alpha_i} = 0, \\ f'_{\beta_i} + \lambda\varphi'_{\beta_i} = 0, \\ f'_{\gamma_i} + \lambda\varphi'_{\gamma_i} = 0. \end{cases}$$

Les 3 nombres α_i, β_i, γ_i ne devant pas être nuls, car alors le module de la substitution serait nul, le déterminant des 3 équations homogènes et du 1er degré (4) doit être nul; c'est-à-dire que λ doit satisfaire à l'équation

$$H(\lambda) = \begin{vmatrix} a + \lambda a_1 & b'' + \lambda b''_1 & b' + \lambda b'_1 \\ b'' + \lambda b''_1 & a' + \lambda a'_1 & b + \lambda b_1 \\ b' + \lambda b'_1 & b + \lambda b_1 & a'' + \lambda a''_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du 3e degré en λ; développée elle est de la forme

$$(5)\qquad \Delta_1\lambda^3 + \Theta_1\lambda^2 + \Theta\lambda + \Delta = 0,$$

Δ_1 et Δ sont les discriminants des 2 formes; quant à Θ_1 et Θ il est facile de voir que ces expressions sont de la forme

$$\Theta_1 = a\,\frac{\partial\Delta}{\partial a_1} + a'\,\frac{\partial\Delta_1}{\partial a'_1} + \cdots,$$

$$\Theta = a_1\,\frac{\partial\Delta}{\partial a} + a'_1\,\frac{\partial\Delta}{\partial a'} + \cdots.$$

Considérons une racine λ de cette équation (5). Si cette racine n'annule pas tous les mineurs du déterminant H les équations (4) se réduisent à deux et on peut en tirer un système de valeurs et un seul pour α_i, β_i, γ_i (à des facteurs constants près). Si cette racine annule tous les mineurs du déterminant, les équations (4) se réduisent à une seule; α_i, β_i, γ_i ne sont donc assujettis qu'à une relation linéaire; enfin si cette racine annule tous les éléments du déterminant les équations (4) sont identiques.

Cela posé considérons deux racines distinctes λ_1, λ_2 de l'équation (5). Soient α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 deux systèmes de coefficients qui leur correspondent.

On a

$$\begin{cases} f'_{\alpha_1} + \lambda_1\varphi'_{\alpha_1} = 0, \\ f'_{\beta_1} + \lambda_1\varphi'_{\beta_1} = 0, \\ f'_{\gamma_1} + \lambda_1\varphi'_{\gamma_1} = 0, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} f'_{\alpha_2} + \lambda_2\varphi'_{\alpha_2} = 0, \\ f'_{\beta_2} + \lambda_2\varphi'_{\beta_2} = 0, \\ f'_{\gamma_2} + \lambda_2\varphi'_{\gamma_2} = 0. \end{cases}$$

Multiplions les équations du 1er système par α_2, β_2, γ_2 et ajoutons membre à membre; puis celles du second système par α_1, β_1, γ_1, et ajoutons encore membre à membre; nous obtenons les deux équations

$$\Sigma\alpha_2 f'_{\alpha_1} + \lambda_1\Sigma\alpha_2\varphi'_{\alpha_1} = 0,$$

$$\Sigma\alpha_1 f'_{\alpha_2} + \lambda_2\Sigma\alpha_1\varphi'_{\alpha_2} = 0,$$

et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ il faut nécessairement avoir

$$\Sigma\alpha_1 f'_{\alpha_2} \equiv \Sigma\alpha_2 f' = 0,$$

$$\Sigma\alpha_1\varphi'_{\alpha_2} \equiv \Sigma\alpha_2\varphi'_{\alpha_1} = 0.$$

Les coefficients satisfont donc aux deux premières équations des systèmes (2) et (3).

Avant d'aborder la discussion de l'équation (5) démontrons deux théorèmes.

Théorème I. — Une racine de l'équation (5) qui annule tous les éléments du déterminant $H(\lambda)$ est une racine triple.

En effet, si λ_1 est une telle racine, chaque colonne du déterminant contient en facteur $\lambda - \lambda_1$.

Le déterminant contient donc le facteur $(\lambda - \lambda_1)^3$.

Théorème II. — Une racine qui annule tous les mineurs du déterminant sans annuler tous les éléments est une racine double.

En effet, désignons par A, A′, A″ B, B′, B″ les mineurs du déterminant; on a les six identités suivantes :

$$(a + \lambda a_1)H \equiv A'A'' - B^2, \qquad (b + \lambda b_1)H \equiv B'B'' - AB,$$
$$(a' + \lambda a_1')H \equiv A''A - B'^2, \qquad (b' + \lambda b_1')H \equiv B''B - A'B',$$
$$(a'' + \lambda a_1'')H \equiv AA' - B''^2, \qquad (b'' + \lambda b_1'')H \equiv BB' - A''B''.$$

Soit λ_1 la racine considérée; dans l'une au moins de ces identités le coefficient de H ne s'annule pas pour $\lambda = \lambda_1$ et le second membre contient en facteur $(\lambda - \lambda_1)^2$; il faut donc que H contienne aussi en facteur $(\lambda - \lambda_1)^2$, c'est-à-dire que λ_1 soit racine double.

Discussion de l'équation en λ.

1ᵉʳ Cas. — *L'équation a 3 racines distinctes* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Chacune de ces trois racines étant simple, n'annule pas tous les mineurs du déterminant; il lui correspond donc un système et un seul de coefficients α, β, γ (à des facteurs constants près). Les coefficients $\alpha_1, \beta_1, \ldots \gamma_3$ satisfont d'ailleurs aux équations (2) et (3).

Donc si l'on effectue la substitution (1) où les coefficients auront des valeurs ainsi calculées, on obtiendra deux formes ne contenant que des carrés

$$F \equiv f(\alpha_1\beta_1\gamma_1)X^2 + f(\alpha_2\beta_2\gamma_2)Y^2 + f(\alpha_3\beta_3\gamma_3)Z^2,$$
$$\Phi \equiv \varphi(\alpha_1\beta_1\gamma_1)X^2 + \varphi(\alpha_2\beta_2\gamma_2)Y^2 + \varphi(\alpha_3\beta_3\gamma_3)Z^2.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{f'_{\alpha_1}}{\varphi'_{\alpha_1}} = \frac{f'_{\beta_1}}{\varphi'_{\beta_1}} = \frac{f'_{\gamma_1}}{\varphi'_{\gamma_1}} = \frac{\alpha_1 f'_{\alpha_1} + \beta_1 f'_{\beta_1} + \gamma_1 f'_{\gamma_1}}{\alpha_1\varphi'_{\alpha_1} + \beta_1\varphi'_{\beta_1} + \gamma_1\varphi'_{\gamma_1}} = \frac{f(\alpha_1\beta_1\gamma_1)}{\varphi(\alpha_1\beta_1\gamma_1)} = -\lambda_1.$$

De même

$$\frac{f(\alpha_2\beta_2\gamma_2)}{\varphi(\alpha_2\beta_2\gamma_2)} = -\lambda_2, \qquad \frac{f(\alpha_3\beta_3\gamma_3)}{\varphi(\alpha_3\beta_3\gamma_3)} = -\lambda_3.$$

Si les deux formes f et φ ont leurs discriminants différents de 0, aucune des racines de l'équation en λ n'est nulle ni infinie; donc

$$f(\alpha_1\beta_1\gamma_1), \qquad f(\alpha_2\beta_2\gamma_2), \ldots \text{ etc. sont } \neq 0.$$

D'ailleurs deux systèmes de coefficients $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sont distincts, car on a

$$\alpha_1 f'_{\alpha_2} + \beta_1 f'_{\beta_2} + \gamma_1 f'_{\gamma_2} = 0,$$

et si on avait

$$\alpha_1 = \alpha_2, \qquad \beta_1 = \beta_2, \qquad \gamma_1 = \gamma_2$$

on en déduirait

$$\alpha_1 f'_{\alpha_1} + \beta_1 f'_{\beta_1} + \gamma_1 f'_{\gamma_1} \equiv 2f(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = 0;$$

de même

$$f(\alpha_2\beta_2\gamma_2) = 0, \qquad f(\alpha_3\beta_3\gamma_3) = 0.$$

Le module de la substitution est donc différent de 0, car les deux formes F et Φ ont leurs discriminants non nuls.

Si nous effectuons la nouvelle substitution

$$\begin{cases} X_1 = X\sqrt{\varphi(\alpha_1\beta_1\gamma_1)}, \\ Y_1 = Y\sqrt{\varphi(\alpha_2\beta_2\gamma_2)}, \\ Z_1 = Z\sqrt{\varphi(\alpha_3\beta_3\gamma_3)}. \end{cases}$$

nous obtiendrons les deux formes

$$\begin{cases} \Phi \equiv X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \\ F \equiv -\lambda_1 X_1^2 - \lambda_2 X_2^2 - \lambda_3 X_3^2. \end{cases}$$

2e Cas. — *L'équation a une racine double n'annulant pas tous les mineurs du déterminant.*

Soient λ_1 la racine simple, λ_2 la racine double. λ_1 donne un système de valeurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Quant à λ_2 il donne aussi un seul système de valeurs $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Nous ne pouvons donc avoir que deux systèmes de valeurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ satisfaisant aux équations (2) et (3). Le problème est impossible.

3e Cas. — *L'équation en λ a une racine double annulant tous les mineurs du déterminant.*

Soient λ_1 la racine simple; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ le système de coefficients qui lui correspond; λ_2 la racine double. Il lui correspond une infinité de systèmes de coefficients assujettis seulement à vérifier la relation linéaire

$$f'_2 + \lambda_2 \varphi'_2 = 0. \tag{6}$$

Soient $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ deux systèmes distincts de coefficients satisfaisant à cette relation. Ces neuf coefficients satisfont aux deux premières équations du système (2) et aux deux premières équations du système (3).

D'ailleurs on a aussi

$$\Sigma \alpha_2 f'_{\alpha_1} + \lambda_2 \Sigma \alpha_2 \varphi'_{\alpha_1} = 0;$$

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ étant choisis arbitrairement, on peut parmi les solutions de (6) choisir $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ de manière qu'ils satisfassent à une seconde relation

$$\Sigma \alpha_2 f'_{\alpha_1} = 0;$$

alors on a aussi

$$\Sigma \alpha_2 \varphi'_{\alpha_1} = 0.$$

Les deux formes sont alors réduites à une somme de trois carrés et l'on voit que la réduction peut être obtenue d'une infinité de manières.

Par une seconde substitution, on obtiendra les deux formes

$$\Phi \equiv X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2,$$
$$F \equiv \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 (Y_1^2 + Z_1^2).$$

4e Cas. — *L'équation en λ a une racine triple n'annulant pas tous les éléments.*

Si la racine n'annule pas tous les mineurs on ne peut obtenir pour α, β, γ qu'un système de valeurs : le problème est impossible.

Si la racine annule tous les mineurs sans annuler tous les éléments, α, β, γ ne sont assujettis qu'à une relation; on peut obtenir une infinité de systèmes. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ deux systèmes différents; il satisfont à l'équation

$$\Sigma \alpha_1 f \alpha_2 + \lambda \Sigma' \alpha_1 \varphi'_{\alpha_2} = 0;$$

on peut choisir $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ de manière qu'ils satisfassent à

$$\Sigma \alpha_1 f'_{\alpha_2} = 0.$$

Mais $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ étant déterminés, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ le seront aussi et on ne pourra trouver qu'un seul système de coefficients tels que $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Le problème est encore impossible.

5e Cas. — *L'équation a une racine triple annulant tous les éléments.*

Les deux formes quadratiques sont identiques à un facteur constant près. Toute substitution qui réduit la première à une somme de trois carrés (et il y en a une infinité) réduit de même l'autre à une somme de 3 carrés.

6e Cas. — *L'équation en λ est identiquement nulle.*

Les deux formes ayant leur discriminant nul sont des produits de facteurs linéaires. On peut les prendre sous la forme

$$\varphi \equiv 2xy, \qquad f \equiv (ax + by + cz)(a'x + b'y + c'z).$$

On a $\qquad \Theta_1 = -cc', \qquad \Theta = \frac{ab' + ba'}{2} cc' + \frac{(ac' + ca')(bc' + cb')}{2};$

on a donc $cc' = 0$, par exemple $c = 0$,

alors $$\Theta = \frac{abc'^2}{2}.$$

Si l'on a soit $a = 0$ soit $b = 0$ les deux formes ont un facteur commun, par exemple

$$f \equiv ax(a'x + b'y + c'z) \equiv \frac{ab'}{2} \varphi + aa'x^2 + ac'xz.$$

On ne peut évidemment ramener f et φ à une somme de trois carrés par une substitution linéaire.

Si $c' = 0$ les deux formes ne contiennent plus que deux variables x et y. Nous n'examinerons pas ce cas qui mériterait une étude à part et qui n'est pas contenu dans l'énoncé de notre leçon.

Nous n'examinerons pas les applications de cette étude à celle de l'intersection de deux coniques.

Cette application ne présente aucune difficulté et on retrouvera sans peine les résultats trouvés par d'autres méthodes, par exemple par la méthode de M. Darboux.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

574. — *On donne une parabole et on considère un point* M *quelconque dans son plan ; de ce point on mène les deux tangentes* MA *et* MB *à la parabole, qui touchent cette courbe en* A *et* B ; *et on demande :*

1° *L'équation du cercle circonscrit au triangle* MAB *et le lieu décrit par le centre de ce cercle quand son rayon reste constant ;*

2° *De dire ce que devient ce cercle quand le point* M *vient sur la parabole et de trouver le lieu de son centre quand le point* M *décrit la parabole ;*

3° *De trouver, dans ces conditions, l'enveloppe du cercle mobile.*

On construira les courbes ainsi trouvées.

Rapportons la parabole à son axe et à sa tangente au sommet et désignons par $y^2 - 2px = 0$ son équation, par α et β les coordonnées du point M. L'équation de la polaire de ce point par rapport à la parabole est $\beta y - px - p\alpha = 0$, et celle de la seconde corde commune à la parabole et au cercle est $\beta y + px + \lambda = 0$, puisqu'elle fait avec Ox, et en sens contraire, le même angle que la droite précédente.

1° L'équation du cercle circonscrit au triangle MAB est donc

$$\mu(y^2 - 2px) + (\beta y - px - p\alpha)(\beta y + px + \lambda) = 0,$$

μ et λ étant déterminés de façon que cette équation représente un cercle passant au point (α, β). En égalant les coefficients d'x^2 et d'y^2, on a d'abord $\mu = -p^2 - \beta^2$; puis, en faisant $x = \alpha$, $y = \beta$, on a ensuite

$$\mu + \beta^2 + p\alpha + \lambda = 0,$$

et, par suite $\lambda = p^2 - p\alpha$. L'équation cherchée est donc finalement

$$(\beta^2 + p^2)(y^2 - 2px) - (\beta y - px - p\alpha)(\beta y + px + p^2 - p\alpha) = 0,$$

ou mieux

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - \frac{2\beta^2 + p^2}{p} x - \frac{\beta(p - 2\alpha)}{p} y + \alpha(p - \alpha) = 0.$$

Si nous écrivons que ce cercle a un rayon constant et égal à R, nous avons la relation

$$\frac{(2\beta^2+p^2)^2}{4p^2}+\frac{\beta^2(p-2\alpha)^2}{4p^2}-\alpha(p-\alpha)=R^2;$$

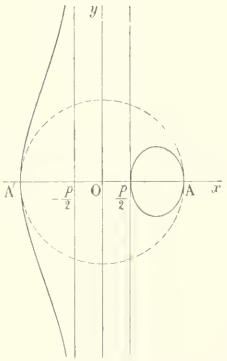
d'autre part, en désignant par x et y les coordonnées du centre de ce cercle, nous avons

$$\frac{2\beta^2+p^2}{2p}=x, \qquad \frac{\beta(p-2\alpha)}{2p}=y,$$

et nous n'avons plus qu'à éliminer α et β entre ces deux équations et la relation écrite plus haut. Cette élimination se fait très facilement en remplaçant $\alpha(\alpha-p)$ par $\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}$, et elle fournit l'équation

$$(2) \qquad \left(x^2+y^2-\frac{p^2}{4}-R^2\right)\left(x-\frac{p}{2}\right)+py^2=0.$$

Nous obtenons ainsi une cubique circulaire symétrique par rapport à Ox, ayant pour direction asymptotique Oy et pour asymptote correspondante la directrice de la parabole, $x+\frac{p}{2}=0$. Résolvons maintenant l'équation par rapport à y^2; nous aurons



$$y^2=-\frac{\left(x-\frac{p}{2}\right)\left(x^2-\frac{p^2}{4}-R^2\right)}{x+\frac{p}{2}},$$

et cette équation nous montre que y n'est réel que dans les deux intervalles

$$\left(-\sqrt{\frac{p^2}{4}+R^2},\ -\frac{p}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{p}{2},\ \sqrt{\frac{p^2}{4}+R^2}\right).$$

En se reportant à l'équation (2), nous voyons alors que la courbe se compose d'une portion infinie, asymptote à $x+\frac{p}{2}=0$, à gauche, et extérieure au cercle $x^2+y^2=\frac{p^2}{4}+R^2$, et d'un ovale intérieur à ce cercle situé à droite de $x-\frac{p}{2}=0$; c'est une forme de cubique bien connue.

2° Si l'on suppose que le point (α, β) soit sur la parabole, on a $\alpha=\frac{\beta^2}{2p}$, et l'équation du cercle devient

$$(3) \qquad x^2+y^2-\frac{2\beta^2+p^2}{p}x-\frac{\beta(p^2-\beta^2)}{p^2}y+\frac{\beta^2(2p^2-\beta^2)}{4p^2}=0.$$

La première sécante commune au cercle et à la parabole est alors la tangente à la parabole au point (α, β); ce cercle est donc tangent à la parabole en ce point. Nous achèverons de fixer la position du cercle en voyant ce que devient la seconde sécante commune; or elle a pour équation $\beta y+px+p^2-p\alpha=0$, elle rencontre donc la précédente, $\beta y-px-p\alpha=0$, sur la directrice de la parabole. Soit H ce point; la polaire de ce point est la même dans la parabole et dans le cercle; d'ailleurs elle est perpendiculaire à la droite HF qui joint le point H au foyer; la droite HF passe donc au centre du cercle. Dès lors, le cercle est bien déterminé, puisqu'il passe en (α, β) et que son centre est situé à la rencontre de HF avec la normale à la parabole au point (α, β).

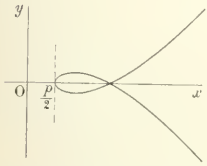
Le lieu de son centre est donné, en fonction du paramètre arbitraire β, par les deux équations

$$(4) \qquad x=\frac{2\beta^2+p^2}{2p}, \qquad y=\frac{\beta(p^2-\beta^2)}{2p^2};$$

on obtient l'équation ordinaire en éliminant β entre les deux équations, ce qui est facile et fournit le résultat suivant

$$32py^2 - (2x - p)(3p - 2x)^2 = 0. \tag{5}$$

Cette équation représente une cubique symétrique par rapport à Ox, réelle à partir de la droite $x = \frac{p}{2}$, du côté des x positifs, ayant un point double sur Ox, au point $x = \frac{3p}{2}$, et admettant deux branches paraboliques parallèles à Oy. Cette courbe se construit donc très aisément.



3° Nous aurons l'enveloppe du cercle actuel, en prenant la dérivée de son équation par rapport à β et en éliminant β entre les deux équations, ou bien, et dans le cas actuel cela vaut mieux, en cherchant les ordonnées des points de rencontre du cercle avec la droite qui passe aux points limites. L'un de ces points a pour ordonnée $y = \beta$; nous aurons donc aisément l'ordonnée de l'autre point, c'est-à-dire du point qui décrit le lieu, en fonction de β. Nous définirons ainsi le lieu par deux équations exprimant x et y en fonction de β.

La droite qui passe aux points limites s'obtient en prenant la dérivée de l'équation (3) par rapport à β; elle a pour équation

$$4p\beta x + (p^2 - 3\beta^2)y + \beta(\beta^2 - p^2) = 0. \tag{6}$$

De cette équation, nous tirons x que nous portons dans l'équation (3); nous avons une équation du second degré en y dont tous les coefficients sont divisibles par $\beta^2 + p^2$; ce facteur enlevé, il reste l'équation

$$(9\beta^2 + p^2)y^2 - 2\beta(7\beta^2 - p^2)y + \beta^2(5\beta^2 - 3p^2) = 0;$$

$y = \beta$ est racine et l'autre racine est donnée par

$$(9\beta^2 + p^2)y - \beta(5\beta^2 - 3p^2) = 0.$$

Portons cette valeur de y dans l'équation (6), nous aurons la valeur de x, et, par suite, les deux équations de la courbe enveloppe

$$x = \frac{6\beta^4 - 6p^2\beta^2 + 4p^4}{4d(9\beta^2 + p^2)}, \qquad y = \frac{\beta(5\beta^2 - 3p^2)}{9\beta^2 + p^2}. \tag{7}$$

Ces deux équations représentent une courbe du quatrième ordre qu'il s'agit de construire.

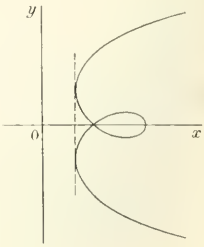
Remarquons d'abord que le changement de β en $-\beta$ n'altère pas la valeur de x et change y en $-y$; la courbe est donc symétrique par rapport à Ox et, pour la construire, il suffit de faire varier β de 0 à $+\infty$. Les dérivées de x et de y sont données par les formules

$$x' = \frac{12\beta(\beta^2 + py)(9\beta^2 - 7p^2)}{4p(9\beta^2 + p^2)^2},$$

$$y' = \frac{(5\beta^2 - p^2)(3\beta^2 + p^2)}{(9\beta^2 + p^2)^2};$$

elles changent de signes pour $\beta = \frac{p\sqrt{7}}{3}$ et $\beta = \frac{p}{\sqrt{5}}$. En adjoignant à ces valeurs la valeur $\beta = \sqrt{\frac{3}{5}}\,p$, pour laquelle y s'annule, et remarquant que x ne s'annule jamais, on peut construire aisément le tableau suivant.

β	x'	x	y'	y
0		p		0
		décroît	—	décroît
$\frac{p}{\sqrt{5}}$	—		0	min. < 0
	—	décroît	+	croît
$p\sqrt{\frac{3}{5}}$				0
$\frac{p\sqrt{7}}{3}$	0	min. > 0		croît
	+	croît	+	
$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$



D'autre part, pour $\beta = +\infty$, on a $\lim \frac{y}{x} = 0$, et, comme y est infini en même temps, la branche de courbe correspondante n'a pas d'asymptote; c'est une branche parabolique parallèle à Ox.

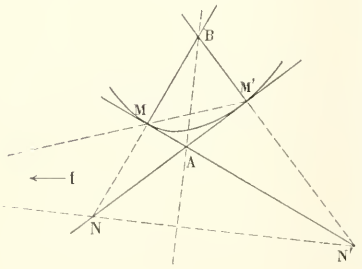
La branche ainsi obtenue est donc aisée à construire. La courbe s'achève ensuite par symétrie.

---

575. — *On considère une courbe plane quelconque et les tangentes en deux de ses points* M *et* M′ ; *on mène en outre les normales en ces points et on prend leurs points de rencontre* N *et* N′ *avec les tangentes en* M′ *et* M. *Quelle est la limite du point de rencontre de* NN′ *avec* MM′, *quand* M′ *tend vers* M ? *Lieu de ce point quand* M *décrit la courbe donnée, dans le cas particulier où cette courbe est une ellipse.*

Soient I le point de rencontre des deux droites MM′ et NN′, A le point de rencontre des tangentes et B le point de rencontre des normales; le point I est le pôle de la droite AB par rapport aux angles MAM′ et MBM′; il est aussi le pôle de cette même droite par rapport à toutes les coniques tangentes à la courbe aux points M et M′.

Quand le point M′ tend vers M, la droite AB tend vers la normale MB en M et les coniques signalées vers celles qui ont un contact du troisième ordre avec la courbe proposée au point M. Le point limite, μ, vers lequel tend le point I, est donc le pôle de la normale MB par rapport à l'une quelconque de ces coniques.



Dans le cas où la courbe donnée est une conique, on peut la prendre elle-même pour conique ayant un contact du troisième ordre avec la courbe donnée, et le point μ est le pôle de la normale en M par rapport à la conique donnée. Le lieu du point μ, dans ce cas, est donc le lieu des pôles des cordes normales à la conique.

Cette méthode donne facilement les coordonnées du point μ relatif à un point M, dans le cas le plus général. On peut d'ailleurs les trouver en prenant pour axes la tangente en M et la normale en ce point, et développant y en série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x.

Les méthodes que nous venons d'indiquer s'appliquent aussi au cas où on considère, au lieu des normales à la courbe donnée, une famille de droites telle qu'il y en ait une passant en un point quelconque de la courbe et associée à ce point.

H. LEBESGUE.

Autre solution par M. E. Barré, à Valenciennes.

---

581. — *On considère le paraboloïde hyperbolique*

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0$$

rapporté à trois axes rectangulaires.

1° *Soient* A *et* B *les deux points de rencontre des deux plans principaux avec une génératrice rectiligne* G *du paraboloïde. Lieu du milieu* C *de* AB *lorsque* G *décrit le paraboloïde (il se compose de deux droites* I *et* J*).*

2° *Montrer que le plan* D *perpendiculaire à* AB *en son milieu* C *passe par une droite fixe* Δ. *Lieu des asymptotes des hyperboles d'intersection du paraboloïde* (P) *avec le plan* D *quand* G *varie.*

3° *On fait tourner* AB *autour de la droite* I *qui passe par son milieu* C. *Le cône de révolution engendré par* AB *coupe le paraboloïde suivant une cubique qui rencontre* AB *en* C *et en un autre point* M *dont on demande le lieu* Q.

4° *Construire la projection de* Q *sur le plan des* xy.

1. Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda x, \\ \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{q}} = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

les équations d'une génératrice G. Les points A et B où elle rencontre les plans $y = 0$ et $z = 0$ sont respectivement $\left(-\dfrac{1}{2\lambda^2}, 0, -\dfrac{\sqrt{q}}{\lambda}\right)$ et $\left(+\dfrac{1}{2\lambda^2}, \dfrac{\sqrt{p}}{\lambda}, 0\right)$; par suite le point C milieu de AB a pour coordonnées

$$x = 0, \qquad y = \frac{\sqrt{p}}{2\lambda}, \qquad z = -\frac{\sqrt{q}}{2\lambda}.$$

En éliminant λ entre ces équations on obtient

$$(I) \qquad x = 0, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 0;$$

donc le lieu du point G est une droite I; c'est la génératrice du paraboloïde qui passe par le sommet et qui n'appartient pas au même système que la droite G.

En considérant les génératrices de l'autre système, on obtiendrait comme lieu la droite J ayant pour équations

$$(J) \qquad x = 0, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 0.$$

Dans tout ce qui suivra nous considérerons seulement les génératrices d'un des systèmes, celles qui sont représentées par les équations (1). On obtiendra les résultats relatifs aux génératrices du second système en remplaçant dans les résultats obtenus $\sqrt{q}$ par $-\sqrt{q}$.

2. La droite G a pour paramètres directeurs $\dfrac{1}{\lambda}$, $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$; par suite l'équation du plan (D) est

$$\frac{x}{\lambda} + \sqrt{p}\left(y - \frac{\sqrt{p}}{2\lambda}\right) + \sqrt{q}\left(z + \frac{\sqrt{q}}{2\lambda}\right) = 0,$$

ou

$$(D) \qquad \frac{1}{\lambda}\left(x + \frac{q-p}{2}\right) + y\sqrt{p} + z\sqrt{q} = 0.$$

Ce plan passe par la droite fixe représentée par les équations

$$x + \frac{q-p}{2} = 0, \qquad y\sqrt{p} + z\sqrt{q} = 0.$$

Cherchons maintenant le lieu des asymptotes de la section plane du paraboloïde par le plan (D) quand λ varie. Ces droites sont les droites d'intersection du plan (D) avec les deux plans menés par le diamètre conjugué de (D) parallèlement aux plans directeurs du paraboloïde.

Les équations de ce diamètre sont

$$\frac{-1}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\frac{y}{p}}{\sqrt{p}} = \frac{-\frac{z}{q}}{\sqrt{q}},$$

ou

$$y = -\lambda p\sqrt{p}, \qquad z = \lambda q\sqrt{q}.$$

Les plans passant par cette droite et parallèles aux plans directeurs ont respectivement pour équations

$$\frac{y+\lambda p\sqrt{p}}{\sqrt{p}} + \frac{z-\lambda q\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = 0,$$

ou

$$(2) \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} + \lambda(p-q) = 0,$$

et

$$\frac{y+\lambda p\sqrt{p}}{\sqrt{d}} - \frac{z-\lambda q\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = 0,$$

ou

$$(3) \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} + \lambda(p+q) = 0.$$

Éliminons λ entre l'équation du plan (D) et chacune des équations (2) et (3), nous obtenons

$$(y\sqrt{p}+z\sqrt{q})\left(\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}\right)-(p-q)\left(x+\frac{q-p}{2}\right)=0,$$

$$(y\sqrt{p}+z\sqrt{q})\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}\right)-(p+q)\left(x+\frac{q-p}{2}\right)=0.$$

Le lieu se compose des deux paraboloïdes hyperboliques représentés par ces équations.

3. Le cône et le paraboloïde ayant une génératrice commune AB se coupent en outre suivant une cubique gauche qui rencontre la droite AB en deux points. L'un de ces points est le point C, sommet du cône ; l'autre, le point M, doit être tel que les plans tangents en ce point aux deux surfaces soient confondus.

Or le plan tangent au cône au point M est le plan (II) mené par AB et perpendiculaire au plan ABI ; il en résulte que le point M est à l'intersection du paraboloïde et du diamètre conjugué du plan (II).

Les paramètres directeurs de la droite AB sont $\frac{1}{\lambda}$, $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$; ceux de la droite I sont 0, $\sqrt{p}$, $-\sqrt{q}$, par suite l'équation du plan mené par l'origine parallèlement au plan ABI est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{\lambda} & \sqrt{p} & \sqrt{q} \\ 0 & \sqrt{p} & -\sqrt{q} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(4) \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - 2\lambda x = 0.$$

Cela posé un plan quelconque passant par la droite AB a pour équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - 2\lambda x + \mu\left[\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{1}{\lambda}\right] = 0;$$

écrivons que ce plan est perpendiculaire au plan (4), nous obtenons

$$\mu = \frac{4\lambda^2 pq + p + q}{p - q},$$

par suite l'équation du plan (II) est

$$-\lambda(p-q)x + y(2\lambda^2 q + 1)\sqrt{p} - z(2\lambda^2 p + 1)\sqrt{q} - \frac{4\lambda^2 pq + p + q}{2\lambda} = 0.$$

Le diamètre conjugué de ce plan a pour équations

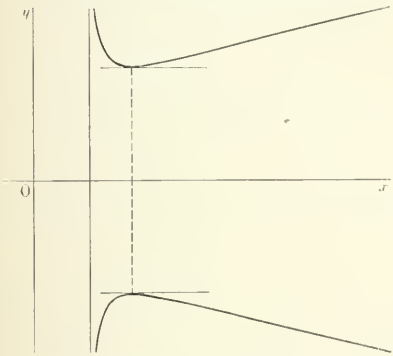
$$\frac{1}{\lambda(p-q)} = \frac{y}{p\sqrt{p}(2\lambda^2 q + 1)} = \frac{z}{q\sqrt{q}(2\lambda^2 q + 1)};$$

il rencontre le paraboloïde au point M dont les coordonnées sont

$$x = \frac{4\lambda^2 pq + p + q}{2\lambda^2(p-q)}, \qquad y = \frac{p\sqrt{p}(2\lambda^2 q + 1)}{\lambda(p-q)}, \qquad z = \frac{q\sqrt{q}(2\lambda^2 p + 1)}{\lambda(p-q)}.$$

Le lieu du point M est une cubique Q située sur le paraboloïde.

4. L'équation de la projection de cette cubique sur le plan des xy s'obtient en éliminant λ entre les deux premières des équations qui précèdent.



On obtient sans difficulté

$$y^2 = \frac{2p^3(x-q)^2}{(p+q)x(p-q) - 2pq};$$

c'est l'équation d'une cubique symétrique par rapport à Ox.

Supposons $p > q$; nous avons $\frac{2pq}{p-q} > q$.

Pour que y soit réel il faut donner à x des valeurs supérieures à $\frac{2pq}{p-q}$. On reconnaît aisément que y passe par un minimum pour

$$x = \frac{q(3p+q)}{p-q};$$

la courbe présente des branches paraboliques dans la direction Ox.

J. LHÉRIAUD, lycée de Toulouse.

Bonnes solutions par MM. E. Deschamps (lycée Saint-Louis); Eugène Limes à Saint-Michel; Jean Merlin, lycée Hoche (Versailles).

---

582. — *On considère une ellipse et le triangle* MPQ *formé par les tangentes issues du point* M *et la polaire de ce point. Trouver le lieu du point* M :

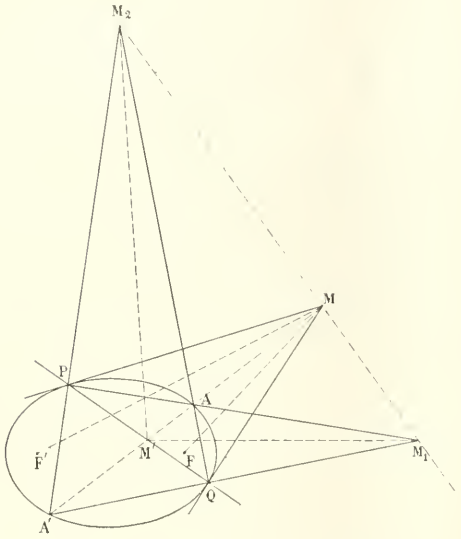
1° *Lorsque le centre du cercle inscrit au triangle* MPQ *est sur l'ellipse;*

2° *Lorsque le centre de gravité de ce triangle est sur l'ellipse;*

3° *Quand le point de concours des hauteurs est sur l'ellipse.*

1° Si le point A ou le point A′ est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle MPQ, la droite PA ou PA′ est l'une des bissectrices de l'angle MPM′; comme, d'autre part, les deux points M et M′ sont conjugués harmoniques de A et de A′, les deux droites PA et PA′ sont les deux bissectrices de cet angle et sont rectangulaires ; il en est de même des droites QA et QA′ par rapport à l'angle MQM′ ; par suite, le cercle décrit sur AA′ comme diamètre passe aux deux points P et Q et il en résulte que les deux droites PQ et AA′ sont également inclinées sur les axes de l'ellipse. Réciproquement si l'une des bissectrices de l'angle PMQ, ou, ce qui revient au même, de l'angle FMF′ (F

et F′ désignent les deux foyers) forme avec l'un des axes de l'ellipse le même angle en sens contraire que la polaire du point M, le point M est l'un des points considérés ; car alors les quatre points A, A′, P, Q sont sur un cercle, le triangle diagonal du quadrangle AA′PQ est un triangle autopolaire commun à l'ellipse et à ce cercle, le côté M_1M_2 de ce triangle, polaire du point M′, passe au point M ; c'est donc aussi la polaire du point M′ par rapport à l'angle PMQ ; c'est, par suite, la seconde bissectrice de l'angle PMQ, et la droite M′M est l'une des hauteurs du triangle $M'M_1M_2$; il en résulte que le centre du cercle est situé sur M′M, que les angles APA′, AQA′ sont droits, et que PA, PA′ sont les deux bissectrices de l'angle M′PM, de même QA, QA′, pour l'angle M′QM ; par conséquent PA et PA′, qui divisent harmoniquement PM et PM′, sont les bissectrices de l'angle MPM′, et les deux points A et A′ sont les centres de deux cercles tangents aux trois cotés du triangle MPQ.



Soient alors $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse et α, β les coordonnées du point M ; les deux droites MF et MF′ ont pour équations

$$\beta(x-\alpha) + (c-\alpha)(y-\beta) = 0, \qquad \beta(x-\alpha) - (c+\alpha)(y-\beta) = 0,$$

ou, ensemble,

$$[\beta(x-\alpha) - \alpha(y-\beta)]^2 - c^2(y-\beta)^2 = 0.$$

Le faisceau quadratique de leurs bissectrices a pour équation

$$(x-\alpha)^2 + 2\lambda(x-\alpha)(y-\beta) - (y-\beta)^2 = 0,$$

avec la condition

$$\alpha^2 - \beta^2 - c^2 + 2\lambda\alpha\beta = 0.$$

En exprimant que l'équation aux coefficients angulaires de ces droites est vérifiée par le coefficient angulaire de la polaire, changé de signe, $\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}$, on obtient la condition

$$a^4\beta^2 - b^4\alpha^2 + 2\lambda a^2 b^2 \alpha\beta = 0.$$

Le lieu cherché s'obtient en éliminant λ entre ces deux équations. Ce calcul conduit à l'équation

$$\text{(I)} \qquad \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{c^2}{a^2+b^2} = 0,$$

qui représente une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée.

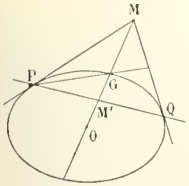
L'équation de la bissectrice, MM′, de l'angle PMQ est dès lors

$$\frac{\alpha}{a^2}(x-\alpha) - \frac{\beta}{b^2}(y-\beta) = 0,$$

α et β étant les coordonnées du point M de l'hyperbole précédente ; c'est l'équation de la tangente à

cette hyperbole au point M ; donc l'enveloppe de la bissectrice de l'angle PMQ est l'hyperbole précédente.

2° Appelons O le centre de l'ellipse et G le centre de gravité du triangle, supposé sur l'ellipse ;



nous aurons d'abord $\quad OM.OM' = \overline{OG}^2,$

puis $\quad OM - OM' = 3M'G,$

$$OM - OM' = 3(OG - OM');$$

nous en déduisons

$$2OM' = 3OG - OM,$$

et, en portant dans la première relation,

$$\overline{OM}^2 - 3OG.OM + 2.\overline{OG}^2 = 0.$$

Cette équation nous donne $OM = OG$ et $OM = 2.OG$; par conséquent le lieu du point M se compose de l'ellipse proposée et d'une ellipse homothétique à celle-ci dans le rapport 2.

3° Cette question a été traitée dans la solution du N° 478, parue antérieurement (N° d'octobre 1896).

Bonne solution : M. R. Hauser, à Clermont-Ferrand.
Solutions incomplètes : MM. E. Barré, à Valenciennes; J. Lhériaud (lycée de Toulouse).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX 1896

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Mathématiques.

135. — Résoudre complètement le système

$$xy = a, \qquad x^3 + y^3 = b.$$

Montrer que l'équation obtenue en prenant $x + y$ comme inconnue doit être du 3e degré.

136. — Théorie des directions principales des quadriques. Pourquoi n'y en a-t-il que trois, puisqu'on trouve l'intersection de deux cônes du second degré ?

137. — Former l'équation du cône qui passe par les trois axes de coordonnées supposés rectangulaires et par les trois parallèles aux directions principales du cône donné par l'équation générale.

138. — Connaissez-vous l'équation différentielle des coniques ?

139. — Trouver les génératrices rectilignes d'une quadrique donnée par l'équation générale. Montrer en quoi cette recherche est liée à la décomposition du premier membre en carrés.

140. — Étant donné l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

trouver le lieu des points de concours des génératrices rectangulaires. Montrer analytiquement et géométriquement que ce lieu est une courbe sphérique.

141. — En désignant par x un nombre entier, peut-on choisir ce nombre de façon que les trois nombres x, $x + 1$, $x + 2$ soient les mesures des côtés d'un triangle ayant pour aire $x + 3$?

142. — Décomposer $ax^4 + bx^2 + c$ en un produit de deux trinomes du second degré. De combien de façons peut-on opérer cette décomposition ? Combien y a-t-il de décompositions réelles ?

143. — Même question pour le polynome complet du quatrième degré. On arrive à une équation résolvante du troisième degré. Dire ce que signifient géométriquement les racines de la résolvante dans le cas où le polynome proposé admet une racine double.

144. — Divers cas de l'intersection de deux quadriques qui passent toutes deux par Oz. Démonstrations analytiques et géométriques.

145. — Equation des bissectrices des tangentes issues d'un point à une conique. Reconnaître la bissectrice qui est dans la même région que la conique.

146. — Etudier la surface $x^2(z-a)^2 + y^2(z+a)^2 = x^2y^2$. Montrer qu'elle peut être engendrée par une droite variable tangente à un cylindre et s'appuyant sur deux droites fixes.

147. — Equations qui donnent $x = \operatorname{tg}\frac{a}{9}$, $y = \operatorname{tg}\frac{a}{3}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$,

$$f(x, \operatorname{tg} a) = 0. \qquad F(y, \operatorname{tg} a) = 0.$$

On considère alors les trois équations

$$F(y, \operatorname{tg} a) = 0, \qquad F(x, y) = 0, \qquad f(x, \operatorname{tg} a) = 0,$$

montrer que si on élimine x entre les deux dernières, on tombe sur $[F(y, \operatorname{tg} a)]^3 = 0$.

148. — Déterminer λ de façon que $ax^2 + 2bxy + cy^2 - \lambda(x^2 + y^2)$ soit un carré parfait. Interprétation géométrique dans le plan, x, y, z désignant, soit des coordonnées ponctuelles homogènes, soit des coordonnées tangentielles.

149. — Y a-t-il toujours des quadriques tangentes à trois plans donnés en trois points donnés A, B, C? On coupe par le plan ABC; cas particulier où les tangentes situées dans ce plan sont concourantes.

150. — Lieu des centres des quadriques passant par deux droites données et assujetties à d'autres conditions quelconques, par exemple, d'être de révolution, ou de passer par deux points donnés.

151. — Cubique aux pieds des normales. Lieu de ces cubiques relatives aux points d'une droite.

152. — Le discriminant est un invariant.

153. — Dérivées successives de $\operatorname{arc\,tg} x$.

154. — On donne un cercle et un point en dehors du plan du cercle; lieu des sommets des cônes qui s'appuient sur le cercle et dont l'axe passe par le point donné.

155. — On donne un ellipsoïde et un point P; équation générale des quadriques ayant même centre que l'ellipsoïde et passant par les pieds des normales menées du point P à l'ellipsoïde. Condition pour que ces surfaces soient de révolution. Montrer que les normales menées du point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ aux quadriques représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - \mu = 0$$

sont sur un même cône du second degré.

156. — Développer en série $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

157. — Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$, n forces se faisant équilibre et $a_{\alpha\beta}$ le cosinus de l'angle que fait F_α avec F_β; montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est nul, ainsi que tous ses mineurs d'ordres $1, 2, \ldots, n-4$. Que signifie la condition $\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = 0$, dans le cas de trois forces? Même question dans le cas de quatre forces

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

643. — On considère deux quadriques Q et Q_1 dont les axes sont parallèles ; la quadrique Q est fixe, la quadrique Q_1 est variable et assujettie à rester homothétique à elle-même.

1° Démontrer que le lieu des centres des quadriques Q_1 telles que par leur courbe d'intersection avec Q passe un cône du deuxième degré ayant son sommet en un point donné P est une droite Δ.

2° Si on se donne l'un de ces centres O_1, le lieu de P est une cubique gauche. A chaque quadrique Q_1, il correspond quatre sommets de cônes passant par la courbe indiquée, P, P_1, P_2, P_3. Soit Q_2 la quadrique homothétique à Q_1 et passant par ces quatre points ; elle passe par une conique fixe, son centre décrit une droite et le plan de la section plane commune aux quadriques Q_1 et Q_2 passe par une droite fixe, quand Q_1 varie en gardant le même centre O_1.

3° Les quatre droites Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, qui correspondent aux sommets P, P_1, P_2, P_3 et la ligne des centres OO_1 des quadriques Q et Q_1 sont situées sur un cône du second degré Γ ; les hauteurs du tétraèdre $PP_1P_2P_3$ sont situées sur un même hyperboloïde H. Former les équations de ces deux surfaces et voir dans quels cas H est un paraboloïde.

4° Examiner le cas particulier où les quadriques Q_1 sont des sphères.

VASNIER.

644. — Étant donnée une conique C, on prend sur une droite D un point quelconque M et on considère les points de contact P et Q des tangentes issues de M à la conique C.

1° Montrer que l'on peut choisir la droite D de telle sorte que lorsque M parcourt cette droite, les cercles circonscrits aux triangles MPQ passent par un même point ω.

2° Enveloppe de ces droites D et lieu du point ω correspondant à chacune d'elles.

3° Montrer qu'il existe sur chacune de ces droites D un point M tel que le triangle MPQ de tout à l'heure admette pour centre du cercle inscrit et du cercle exinscrit dans l'angle M les points où D rencontre la conique C.

4° Relation entre l'enveloppe des droites D et le lieu du point M de chacune d'elles déterminé par la troisième partie.

G. LAPOINTE.

645. — On considère une ellipse et un point de son plan par lequel passe une corde variable. Trouver, lorsque cette corde tourne autour du point choisi :

1° L'enveloppe du cercle (C) décrit sur cette corde comme diamètre ;

2° L'enveloppe de la polaire du point fixe par rapport à ce cercle, et aussi l'enveloppe de la polaire du centre de l'ellipse par rapport au même cercle ;

3° L'enveloppe de la corde commune au cercle et à l'ellipse, qui est associée au diamètre donné pour le cercle (C) ; et le lieu du point de rencontre de ces deux cordes communes.

E. BARRÉ, à Valenciennes.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

572. — *Une parabole mobile a son axe perpendiculaire à celui d'une parabole fixe ; elle passe par le sommet de cette dernière.*

Distinguer les régions du plan où se trouve le sommet de la parabole mobile suivant qu'elle a deux ou quatre points communs avec la parabole fixe.

Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole fixe.

Une parabole ayant pour sommet le point (α, β) et pour axe une parallèle à Oy a une équation de la forme

$$(x - \alpha)^2 + \lambda(y - \beta) = 0.$$

Pour que cette parabole passe par l'origine, sommet de la parabole fixe, il faut qu'on ait $\alpha^2 - \lambda\beta = 0$, par suite l'équation de la parabole mobile est

$$\beta x^2 - 2\alpha\beta x + \alpha^2 y = 0.$$

L'équation aux ordonnées des points de rencontre des deux courbes est

$$y(\beta y^3 - 4\alpha\beta p y + 4\alpha^2 p^2) = 0.$$

A toute racine réelle de cette équation correspond un point réel commun aux deux paraboles.

Pour que ces deux courbes aient quatre points communs réels, il faut que l'équation

$$\beta y^3 - 4\alpha\beta p y + 4\alpha^2 p^2 = 0$$

ait ses trois racines réelles, c'est-à-dire que l'on ait

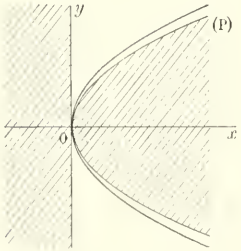
$$-4^4\alpha^3 p^3 + 27 . 4^2 \frac{\alpha^4 p^4}{\beta^2} < 0,$$

ou

$$\alpha\left(\beta^2 - \frac{27}{16} p\alpha\right) > 0.$$

Le sommet de la parabole mobile doit donc se trouver dans la région positive de la courbe qui a pour équation

$$x\left(y^2 - \frac{27}{16} px\right) = 0.$$



Cette courbe se compose de l'axe Oy et d'une parabole (P) située tout entière à l'intérieur de la parabole fixe.

Nous avons couvert de hachures la région négative.

Si le sommet de la parabole mobile est situé dans la région du plan non couverte de hachures, les paraboles considérées ont quatre points communs réels. Si le sommet est dans la région couverte de hachures, les deux paraboles ont deux points communs réels. Enfin si le sommet est sur la parabole (P), les deux paraboles sont tangentes et ont en outre deux points communs réels.

M. MALPLAT, pensionnat de Valbenoîte, Saint-Étienne.

---

576. — *On considère un cercle fixe rapporté à deux diamètres rectangulaires* Ox *et* Oy, *puis un cercle mobile tangent à* Oy *et ayant son centre sur le cercle fixe. Lieu des centres de similitude de ces deux cercles.*

Soient O le centre du cercle donné, A et B les extrémités du diamètre situé sur Ox, O′ le centre du cercle mobile, B′ son point de contact avec Oy, R le rayon du cercle fixe, r le rayon du cercle mobile et φ l'angle que fait OO′ avec Ox. Nous aurons les centres de similitude en joignant les extrémités de rayons parallèles dans les deux cercles; ce sont donc les points de rencontre de BB′ et B′A avec OO′. Par conséquent le lieu du premier point s'obtiendra en éliminant l'angle φ entre les deux équations

$$\frac{x}{-R} + \frac{y}{R \sin\varphi} - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi};$$

le lieu du second point, en éliminant φ entre

$$\frac{x}{R} + \frac{y}{R \sin \varphi} - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{y}{\sin \varphi}.$$

On trouve ainsi sans peine les deux équations

$$x^2 + y^2 - (x + R)^2 = 0,$$

et

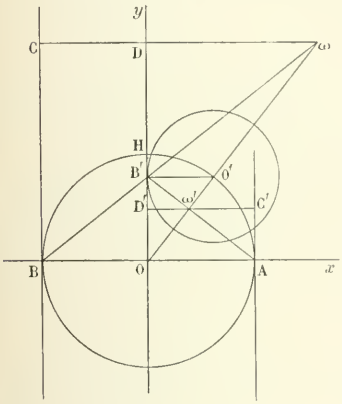
$$x^2 + y^2 - (x - R)^2 = 0,$$

qui représentent deux paraboles symétriques l'une de l'autre par rapport à Oy, ayant pour foyer commun l'origine et pour directrices les tangentes en B et A au cercle donné.

Il importe de remarquer que lorsque le point O′ passe du premier quadrant au second, franchit le point H, le point ω devient le centre de similitude inverse et le point ω', le centre de similitude direct. Chacune des paraboles contient donc des centres de similitude des deux espèces.

J. MUNICH, lycée Saint-Louis.

Bonnes solutions : MM. J. Gauthier, Malplat, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne ; J. Courriades, à Pau ; A. Pouilliart, à Auxerre ; H. Bonnard, surveillant général au lycée Janson ; P. Sailly, à Montpellier ; F. Buvat, à Echassières ; E. Barré, à Valenciennes.



Solution géométrique. — Les triangles semblables ωOB et $\omega O'B'$ donnent $\frac{\omega O'}{\omega O} = \frac{r}{R}$; de même les triangles ωOD et $O'OB'$ donnent $\frac{\omega D}{\omega O} = \frac{O'B'}{O'O} = \frac{r}{R}$; on en conclut que $\omega D = \omega O'$, et, par suite, en ajoutant R aux deux membres, $\omega C = \omega O$. Le lieu du point ω est donc une parabole ayant pour foyer le point O et pour directrice la tangente BC au cercle fixe.

On verrait de même que le lieu du point ω' est une parabole ayant pour foyer le point O et pour directrice la tangente, AC′, au cercle donné.

J. Courriades, à Pau.

Bonnes solutions : MM. J. Gauthier et M. Malplat, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Étienne ; L.-J. Goujon et J. Badard, élèves à l'école des mines de Saint-Etienne.

577. — *Par deux points donnés* A *et* B *on mène deux droites parallèles* a *et* b *et on considère le cercle* C *tangent à ces deux droites et à* AB. *On demande de trouver, lorsque les droites* a *et* b *tournent autour de* A *et* B :

1° *Le lieu du centre du cercle* C ;

2° *Les lieux des points de contact du cercle* C *avec les deux droites* a *et* b ;

3° *L'enveloppe du cercle* C.

Prenons pour axe des x la droite BA et pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu de BA ; désignons OA par a et par m le coefficient angulaire de la direction des droites a et b. Ces droites auront pour équations $y - m(x - a) = 0$ et $y - m(x + a) = 0$; la corde des contacts du cercle avec elles, leur étant perpendiculaire, aura pour équation $my + x + \mu = 0$, et, par suite, l'équation du cercle C sera de la forme

$$(y - mx + ma)(y - mx - ma) + \lambda(my + x + \mu)^2 = 0.$$

Si nous exprimons que cette équation représente un cercle, nous avons immédiatement $\lambda = 1$:

nous exprimons ensuite que les deux points de rencontre avec Ox sont confondus et nous avons la relation

$$(1) \qquad \mu^2 = a^2(1 + m^2).$$

Développons alors l'équation du cercle, nous avons finalement

$$(2) \qquad (1 + m^2)(x^2 + y^2) + 2\mu(x + my) + a^2 = 0.$$

1° Le lieu du centre du cercle s'obtient en éliminant m et μ entre les deux équations

$$(m^2 + 1)x + \mu = 0,$$

$$(m^2 + 1)y + \mu m = 0,$$

et la relation (1). Cette élimination se fait immédiatement en séparant chacune des équations en deux membres, élevant au carré et ajoutant. Nous trouvons ainsi, après suppression du facteur $(1 + m^2)^2$, l'équation

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

qui représente le cercle décrit sur AB comme diamètre.

2° Le lieu du point de contact avec la droite a s'obtient en éliminant m et μ entre les équations

$$y - mx + ma = 0,$$

$$my + x + \mu = 0,$$

et la relation (1). La première donne m, $m = \dfrac{y}{x - a}$; la seconde donne μ, $\mu = \dfrac{x(x - a) + y^2}{a - x}$; et, en portant ces deux valeurs dans la relation (1), nous avons l'équation du lieu

$$(4) \qquad (x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2[(x - a)^2 + y^2].$$

Ce lieu est donc une courbe du quatrième degré ayant un point double au point A. Portons les axes en ce point, nous aurons l'équation nouvelle

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

et, en passant aux coordonnées polaires,

$$\rho = -a \cos \omega \pm a.$$

Sous cette forme il est visible que la courbe est une cardioïde.

Rien ne distinguant le point B du point A, le lieu du point de contact avec la droite b est une cardioïde ayant pour point double le point B.

3° Pour obtenir l'enveloppe du cercle C, posons $m = \operatorname{tg} \varphi$, nous aurons $\mu = \pm \dfrac{a}{\cos \varphi}$, et l'équation du cercle prendra la forme

$$x^2 + y^2 \pm 2a(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + a^2 \cos^2 \varphi = 0.$$

On passe de l'une à l'autre de ces équations en changeant φ en $\pi + \varphi$; par conséquent, en prenant l'un des deux signes, le signe $+$, par exemple, on a le système entier des cercles considérés.

Prenons alors la dérivée par rapport à φ, nous aurons, pour déterminer les points limites, les deux équations

$$x^2 + y^2 + 2a(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + a^2 \cos^2 \varphi = 0,$$

et

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi - a \sin \varphi \cos \varphi = 0;$$

posons, pour abréger, $u = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ et $v = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$, les deux équations s'écriront

$$u^2 + v^2 + 2au + a^2 \cos^2 \varphi = 0,$$

et

$$v = a \sin \varphi \cos \varphi.$$

Nous avons donc immédiatement

$$u = -a \pm a \sin^2 \varphi.$$

En prenant le signe $+$, dans la valeur de u, on trouve une portion de l'enveloppe évidente *a priori*, $y = 0$; en prenant le signe $-$, on a les équations de l'autre partie de l'enveloppe, celle que nous cherchions,

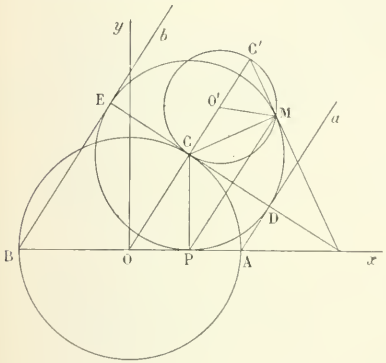
$$(5) \qquad \begin{cases} x = -a \cos \varphi (1 + 2 \sin^2 \varphi), \\ y = -2a \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

Ces équations représentent une épicycloïde à deux rebroussements, ayant pour cercle de base le cercle décrit sur AB comme diamètre, et ses deux points de rebroussements en A et B.

J. BADARD, élève à l'Ecole des mines de Saint-Étienne.

Bonnes solutions analytiques : M. P. Sailly, à Montpellier ; Joanny Gauthier, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Étienne.
Solution analytique incomplète : M. F. Pégorier, collège de Cette.

Solution géométrique. — 1° Soient O le milieu de AB, P le point de contact avec AB et D, E les points de contact avec les droites a et b. Si nous désignons par C le centre du cercle, OC est manifestement parallèle à a et b, et nous pouvons écrire $OC = \frac{AD + BE}{2}$, ou $OC = \frac{PA + BP}{2} = \frac{AB}{2}$. Le lieu du point C est donc le cercle décrit sur AB comme diamètre.



2° La droite DE est perpendiculaire à OC; donc elle enveloppe le cercle précédent, et les lieux de D et de E sont les podaires de ce cercle par rapport aux points A et B; ce sont donc deux cardioïdes ayant leur rebroussement en A et B.

3° Le premier point limite relatif au cercle C est le point P ; le second est alors le symétrique de P par rapport à ED, qui est la ligne des centres de deux cercles infiniment voisins. Soit M ce second point.

Menons en ce point la tangente au cercle C, elle coupe OC en un point C′, et, comme C′M est perpendiculaire sur CM, le cercle décrit sur CC′ comme diamètre passe au point M. D'ailleurs, la figure OPMC′ est un trapèze isocèle symétrique par rapport à ED ; donc $CC' = OC$, et le rayon du cercle que nous venons de décrire est la moitié de OC. On a, en outre,

$$\widehat{MCD} = \widehat{DCP} = \widehat{COP},$$

et, par suite, $\widehat{CO'M} = 2\widehat{COA}$; l'arc CM a même longueur que l'arc AC et le lieu du point M est l'épicycloïde engendrée par le point M quand le cercle O′ roule sur le cercle O.

A. GOULARD.

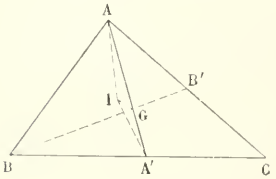
Très bonnes solutions géométriques : MM. Joanny Gauthier, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne ; J. Lubriaud, lycée de Toulouse ; J. Courbiadès, à Pau.

---

578. — *Dans un triangle* ABC *on désigne par* G *le centre de gravité, par* I *le centre du cercle inscrit, par* A′, B′, C′ *les milieux des côtés* BC, CA, AB, *et par* a, b, c *les longueurs des trois côtés. Démontrer que l'on a*

$$9\overline{GI}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2 + 2(\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2).$$

En appliquant le théorème de Stewart au triangle AIA′, on a



$$\overline{IG}^2.AA' + \overline{IA}^2.A'G + \overline{IA'}^2.GA + AA'.A'G.GA = 0\,;$$

or on sait que $A'G = -\frac{AA'}{3}$ et $GA = -2\frac{AA'}{3}$; cette relation devient donc

$$\overline{IG}^2.AA' - \overline{IA}^2.\frac{AA'}{3} - \overline{IA'}^2\,\frac{2AA'}{3} + 2\,\frac{\overline{AA'}^3}{9} = 0.$$

De là nous tirons une valeur de $\overline{IG}^2$,

$$\overline{IG}^2 = \frac{\overline{IA}^2 + 2\overline{IA'}^2}{3} - 2\,\frac{\overline{AA'}^2}{9}\,;$$

nous obtenons de même

$$\overline{IG}^2 = \frac{\overline{IB}^2 + 2\overline{IB'}^2}{3} - 2\,\frac{\overline{BB'}^2}{9},$$

$$\overline{IG}^2 = \frac{\overline{IC}^2 + 2\overline{IC'}^2}{3} - 2\,\frac{\overline{CC'}^2}{9}\,;$$

par suite, en multipliant ces égalités par 3 et les ajoutant, nous avons la relation

$$9\overline{IG}^2 = \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2 + 2(\overline{IA'}^2 + \overline{IB'}^2 + \overline{IC'}^2) - \frac{2}{3}\,(\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2).$$

On sait d'ailleurs que

$$2\overline{AA'}^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2},$$

$$2\overline{BB'}^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2},$$

$$2\overline{CC'}^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\,;$$

par conséquent

$$\frac{2}{3}\left(\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2\right) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Finalement on a bien la relation demandée,

$$9\overline{IG}^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2 + 2(\overline{IA'}^2 + \overline{IB'}^2 + \overline{IC'}^2).$$

JORGE F. D'AVILLEZ.

Solution semblable : M. P. SAILLY, à Montpellier.

Très bonnes solutions de MM. E. BARRÉ et F. PÉGORIER (collège de Cette) qui font remarquer que le résultat est indépendant de la position du point I ce qui résulte d'ailleurs évidemment de la démonstration précédente.

---

579. — *On prend sur le grand axe d'une ellipse de centre* O *un point* I *tel que* $OI = \frac{a^2\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 + b^2}$, $2a$ *et* $2b$ *étant les longueurs des axes de l'ellipse.*

Par ce point I *on mène une corde variable* AB *dont le pôle par rapport à l'ellipse est* C. *Montrer que le lieu de l'orthocentre du triangle* ABC *est une ellipse semblable à l'ellipse donnée et passant par l'un de ses foyers.*

Soient α et β les coordonnées du pôle de la corde AB. On sait que l'orthocentre du triangle ABC est conjugué du point C par rapport au cercle orthoptique de l'ellipse (Voir la question 478 de la Revue.)

Ce point est donc à l'intersection de la perpendiculaire abaissée du point (α, β) sur sa polaire par rapport à l'ellipse avec la polaire de ce même point par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0.$$

On obtient donc le lieu de ce point en éliminant α et β entre les deux équations

$$\frac{\beta}{b^2}(x - \alpha) - \frac{\alpha}{a^2}(y - \beta) = 0,$$

$$\alpha x + \beta y - a^2 - b^2 = 0,$$

et la relation $c\alpha = a^2 + b^2$, qui exprime que la corde AB passe au point I.

La dernière nous donne pour α une valeur constante ; il suffit donc d'éliminer β entre les deux premières équations. On trouve ainsi

$$\frac{\alpha x - a^2 - b^2}{b^2}(x - \alpha) + \frac{\alpha(y^2 + \alpha x - a^2 - b^2)}{a^2} = 0,$$

ou

$$\alpha(a^2x^2 + b^2y^2) + [\alpha^2(b^2 - a^2) - a^2(a^2 + b^2)]x + \alpha(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = 0\,;$$

et, en remplaçant dans cette équation α par sa valeur,

$$(1) \qquad a^2x^2 + b^2y^2 - c(2a^2 + b^2)x + c^2(a^2 + b^2) = 0.$$

Cette équation représente une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées, qui passe au foyer $(c, 0)$, et dont les carrés des axes sont proportionnels à b^2 et à a^2; par conséquent cette ellipse est semblable à l'ellipse proposée.

Le problème se traiterait de la même façon en prenant le signe $-$ devant le radical.

A. PONCET, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Étienne.

Remarque. — Cette question a été proposée une seconde fois par erreur au N° 601 ; nous en publierons une autre solution.

---

595. — *La tangente en un point* M *quelconque d'une ellipse rencontre les axes en* T *et* T', *la normale au même point* M *rencontre les axes en* N *et* N'.

1° *La perpendiculaire élevée à* TT' *en son milieu enveloppe une ellipse.*

2° *La perpendiculaire élevée à* NN' *en son milieu enveloppe une ellipse.*

1. Prenons pour axes les axes principaux de l'ellipse et soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse et (x, y) les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe. L'équation de la tangente à l'ellipse en ce point est $\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - 1 = 0$; elle coupe les axes aux points T, T' dont les coordonnées sont $\left(\frac{a^2}{x}, 0\right)$, $\left(0, \frac{b^2}{y}\right)$; par conséquent le milieu du segment TT' a pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{2x}, \frac{b^2}{2y}\right)$. Si donc on désigne par u, v, w les coordonnées de la perpendiculaire à TT' en son milieu, on a les deux relations

$$\frac{a^2u}{2x} + \frac{b^2v}{2y} + w = 0 \qquad \text{et} \qquad -\frac{u}{v} = \frac{a^2y}{b^2x}\,;$$

on aura donc l'équation tangentielle de l'enveloppe en éliminant x et y entre ces deux équations et la relation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La seconde et la dernière donnent

$$\frac{\frac{x}{a}}{av} = \frac{\frac{y}{b}}{-bu} = \frac{1}{\sqrt{a^2v^2+b^2u^2}},$$

et il n'y a plus qu'à porter ces valeurs de x et de y dans la première équation pour avoir l'équation cherchée. On trouve ainsi

$$\sqrt{a^2v^2+b^2u^2}\left(\frac{u}{v}-\frac{v}{u}\right)+2w=0;$$

en réduisant au même dénominateur et faisant disparaître le radical, cette équation devient

$$(1)\qquad (u^2-v^2)^2(b^2u^2+a^2v^2)-4u^2v^2w^2=0.$$

Sous cette forme on voit que l'enveloppe est une courbe de sixième classe quadruplement tangente à la droite de l'infini, ainsi qu'aux axes de l'ellipse.

2. L'équation de la normale au point (x, y), est

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}},$$

ou

$$\frac{yX}{b^2}-\frac{xY}{a^2}-\frac{c^2xy}{a^2b^2}=0;$$

cette droite coupe les axes aux points dont les coordonnées sont $\left(\frac{c^2x}{a^2}, 0\right)$ et $\left(0, -\frac{c^2y}{b^2}\right)$; par conséquent le milieu du segment NN′ a pour coordonnées $\left(\frac{c^2x}{2a^2}, -\frac{c^2y}{2b^2}\right)$. Si donc on désigne par u, v, w les coordonnées de la perpendiculaire à NN′ en son milieu, on a les deux relations

$$\frac{c^2x}{2a^2}u-\frac{c^2y}{2b^2}v+w=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{u}{v}=\frac{b^2x}{a^2y};$$

on aura donc l'équation tangentielle de l'enveloppe en éliminant x et y entre ces deux équations et la relation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

la seconde et la dernière donnent

$$\frac{\frac{x}{a}}{au} = \frac{\frac{y}{b}}{bv} = \frac{1}{\sqrt{a^2u^2+b^2v^2}},$$

et il n'y a plus qu'à porter ces valeurs de x et de y dans la première équation pour avoir l'équation cherchée. On trouve ainsi

$$c^2(u^2-v^2)+2w\sqrt{a^2u^2+b^2v^2}=0,$$

et, en faisant disparaître le radical,

$$(2)\qquad c^4(u^2-v^2)^2-4w^2(a^2u^2+b^2v^2)=0.$$

C'est l'équation d'une courbe de quatrième classe doublement tangente aux axes et à la droite de l'infini.

PRIMET, lycée Saint-Louis.

Remarque. — Ces deux résultats montrent que l'énoncé proposé est inexact et indiquent suffisamment le moyen de le modifier.

609. — *Par les extrémités* O *et* A *d'un rayon fixe d'un cercle, on fait passer un cercle mobile qui coupe le cercle fixe en un nouveau point* B ; *par le point* B *on mène dans le cercle mobile une corde* BM *parallèle à une direction fixe. Trouver le lieu du point* M *et dire ce que devient ce lieu quand la direction choisie est parallèle à* OA *ou perpendiculaire à* OA.

Prenons pour axe des x le rayon OA du cercle donné et pour axe des y le rayon perpendiculaire ; l'équation du cercle fixe est

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

et celle d'un cercle quelconque passant par les points O et A est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - ax - \lambda y = 0.$$

L'axe radical de ces deux cercles

$$ax + \lambda y - a^2 = 0$$

les rencontre d'une part au point A, et d'autre part en un point B dont on a aisément les coordonnées

$$x = \frac{a(a^2 - \lambda^2)}{a^2 + \lambda^2}, \qquad y = \frac{2a^2\lambda}{a^2 + \lambda^2}.$$

Si l'on désigne par M le coefficient angulaire de la direction fixe, l'équation de la corde BM est

$$(2) \qquad y - \frac{2a^2\lambda}{a^2 + \lambda^2} = m\left(x - \frac{a(a^2 - \lambda^2)}{a^2 + \lambda^2}\right).$$

En éliminant λ entre cette équation et l'équation (1) on aurait le lieu du point M et aussi celui du point B, c'est-à-dire le cercle

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Pour éviter ce dernier lieu on peut opérer de la façon suivante.

Formons l'équation de l'ensemble des droites OB et OM en éliminant la variable d'homogénéité entre les équations (1) et (2), nous obtenons

$$(x^2 + y^2)\frac{2a^2\lambda - ma(a^2 - \lambda^2)}{a^2 + \lambda^2} - (ax + \lambda y)(y - ma) = 0.$$

On en conclut que le produit des coefficients angulaires de ces droites est $\dfrac{2a\lambda(a + m\lambda)}{(a^2 - \lambda^2)(\lambda - ma)}$, et comme le coefficient angulaire de OB est $\dfrac{2a\lambda}{a^2 - \lambda^2}$, celui de OM est $\dfrac{a + m\lambda}{\lambda - ma}$.

Le point M est alors déterminé par les équations

$$x^2 + y^2 - ax - \lambda y = 0,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{a + m\lambda}{\lambda - ma},$$

l'élimination de λ entre ces deux équations donne l'équation du lieu cherché.

On obtient sans difficulté

$$(x^2 + y^2)(y - mx) + a[m(x^2 - y^2) - 2xy] = 0 ;$$

cette équation représente une strophoïde admettant le point O pour point double, passant par le point A et ayant son asymptote parallèle à la direction donnée.

Si cette direction est perpendiculaire à OA, la strophoïde est droite, elle a pour équation

$$(x^2 + y^2)x - a(x^2 - y^2) = 0.$$

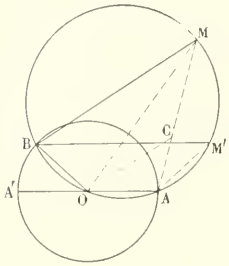
Enfin si la direction est parallèle à OA, l'équation du lieu se réduit à

$$y[x^2 + y^2 - 2ax] = 0,$$

le lieu se compose alors du cercle de centre A et de rayon AO et de l'axe des x.

L'axe des x correspond au cas où le cercle variable est réduit à la droite OA.

Solution géométrique. — Menons par le point O une parallèle à BM qui rencontre AM au point C. Les angles BMO et OMA sont égaux comme ayant même mesure ; d'autre part $\widehat{BMO} = \widehat{MOC}$, puisque OC et BM sont parallèles. Il en résulte que le triangle OCM est isocèle, par suite OC = CM. Donc le lieu du point M est une strophoïde passant par le point A et admettant le point O pour point double. L'asymptote est parallèle à OC et passe par le point A′ diamétralement opposé au point A dans le cercle O.



La strophoïde est droite si BM est perpendiculaire à OA.

Dans le cas particulier où BM′ est parallèle à OA, on a AM′ = OB = constante, le lieu du point M′ est le cercle décrit du point A comme centre avec OA pour rayon.

G. de FRANCE, à Versailles.

Bonnes solutions analytiques par MM. B. Ducassé, conducteur des ponts et chaussées, à Fleurance (Gers) ; Joanny Gauthier, pensionnat de Valbenoîte, à St-Etienne ; G. Rouzier; Verchère, pensionnat Ste-Marie, à St-Etienne ; P. Xambeu, collège Chaptal.

QUESTIONS PROPOSÉES

646. — On donne deux points F, P et une droite D. On demande :

1° l'équation générale des coniques ayant pour foyer le point F, passant par le point P et tangente à la droite D ;

2° le lieu des centres de ces coniques. Ce lieu est une conique dont on déterminera les foyers réels.

3° Parmi ces coniques il y a deux paraboles. Quel lieu doit décrire le point P pour que les axes de ces paraboles fassent un angle donné.

647. — On donne une hyperbole équilatère de centre O et un point A. Par le point A on mène une sécante quelconque et on considère les paraboles bitangentes à l'hyperbole aux points de rencontre avec la sécante. Soit C le pôle de cette sécante.

1° Démontrer que la directrice de la parabole est perpendiculaire à OC en son milieu.

2° Lieu du point de rencontre de la directrice et de la sécante.

648. — On considère les hyperboles qui passent par un point A d'une ellipse et qui admettent pour asymptotes deux diamètres conjugués de cette courbe. Chacune de ces hyperboles H rencontre l'ellipse en deux points variables M et M′. Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes à l'hyperbole H en ces deux points M et M′ avec la tangente à cette même courbe au point A.

Cas particulier où l'ellipse se réduit à un cercle.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

7e Année N° 9. Juin 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE CERCLE COUPANT TROIS CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES DONNÉS

Par M. **Girod**, Professeur au Lycée de Lyon.

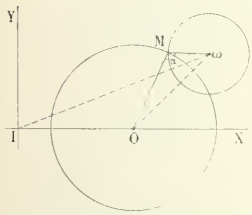
On démontre géométriquement, en transformant la figure par inversion, que si un cercle variable coupe deux cercles fixes sous des angles constants, chaque cercle qui a même axe radical avec les deux premiers est aussi coupé par ce cercle variable sous un angle constant.

La relation suivante établit la même propriété.

Soient O, O′, O″ les centres de trois cercles de même axe radical, de rayons R, R′, R″, coupés par un quatrième cercle sous des angles α, β, γ. Entre ces quantités existe la relation

$$\overline{O'O''}.R\cos\alpha + \overline{O''O}.R'\cos\beta + \overline{OO'}.R''\cos\gamma = 0. \tag{1}$$

Soient IX la ligne des centres des trois cercles ; IY leur axe radical commun, M un point commun au cercle O et au quatrième cercle ω, ρ le rayon du cercle ω.



On a
$$\overline{O\omega}^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\alpha.$$

Mais si x est la projection de Iω sur OX, on a

$$\overline{O\omega}^2 = \overline{I\omega}^2 + \overline{IO}^2 - 2\overline{IO}.x.$$

Donc
$$\overline{I\omega}^2 + \overline{IO}^2 - 2\overline{IO}.x = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\alpha,$$

ou
$$(\overline{I\omega}^2 - \rho^2) + (\overline{IO}^2 - R^2) - 2\overline{IO}.x + 2R\rho\cos\alpha = 0.$$

Soient p la puissance commune du point I par rapport aux trois cercles O, O′, O″, π la puissance de I par rapport au quatrième cercle ω. La relation précédente devient

$$\pi + p - 2\overline{IO}.x + 2R\rho\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

Si on l'applique aux deux autres cercles O′, O″, on obtient

$$\pi + p - 2\overline{IO'}.x + 2R'\rho\cos\beta = 0, \tag{3}$$

$$\pi + p - 2\overline{IO''}x + 2R''\rho\cos\gamma = 0. \tag{4}$$

Les relations (2), (3), (4) étant homogènes par rapport aux trois quantités $\pi + p$, x et ρ, le déterminant de leurs coefficients est nul. On a donc :

$$\begin{vmatrix} R\cos\alpha & R'\cos\beta & R''\cos\gamma \\ \overline{IO} & \overline{IO'} & \overline{IO''} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si on développe, en remarquant que $\overline{\mathrm{IO}''} - \overline{\mathrm{IO}'} = \overline{\mathrm{O'O''}}$, on obtient la relation indiquée

$$\overline{\mathrm{O'O''}}.\mathrm{R}\cos\alpha + \overline{\mathrm{O''O}}.\mathrm{R}'\cos\beta + \overline{\mathrm{OO'}}.\mathrm{R}''\cos\gamma = 0. \tag{1}$$

Il en résulte que si un cercle variable ω coupe les cercles O et O″ sous les angles α et β, il coupe O′ sous un angle constant γ que l'on peut calculer.

On peut se donner inversement γ, et chercher à déterminer le cercle O″. Entre son rayon et l'abscisse de son centre existe la relation (1) du premier degré. De plus ces deux quantités sont liées par la relation $p = \overline{\mathrm{IO}''^2} - \mathrm{R}''^2$, puisque le cercle O″ a même axe radical avec les deux premiers.

Donc le problème peut admettre deux solutions réelles.

Remarquons qu'une valeur négative de R″ ne doit pas être rejetée. Car l'équation (1) ne change pas lorsqu'on y remplace R″ par $-\mathrm{R}''$, et γ par $\pi - \gamma$. Le module d'une solution négative R″ est donc le rayon d'un cercle coupé par le cercle ω sous l'angle $\pi - \gamma$.

En particulier le cercle variable ω est tangent à deux cercles fixes, de même axe radical que O et O′. On les obtient en faisant $\gamma = 0$ dans la relation (1). Si les valeurs de R″ sont réelles, à une racine positive R″ correspond un cercle tangent *intérieurement* au cercle ω, à une racine négative un cercle tangent *extérieurement*.

Toutes les circonférences variables qui coupent O et O′ sous les angles $\pi - \alpha$ et $\pi - \beta$ sont tangentes aux deux mêmes cercles que celles qui coupent O et O′ sous les angles α et β ; et les modes de contact dans le deuxième cas sont contraires à ceux du premier cas.

Mais les circonférences ω, qui coupent O et O′ sous les angles α et β, ou $\pi - \alpha$ et $\pi - \beta$, sont orthogonales à un *seul* cercle O″, de même axe radical que O et O′.

Car si l'on fait $\gamma = \frac{\pi}{2}$ dans la relation (1), elle devient

$$\overline{\mathrm{O'O''}}.\mathrm{R}\cos\alpha + \overline{\mathrm{O''O}}.\mathrm{R}'\cos\beta = 0,$$

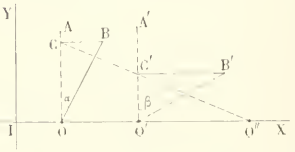
ou

$$\frac{\overline{\mathrm{OO''}}}{\overline{\mathrm{O''O'}}} = -\frac{\mathrm{R}\cos\alpha}{\mathrm{R}'\cos\beta}.$$

Cette relation détermine le point O″, et l'on voit qu'elle ne change pas lorsqu'on remplace simultanément α et β par leurs suppléments.

Construisons ce cercle O″, orthogonal à tous ceux qui coupent O et O′ sous les angles α et β, ou $\pi - \alpha$ et $\pi - \beta$.

On trace deux rayons OA, O′A′ de même sens, parallèles à l'axe radical IY ; puis deux autres OB et O′B′ faisant avec les premiers les angles α et β, et on projette leurs extrémités B et B′ sur les rayons OA, O′A′. La droite CC′ qui joint ces projections rencontre la ligne des centres au point O″ cherché.



Pour achever la construction du cercle O″ dans le cas où les cercles O et O′ ne se coupent pas, il suffit de mener de O″ la tangente à la circonférence décrite sur le segment des points limites réels comme diamètre. On voit que le cercle O″ peut avoir un rayon imaginaire si O″ est intérieur au segment des points limites.

Lorsque $\beta = \alpha$, le point O″ est le centre de similitude directe des cercles O et O′ ; lorsque $\beta = \pi - \alpha$, O″ est le centre de similitude inverse.

Considérons maintenant un cercle ω, coupant trois cercles *quelconques*, O, O′, O″ sous les angles α, β, γ.

En appliquant la construction précédente, on peut construire le cercle Σ'', qui a même axe radical avec O et O', et qui est orthogonal à tous les cercles coupant O et O sous les angles α et β, ou $\pi - \alpha$ et $\pi - \beta$.

On trouve ainsi trois cercles, orthogonaux au cercle inconnu ω. Désignons par Σ, Σ', Σ'' ces trois cercles dont le premier a même axe radical avec O' et O'', le deuxième avec O'' et O, le troisième avec O et O'.

Ces trois cercles Σ, Σ', Σ'' ne nous permettent pas de déterminer complètement le cercle ω, qui leur est orthogonal, car nous allons montrer qu'ils ont même axe radical.

Considérons le triangle OO'O'' formé par les centres des trois circonférences données. Le centre I'' de Σ'' est situé sur la droite OO', et il est déterminé par la relation

$$\frac{OI''}{I''O'} = -\frac{R \cos \alpha}{R' \cos \beta}.$$

D'où résulte que ce centre est le point de rencontre du côté OO avec la polaire du point S, de coordonnées barycentriques $R \cos \alpha$, $R' \cos \beta$, $R'' \cos \gamma$ par rapport aux côtés de l'angle O'' du triangle OO'O''. Donc les trois centres des circonférences Σ, Σ', Σ'' sont sur une droite, qui est la polaire *trilinéaire* du point S défini par ses coordonnées barycentriques.

De plus le centre radical des trois circonférences données O, O', O'' a même puissance par rapport aux trois circonférences Σ, Σ', Σ''.

Donc les trois circonférences Σ, Σ', Σ'' ont pour axe radical commun la perpendiculaire abaissée du centre radical des trois cercles donnés O, O', O'' sur la polaire trilinéaire du point S, de coordonnées barycentriques $R \cos \alpha$, $R' \cos \beta$, $R'' \cos \gamma$.

Si on remplace les trois angles α, β, γ par leurs suppléments, la circonférence cherchée ω' est encore orthogonale aux trois circonférences Σ, Σ', Σ'', et par suite la perpendiculaire abaissée du centre radical de O, O', O'' sur la polaire trilinéaire du point de coordonnées $R \cos \alpha$, $R' \cos \beta$, $R'' \cos \gamma$, contient les centres des *deux* circonférences ω et ω' qui coupent O, O', O'' sous les angles α, β, γ ou sous les angles supplémentaires.

Si on considérait les cercles ω_1 et ω'_1 coupant O, O', O'' sous les angles α, β, $\pi - \gamma$, ou sous les angles supplémentaires, on verrait de même que leurs centres sont situés sur la perpendiculaire abaissée du centre radical de O, O', O'' sur une droite analogue à la précédente. On construit cette nouvelle droite en conservant le centre de Σ'' situé sur OO', et substituant aux deux autres centres leurs conjugués par rapport à deux sommets du triangle OO'O''.

On peut former ainsi quatre couples de circonférences.

Si l'on suppose $\alpha = \beta = \gamma$, la première droite, polaire trilinéaire du point $R \cos \alpha$, $R \cos \beta$, $R'' \cos \gamma$, devient l'axe de similitude directe des trois cercles. Donc la perpendiculaire abaissée du centre radical sur cet axe est le lieu des centres des cercles qui coupent O, O', O'' sous trois angles égaux variables. Elle contient par suite les centres des cercles tangents à O, O', O'', le mode de contact étant le même pour les trois circonférences.

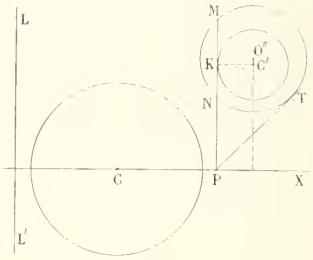
Si l'on considère l'axe de similitude qui passe par le centre de similitude directe de O et O', et par les centres de similitude inverse de O et O'', O' et O'', la perpendiculaire abaissée du centre radical sur cet axe contient les centres des cercles qui coupent O et O' sous le même angle, et O'' sous l'angle supplémentaire du premier. On a les cercles tangents à O et O'' de la même manière, et à O de l'autre manière, en donnant à cet angle la valeur zéro ou π.

Pour tracer une circonférence coupant O, O', O'' sous les angles α, β, γ, ou sous les angles supplémentaires, on peut donc déterminer deux des trois cercles Σ, Σ', Σ'' dont il a été question, par exemple Σ et Σ', et tracer un cercle ω coupant le cercle O'' sous l'angle γ ou sous l'angle $\pi - \gamma$. S'il coupe

O'' sous l'angle γ, il coupera O et O' sous les angles α et β ; s'il coupe O'' sous l'angle $\pi - \gamma$, il coupera O et O' sous les angles $\pi - \alpha$ et $\pi - \beta$.

En traçant un cercle quelconque C, orthogonal à Σ et Σ', on est ramené à construire un cercle ω qui ait pour axe radical avec C la polaire trilinéaire LL' considérée précédemment et qui coupe O'' sous l'angle γ ou $\pi - \gamma$.

Or tout cercle qui a son centre sur la perpendiculaire CX abaissée du centre du cercle C sur la droite LL' et qui coupe sous l'angle γ le cercle O'' coupe sous ce même angle γ le cercle symétrique de O'' par rapport à CX. Une perpendiculaire MNP à CX coupant O'' sous l'angle γ peut être considérée comme l'un de ces cercles. Mais on sait qu'ils sont tous tangents à deux cercles *qui ont même axe radical avec* O'' *et le cercle symétrique*. Cet axe radical est donc CX. On construira l'un de ces cercles C' tangents à la droite MNP en menant de P la tangente au cercle O'' et rabattant cette tangente en K sur la droite PN. Le point K est le point de contact du cercle C', dont le centre est situé sur la perpendiculaire abaissée de O'' sur CX.



Il ne reste plus qu'à tracer un cercle tangent au cercle C' et admettant LL' pour axe radical avec C. On détermine le point de rencontre de LL' avec l'axe radical de C et C' et de ce point on mène des tangentes au cercle C'.

Les rayons de C' aboutissant aux points de contact rencontrent CX aux centres des cercles ω et ω' cherchés.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

583. — *Par un point* M *du cercle circonscrit à un triangle passent deux paraboles inscrites dans ce triangle. Démontrer que les tangentes en* M *à ces deux paraboles sont rectangulaires et qu'elles enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements quand le point* M *décrit le cercle.*

Les tangentes menées par le point M à toutes les paraboles inscrites dans le triangle ABC décrivent deux faisceaux en involution. Les droites isotropes sont deux rayons homologues, car le point M étant sur le cercle circonscrit au triangle ABC, il existe une parabole du système qui admet ce point pour foyer. Les rayons doubles MT_1 et MT_2 de cette involution, qui sont les tangentes en M aux paraboles qui y passent sont donc rectangulaires.

Le point A et le point à l'infini sur BC forment une parabole du système. La droite MA et la parallèle MD à BC sont donc deux rayons homologues de l'involution considérée plus haut; par suite MT_1 et MT_2 sont les bissectrices de l'angle AMD.

Prenons comme axes de coordonnées la parallèle Ax et la perpendiculaire Ay à BC; soient

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0,$$

$$ux + vy + w = 0,$$

les équations du cercle circonscrit au triangle ABC et de la droite MT_1. L'ensemble des droites joignant l'origine aux points de rencontre du cercle et de la droite a pour équation

$$w(x^2 + y^2) + 2(ax + by)(ux + vy) = 0;$$

les coefficients angulaires de ces droites vérifient l'équation

$$(1) \qquad w(1 + m^2) + 2(a + bm)(u + vm) = 0.$$

La droite AM est l'une de ces droites; soit m son coefficient angulaire, soit μ celui de MT_1, nous devons avoir

$$m = \frac{2\mu}{1-\mu^2} = \frac{2uv}{u^2-v^2}.$$

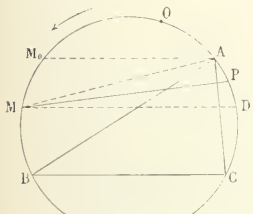
Nous aurons l'équation tangentielle de l'enveloppe en remplaçant dans l'équation (1) m par $\frac{2uv}{u^2-v^2}$; nous obtenons ainsi

$$v(u^2+v^2)+2u[a(u^2-v^2)+2buv]=0.$$

L'enveloppe est une courbe de troisième classe, bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques; c'est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Eugène LIMES, à Saint-Michel.

Autre solution par M. E. Barré, à Valenciennes.



Solution géométrique. — Il est facile de compléter la solution géométrique commencée au début de la solution qui précède. Soit en effet M un point quelconque du cercle; menons MD parallèle à BC et MP bissectrice de l'angle AMD; si nous considérons la position du point M pour laquelle D tombe en A, la position M_0 obtenue en menant AM_0 parallèle à MD, M_0A est l'une des positions de MP. Prenons alors O au tiers de l'arc AM_0 tel que $\widehat{OM_0} = -2\widehat{OA}$; nous aurons aussi $\widehat{OM} = -2\widehat{OP}$, puisque $\widehat{M_0M} = -\widehat{AD} = -2\widehat{AP}$. On sait que dans ces conditions, la droite MP enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

---

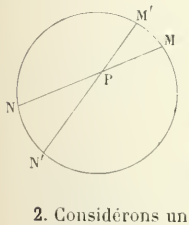
584. — *Sur un cercle fixe on marque une origine et un sens de rotation; soient φ_1 et φ_2 les arguments des points communs au cercle et à une droite* D.

1° *En désignant par $f(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ la relation qui unit ces deux angles, on demande de déterminer le point où la droite* D *touche son enveloppe.*

2° *Montrer que si cette enveloppe est une épicycloïde portée par un cercle concentrique au cercle donné, la relation précédente est linéaire en φ_1 et φ_2 et réciproquement.*

1. Soient M et N les points où la droite MN rencontre le cercle, et φ_1, φ_2, les arguments de ces deux points; les deux triangles PMM′ et PNN′ sont semblables et l'on a

$$\left|\frac{PM}{PN'}\right| = +\left|\frac{MM'}{NN'}\right| = +\left|\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}\right|;$$

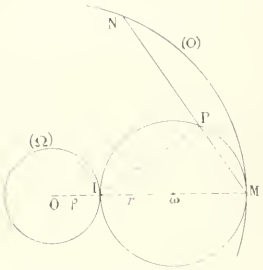


donc remarquant qu'à la limite $PN' = PN$, on a, pour déterminer le point P où la droite touche son enveloppe, $\frac{PM}{PN} = -\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$; or, en appelant $f(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ la relation qui unit φ_1 et φ_2, on a $d\varphi_1 f'_{\varphi_1} + d\varphi_2 f'_{\varphi_2} = 0$, et, par suite, $\frac{PM}{PN} = \frac{f'_{\varphi_2}}{f'_{\varphi_1}}$.

2. Considérons une épicycloïde engendrée par un point P d'un cercle ω roulant sans glisser sur un cercle fixe (Ω); soient r et ρ les rayons de ces deux cercles. Le cercle ω est constamment tangent à un cercle O, concentrique à (Ω) et de rayon $R = \rho + 2r$; en appelant M le point de contact et N le second point de rencontre de la droite MP avec le cercle O, nous voyons que la droite MN enveloppe l'épicycloïde envisagée et qu'elle touche cette courbe au point P. Comptons alors les arguments sur

le cercle O, nous aurons

$$\frac{PM}{PN} = -\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{MP}{PN} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2},$$



ou enfin

$$\frac{MN}{MP} = \frac{d\varphi_1 + d\varphi_2}{d\varphi_1};$$

or, le point M étant un centre de similitude des deux cercles O et ω, on a $\frac{MN}{MP} = \frac{R}{r}$, et, par suite, $\frac{\rho + 2r}{r} = \frac{d\varphi_1 + d\varphi_2}{d\varphi_1}$.

Désignons par k le rapport des deux rayons ρ et r, $\rho = kr$, nous aurons enfin

$$(k+1)d\varphi_1 - d\varphi_2 = 0;$$

la relation qui existe entre φ_1 et φ_2 est donc bien une relation linéaire

$$(k+1)\varphi_1 - \varphi_2 + k' = 0.$$

Réciproquement d'une pareille relation résulte $\frac{PM}{PN} = C^{te}$ et aussi $\frac{MP}{MN} = C^{te}$. Le point P est donc situé sur un cercle ω tangent au cercle donné O en M, les rayons r et R de ces cercles vérifiant la relation $\frac{r}{R} = C^{te}$ que nous avons écrite en dernier lieu; si cette constante est positive, il y a contact intérieur, sinon, il y a contact extérieur. En désignant par $\varphi_1 + h\varphi_2 + k = 0$ la relation linéaire, on a $\frac{MP}{PN} = +\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = -h$, et, par suite, $\frac{MP}{MN} = \frac{r}{R} = \frac{-h}{1-h}$; cette relation donne r. Si l'on a $R > 2r$, le cercle ω reste constamment tangent extérieurement à un cercle concentrique au cercle O et de rayon $R - 2r$; si l'on a $R < 2r$, le cercle ω reste au contraire tangent intérieurement à un cercle concentrique au cercle O et de rayon $2r - R$. Dans les deux cas, le point P du cercle ω engendre, soit une épicycloïde, soit une hypocycloïde; cette courbe est enveloppée par une droite qui vérifie la relation $\varphi_1 + h\varphi_2 + k = 0$, puisque le $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$ est le même que le précédent et que cette droite coïncide avec celle que nous envisageons dans une certaine position initiale du point P. Donc cette courbe est bien l'enveloppe cherchée.

Autre solution de M. E. Barré, à Valenciennes.

---

598. — *On considère deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et deux points fixes de leur plan* $A(\alpha, \beta)$, $A'(\alpha', \beta')$.

1° *Démontrer que l'on peut mener trois droites de leur plan* $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ *jouissant de la propriété commune suivante : en appelant* B *le point de rencontre de* Δ_1 *avec* Ox, B′ *le point de rencontre de* Δ_1 *avec* Oy, AB *et* A′B′ *sont perpendiculaires à* BB′.

2° *En supposant* A *fixe et* A′ *variable, lieu que doit décrire* A′ *pour que deux droites précédentes* (Δ_1 *et* Δ_2) *soient confondues. Construire la courbe précédente. Dans la même hypothèse, lieu du point de rencontre de* Δ_1 *et de* Δ_3.

3° *Revenant au cas où* A *et* A′ *sont quelconques, former l'équation de la circonférence circonscrite au triangle dont les côtés sont* Δ_1, Δ_2, Δ_3. *En déduire le tracé de cette circonférence.*

4° *Enveloppe de cette circonférence lorsque* A *est fixe et* A′ *mobile sur une circonférence donnée de centre* A.

1. Je rappelle le théorème suivant : *Si le sommet* A *d'un angle droit* FAB *décrit une droite* D, *tandis*

que le côté FA *passe par un point fixe* F, *le second côté* AB' *enveloppe une parabole ayant pour foyer* F *et* D *pour tangente au sommet.* Ceci posé, BB' est tangente à la fois à deux paraboles (P) et (Q) ayant pour foyers respectifs A et A' et pour tangentes au sommet, les axes Ox, Oy. Ces deux paraboles ont trois tangentes communes à distance finie. Ce sont les droites annoncées Δ_1, Δ_2, Δ_3.

2. Les paraboles (P) et (Q) ont pour équations

$$(x-\alpha)^2 - 4\beta y = 0,$$

$$(y-\beta')^2 - 4\alpha' x = 0.$$

Les tangentes à ces courbes ayant pour coefficient angulaire m, ont alors pour équations

$$x - \alpha = \frac{y}{m} + \beta m,$$

$$y - \beta' = mx + \frac{\alpha'}{m}.$$

En exprimant que ces droites coïncident, on obtient l'équation qui donne les coefficients angulaires des droites Δ_1, Δ_2, Δ_3

$$\beta m^3 + \alpha m^2 + \beta' m + \alpha' = 0. \tag{1}$$

Δ_1 et Δ_2 coïncident, si cette équation a une racine double. On est donc conduit à exprimer que les équations suivantes ont une racine commune :

$$3\beta m^2 + 2\alpha m + \beta' = 0,$$

$$\alpha m^2 + 2\beta' m + 3\alpha' = 0.$$

La condition ainsi obtenue est l'équation du lieu du point A', et, si on y remplace α' et β' par x et y, elle s'écrit

$$(9\beta x - \alpha y)^2 - 4(3\beta y - \alpha^2)(3\alpha x - y^2) = 0. \tag{2}$$

Le lieu est donc une cubique ayant pour direction asymptotique Ox et des branches paraboliques dans cette direction ; elle coupe en deux points confondus la droite $y = \frac{\alpha^2}{3\beta}$ et est tangente à la parabole $y^2 - 3\alpha x = 0$, aux points où la droite $9\beta x - \alpha y = 0$ les rencontre ; comme elle a deux points confondus avec la parabole indiquée à l'infini sur Ox, elle n'a plus aucun autre point de rencontre avec cette courbe que ceux qui sont signalés. Pour construire cette courbe, nous supposerons α et β positifs, ce qui est toujours permis, et nous ferons les constructions graphiques en supposant $\alpha = \beta$, hypothèse qui ne sera d'ailleurs pas faite dans les raisonnements. L'équation (2) est du second degré par rapport à x ; nous pouvons donc la discuter en prenant x comme inconnue principale ; elle s'écrit alors

$$27\beta^2 x^2 - 2\alpha(9\beta y - 2\alpha^2)x + 4\beta y^3 - \alpha^2 y^2 = 0\,;$$

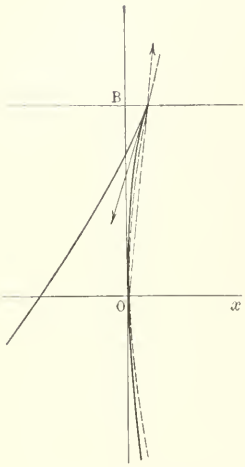
nous en déduisons, pour x, les deux valeurs

$$x = \frac{\alpha(9\beta y - 2\alpha^2) \pm 2\sqrt{(\alpha^2 - 3\beta y)^3}}{27\beta^2}. \tag{3}$$

Ce résultat nous montre que la courbe est tout entière au-dessous de la droite $y = \frac{\alpha^2}{3\beta}$, et, en rapprochant ce résultat de ceux que fournissent les signes des trois binomes de l'équation (2), nous voyons que la courbe est tout entière à l'extérieur de la parabole $y^2 - 3\alpha x = 0$.

Entre les deux droites $y = \frac{\alpha^2}{3\beta}$ et $y = \frac{\alpha^2}{4\beta}$, les deux valeurs de x sont positives; au-dessous de cette dernière droite, elles sont de signes contraires, et l'une des branches traverse Oy au point d'ordonnée $\frac{\alpha^2}{4\beta}$; l'autre branche touche l'axe des y au point O, du côté des x positifs.

Le point situé sur la droite $y = \frac{\alpha^2}{3\beta}$ est un point de rebroussement, car l'équation (3) peut s'écrire



$$x = \frac{\alpha^3}{27\beta^2} + \frac{3\alpha(3\beta y - \alpha^2) \pm 2\sqrt{(\alpha^2 - 3\beta y)^3}}{27\beta^2},$$

et, en effectuant le transport d'axes indiqué par les formules de transformation, $x = x' + \frac{\alpha^3}{27\beta^2}$, $y = y' + \frac{\alpha^2}{3\beta}$, elle devient

$$x' = \frac{3\alpha\beta y' \pm 2\sqrt{-3\beta^3 y'^3}}{9\beta^2}$$

ou
$$3(3\beta x' - \alpha y')^2 + 4\beta y'^3 = 0;$$

la tangente au point de rebroussement a pour coefficient angulaire $\frac{3\beta}{\alpha}$.

La forme de la courbe résulte évidemment de tout ce que nous venons de dire.

Désignons maintenant par x et y les coordonnées du point de rencontre des droites Δ_1 et Δ_3; les coefficients angulaires de ces deux droites s'obtiennent en résolvant l'équation du second degré en m

$$x - \alpha = \frac{y}{m} + \beta m,$$

ou
$$\beta m^2 - (x - \alpha)m + y = 0.$$

Si nous appelons m_1 le coefficient angulaire de Δ_1 et m_3 le coefficient angulaire de Δ_3, cette équation nous donne $m_1 + m_3 = \frac{x - \alpha}{\beta}$; d'autre part, l'équation (1) nous donne aussi

$$2m_1 + m_3 = -\frac{\alpha}{\beta};$$

une simple soustraction nous fournit la valeur de m_1, $m_1 = -\frac{x}{\beta}$.

En exprimant que ce nombre est racine de l'équation du second degré en m, nous obtenons l'équation du lieu

(4) $$2x^2 - \alpha x + \beta y = 0.$$

C'est une parabole ayant son axe parallèle à Ox.

3 et 4. Désignons par x, y les coordonnées d'un ombilic des deux paraboles (P), (Q). En exprimant que les équations aux coefficients angulaires des tangentes issues de ce point, à (P) et à (Q), ont les mêmes racines, nous avons

$$\frac{\beta}{x} = \frac{x - \alpha}{y - \beta'} = \frac{y}{\alpha'}.$$

Nous déduisons de là

(5) $$x(x - \alpha) - \beta(y - \beta') = 0,$$

(6) $$y(y - \beta') - \alpha'(x - \alpha) = 0.$$

Ces équations représentent deux paraboles passant par les trois ombilics. En les additionnant membre à membre, on trouve l'équation d'une circonférence qui passe aux trois ombilics et qui, par suite, est la circonférence demandée,

$$x^2 + y^2 - (\alpha + \alpha')x - (\beta + \beta')y + \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

On vérifie aisément que cette circonférence passe aux points A et A'.

Ceci était à prévoir, car le cercle circonscrit à un triangle dont les côtés sont tangents à une parabole passe par le foyer. On voit en outre que le cercle précédent (C) est décrit sur AA' comme diamètre. Il en résulte immédiatement, que si A' décrit une circonférence Σ de centre A, cette circonférence est l'enveloppe de C.

Plus généralement, si A' décrit un cercle quelconque (S), le centre du cercle (C) décrit aussi un cercle (S'), homothétique de (S) par rapport au centre A, et dans le rapport $\frac{1}{2}$. L'enveloppe de (C) est, comme on sait, l'homothétique par rapport au même centre A et dans le rapport 2 de la podaire de ce point par rapport à (S'), ou ce qui revient au même, la podaire de A par rapport au cercle S que décrit A'. C'est un limaçon de Pascal. Un résultat analogue se présente quand le point A' décrit une courbe quelconque.

E. LIMÉS.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

On prendra comme origine le centre de la feuille, comme axe des x ou ligne de terre le petit axe de la feuille, comme axe des y une ligne de bout, l'axe des z étant vertical. On donne :

1° *Un hyperboloïde de révolution* S *à axe vertical* o $(x = 0,\ y = 10^{cm})$ *ayant pour génératrice principale la droite* AA' *passant par* a, a' $(x = 0,\ y = 14,\ z = 10)$ *et par* α, α' $(x = -10,\ y = 14,\ z = 0)$;

2° *Un hyperboloïde* S_1 *ayant pour directrices :* 1° AA'; 2° BB' *qui passe par* o, o' $(x = 0,\ y = 10,\ z = 10)$ *et par* β, β' $(x = 10,\ y = 10,\ z = 0)$; 3° *la ligne de bout* CC' $(x = -2,\ z = 6)$.

Représenter la surface opaque de l'hyperboloïde de révolution S *contenue dans l'hyperboloïde* S_1.

On vérifiera numériquement les directions des asymptotes de l'intersection, en calculant les angles de leurs projections horizontales avec la ligne de terre.

(*École normale, 1896.*)

Les deux hyperboloïdes S et S_1 ayant une génératrice commune, nous emploierons des plans auxiliaires passant par cette génératrice A, A'. Les trois directrices rectilignes A, A', B, B' et C, C' qui définissent S_1 forment un parallélépipède rectangle dont le centre est ω, ω'; les trois arêtes opposées aux précédentes sont des génératrices du second système et sont A_1, A'_1, B_1, B'_1 et C_1, C'_1. Toutes les génératrices du second système rencontrant la ligne de bout C, C' ont leurs projections verticales passant par C'; les génératrices du premier système rencontrant la ligne de bout C_1, C'_1 ont leurs projections verticales qui passent par C'_1, c'est-à-dire par o'.

Prenons une génératrice quelconque du second système; sa projection verticale est $C'd'e'$ qui rencontre A' en d' et B' en e', d'où la projection horizontale de de cette génératrice qui a pour trace horizontale h, h'. Le plan auxiliaire qui contient A, A' et $de, d'e'$ a pour trace horizontale ah rencontrant la trace horizontale de l'hyperboloïde S en un second point f, ce qui donne la projection horizontale fm de la seconde génératrice de S contenue dans ce plan auxiliaire. fm rencontre de au point m qui est la projection horizontale d'un point de l'intersection des deux surfaces. On en déduit le point m, m' de cette intersection. Pour avoir la tangente en ce point m, m', nous prenons la seconde génératrice de S_1 qui passe par m, m'; sa projection verticale $m't'$ passe par o', d'où sa projection horizontale mi. Le plan tangent en m, m' à S_1 est ainsi défini par les deux génératrices qui passent par ce point et sa trace horizontale est ht; le plan tangent en m, m' à S a pour trace horizontale ft et leur intersection est la tangente cherchée $mt, m't'$.

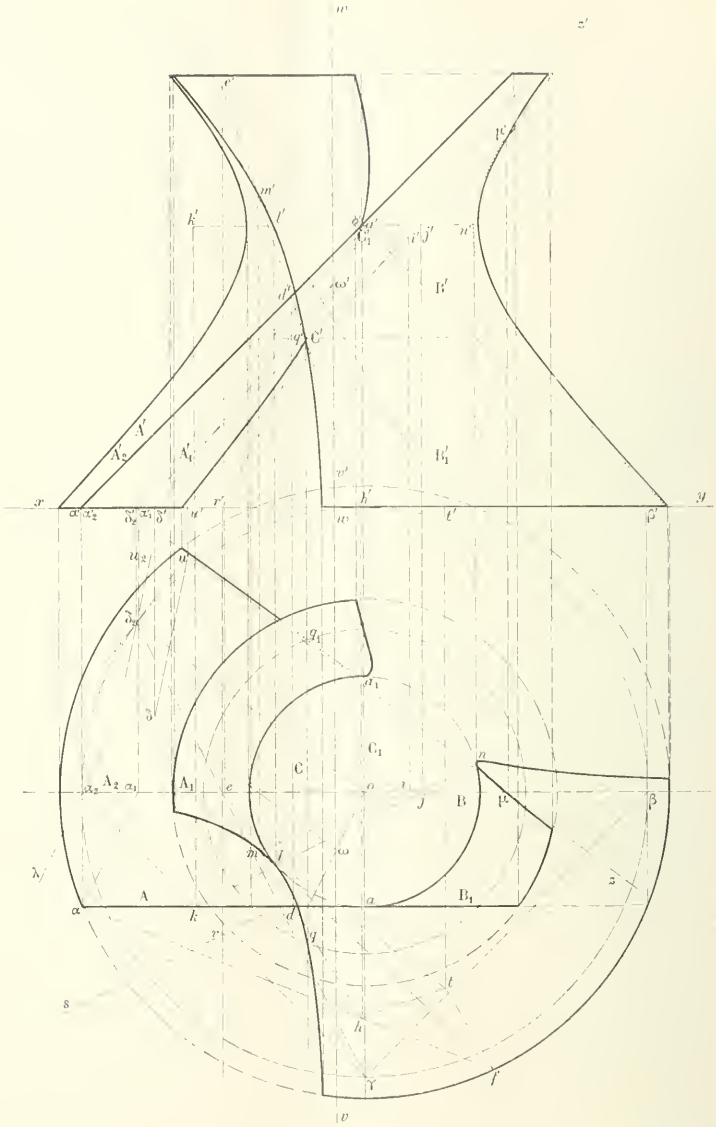
Il suffira de faire tourner $d'e'$ autour de C' pour avoir autant de points que l'on voudra de l'intersection.

Nous avons déterminé les points sur le cercle de gorge de S, en coupant par le plan horizontal de o, o' qui détermine dans S_1 les deux génératrices C_1, C'_1 et $Kj, K'j'$ et nous avons obtenu les quatre points l, l', n, n', a, a' et a_1, a'_1 sur ce cercle de gorge.

De même le plan horizontal passant par C, C' donne quatre points dont deux q, q' et q_1, q' situés sur C, C' ont été déterminés dans l'épure.

Les points sur le contour apparent vertical de S sont les points de rencontre de l'hyperbole méridienne de S et de A_1, A'_1. Il y a un seul point μ, μ'.

Cherchons maintenant les asymptotes de la ligne d'intersection qui se compose de la génératrice commune A, A' et d'une cubique gauche. Pour cela nous cherchons les génératrices parallèles sur les cônes asymptotes des deux surfaces et nous avons à cet effet transporté le cône asymptote de S_1, qui a pour sommet ω, ω', paral-


m
z'
e'
m'
k'
l'
a'
C'1
i'
j'
n'
B'
d'
ω'
q'
C'
A'
A'2
A'1
B'1
v'
h'
x
y
α'
α2
δ2
α1
δ'
u'
r'
w
t'
β'
u2
u
δ1
δ
q1
a1
C1
C
A2
α2
α1
A1
e
o
j
B
n
μ
β
λ
m
i
ω
z
α
A
k
d
a
B1
r
q
t
s
h
Y
f
v

lèlement à lui-même de manière que son sommet soit en o, o' sommet du cône asymptote de S. La parallèle à A, A′ menée par o, o' est A_2, A'_2 qui a pour trace horizontale α_2, α'_2 ; la parallèle à B, B′ est B, B′ elle-même et la parallèle à C, C′ est C_1, C'_1 qui est une horizontale en sorte que la trace horizontale du cône transporté est une hyperbole qui passe par α_2 et β et a une asymptote parallèle à C_1. Le plan des deux génératrices parallèles A et A_1 est tangent au cône asymptote de sommet ω et sa trace horizontale $\alpha\alpha_1$ est tangente à la trace horizontale de ce cône ; après le transfert la tangente en α_2 sera donc $\alpha_2\lambda$ parallèle à $\alpha\alpha_1$.

De même rr' trace horizontale du plan des deux génératrices parallèles C et C_1 est tangente à la trace horizontale du cône transporté et comme elle est parallèle à une direction asymptotique C_1, elle est une asymptote. On en déduit la seconde asymptote rs en prenant α_2 comme le milieu de la portion de la tangente $\alpha_2\lambda$ comprise entre l'asymptote commune rr' et l'asymptote cherchée rs.

Il faut chercher les points communs aux traces horizontales des deux cônes de sommet o, o', c'est-à-dire au cercle de centre o et de rayon $o\alpha_2$ et à l'hyperbole précédente dont nous avons déjà trois points α_2, β, γ communs avec ce cercle et dont nous connaissons les asymptotes et par suite les axes. Il suffit de mener la corde $\gamma\delta_2$ ayant sur les axes même inclinaison que $\alpha_2\beta$, ce qui donne le quatrième point d'intersection δ_2.

Nous avons alors quatre directions asymptotiques projetées horizontalement en $o\alpha_2$, $o\beta$, $o\gamma$ et $o\delta_2$; la première $o\alpha_2$ donne la génératrice commune A, A′. La seconde $o\beta$ donne B, B′ ; la troisième $o\gamma$ donne l'asymptote de profil vw et enfin $o\delta_2$ donne uz, $u'z'$. Pour cette dernière nous avons fait la construction en déterminant la tangente δ_2u_2 à l'hyperbole, ce qui donne la trace horizontale δu du plan tangent au cône de sommet ω, ω' le long de la génératrice parallèle $\omega\delta$, $\omega'\delta'$. Le plan tangent au cône asymptote de S le long de $o\delta_2$, $o'\delta'_2$ parallèle à $\omega\delta$, $\omega'\delta'$ est δ_2u, d'où la trace horizontale u, u' de cette asymptote uz, $u'z'$.

Dans la représentation de la surface de S nous avons limité cet hyperboloïde d'une part au plan horizontal de projection et d'autre part à un plan horizontal pris au-dessus du plan de son cercle de gorge. Cette surface étant opaque nous avons immédiatement la visibilité.

Etudions analytiquement cette intersection ; nous prenons les trois axes de coordonnées indiqués dans l'énoncé et alors nous avons pour équations

S $$x^2 + y^2 - z^2 - 16 = 0,$$

S_1 $$x^2 - z^2 + 2xy - yz - 2x - 2z = 0.$$

La projection horizontale de l'intersection est

$$(x^2 + y^2 - 16)(y + 2)^2 - (y^2 - 2xy + 2x - 16)^2 = 0,$$

qui se décompose en

$$y - 4 = 0 \qquad \text{et} \qquad xy^2 - \frac{3}{4}yx^2 + y^2 + 3xy - 4x + 9y + 20 = 0,$$

$y - 4 = 0$ est l'équation de A et l'autre est l'équation de la cubique, projection horizontale de l'intersection. Les directions asymptotiques de cette cubique sont $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{3}{4}x$.

Les asymptotes correspondantes sont

$$x = -1, \qquad y = 0, \qquad y = \frac{3}{4}(x - 5).$$

On a d'une manière analogue l'équation de la projection verticale de l'intersection qui se décompose en

$$z - x = 0 \qquad \text{et} \qquad x(x + z)(5x - 4z) - 4(x + z)^2 - 12(5x - z) = 0,$$

d'où trois directions asymptotiques

$$x = 0, \qquad x + z = 0, \qquad 5x - 4z = 0.$$

Les asymptotes correspondantes s'en déduisent immédiatement.

Si nous n'avions voulu obtenir que les directions asymptotiques des deux projections, il aurait suffi de prendre les cônes des directions asymptotiques des deux surfaces, ayant pour sommet commun l'origine ; leurs équations

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$
$$x^2 - z^2 + 2xy - yz = 0,$$

donnent immédiatement ces directions. N. C.

PHYSIQUE ET CHIMIE

527. — *Pour déterminer les chaleurs de formation de l'hydrogène phosphoré gazeux, de l'hydrogène arsénié et de l'hydrogène silicié, on fait arriver les gaz bulle à bulle dans un excès de brome. Le brome recouvert d'une épaisse couche d'eau est placé dans un tube de verre immergé dans l'eau d'un calorimètre.*

Les dégagements de chaleur observés, évalués en grandes calories, et les augmentations de poids du tube à brome sont respectivement :

Pour l'hydrogène phosphoré,	$1^{cal},452$	et	$0^{gr},194$;
— *arsénié,*	$1^{cal},064$	—	$0^{gr},390$;
— *silicié,*	$1^{cal},688$	—	$0^{gr},128$.

Par quelles réactions chimiques et par quels procédés d'analyse pourrait-on vérifier les réactions produites au sein du calorimètre?

Données numériques :

Les quantités de chaleur dégagées par l'oxydation complète du phosphore ordinaire, de l'arsenic, du silicium cristallisé en présence d'un excès d'eau sont respectivement

$$405^{cal},4 \qquad 225^{cal},4 \qquad 211^{cal},1.$$

D'autre part, la réaction $H + Br$ *liquide* $= HBr$ *dissous dégage* $29^{cal},5$.

$$H^2 + O = H^2O \qquad - \quad 69^{cal}.$$

$$P = 31, \qquad As = 75, \qquad Si = 28.$$

(*Concours général, 1896.*)

Les réactions qui ont lieu en présence du brome sont représentées par les équations

$$2PH^3 + 5H^2O + 16Br = P^2O^5 \text{ dissous} + 16HBr \text{ dissous},$$

$$2AsH^3 + 5H^2O + 16Br = As^2O^5 \text{ dissous} + 16HBr \text{ dissous},$$

$$SiH^4 + 2H^2O + 8Br = SiO^2 \text{ hydratée} + 8HBr \text{ dissous}.$$

Les poids de gaz indiqués dans ces équations sont respectivement

$$68, \qquad 156, \qquad 32,$$

tandis que l'expérience a été faite sur les poids

$$0^{gr},194, \qquad 0^{gr},390, \qquad 0^{gr},128;$$

les quantités de chaleur correspondant aux poids indiqués dans les équations seraient donc

$$1,452 \times \frac{68}{0,194}, \qquad 1,064 \times \frac{156}{0,390}, \qquad 1,688 \times \frac{32}{0,128}.$$

Écrivons que ces quantités de chaleur sont égales à la somme des chaleurs de formation des corps qui ont pris naissance, diminuée des chaleurs de formation des corps qui ont été détruits; il vient

$$-2x - 5 \times 69 + 405,4 + 16 \times 29,5 = 1,452 \times \frac{68}{0,194},$$

$$-2y - 5 \times 69 + 225,4 + 16 \times 29,5 = 1,064 \times \frac{156}{0,390},$$

$$-z - 2 \times 69 + 211,1 + 8 \times 29,5 = 1,688 \times \frac{32}{0,128},$$

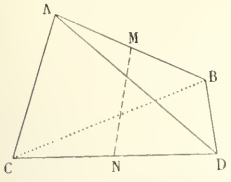
d'où l'on tire

$$x = 11,7, \qquad y = -36,6, \qquad z = -112,9.$$

Ce dernier nombre paraît inexact; l'un des chiffres du texte est peut-être erroné.

La liqueur résultant de l'opération étant débarrassée de l'excès de brome par ébullition, on y reconnaîtra la présence de l'acide phosphorique, de l'acide arsénique ou de la silice, et celle de l'acide bromhydrique à l'aide des caractères indiqués dans les cours. Le dosage de ces substances permettra d'achever la vérification des réactions produites.

531. — *Soit un tétraèdre formé comme il suit : les deux arêtes opposées* AB, CD *sont perpendiculaires, en leurs milieux* M, N, *à une même droite* MN *et égales au double de* MN ; *de plus, elles sont perpendiculaires entre elles ; il en résulte que les dièdres* AB, CD *du tétraèdre sont droits.*

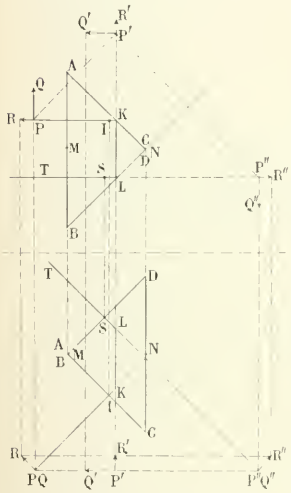


Étudier comment se comporte, en tant que prisme à réflexion totale, un morceau de verre ayant la forme de ce tétraèdre : la lumière tombe à peu près normalement sur l'une des faces du dièdre AB *et sort par l'autre face du même dièdre après s'être réfléchie à l'intérieur du dièdre* CD.

Quel effet produit un prisme de cette sorte, disposé devant l'objectif d'une lunette astronomique ?

(École normale, 1896.)

Pour plus de clarté, plaçons l'arête AB verticale et projetons le prisme sur deux plans respectivement perpendiculaires aux arêtes CD et AB ; les projections seront les deux triangles rectangles isocèles ANB et CMD.



Faisons provisoirement abstraction, pour simplifier, des réfractions dans les faces d'entrée et de sortie, réfractions qui ne modifient ni la grandeur ni le sens des images, et étudions la réflexion dans les deux miroirs rectangulaires ACD, BCD.

Soit PQ une dimension verticale de l'objet ; cette droite donne dans le miroir ACD l'image symétrique et, par conséquent, horizontale P'Q' ; P'Q' à son tour donne dans le miroir BCD l'image symétrique et, par conséquent, verticale P''Q''.

Soit PK le rayon normal au plan ABC et, par conséquent, horizontal. Les projections verticales KL, LT, des rayons réfléchis sont, par symétrie, la première verticale, la seconde horizontale. En projection horizontale, les points P', P'', K, se déduisent des projections verticales ; inversement, la projection verticale du premier point d'incidence I se déduit de sa projection horizontale.

Le rayon KL fait le même angle avec les deux miroirs ; par conséquent, de même que le rayon incident est normal au plan ABC, le rayon émergent P''T est normal au plan ABD, ce qui détermine sa projection horizontale et, en même temps, les points d'incidence L et S. On s'assure facilement, d'ailleurs, que les points P et P'' sont, en projection horizontale, symétriques par rapport à la droite CD et que, par suite, les projections horizontales des rayons incident et émergent se rencontrent sur la projection de CD.

Considérons maintenant une dimension PR de l'objet, horizontale et normale au rayon incident PI. Les projections horizontales P'R', P''R'', des images successives résultent immédiatement de la symétrie de ces images dans les deux miroirs.

On voit, en résumé, que l'image P'Q'R'' est, par rapport à l'objet PQR, renversée dans tous les sens, telle que le serait une image réelle fournie par une lentille convergente. Il en résulte que, disposé devant l'objectif d'une lunette astronomique, le prisme aura pour effet de redresser l'image objective ; le même appareil est employé de même pour redresser les images fournies par les appareils de projection.

Pour tenir compte des réfractions dans les faces d'entrée et de sortie, il suffit d'imaginer que, dans ce qui précède, PQR désigne l'image par réfraction fournie par la première face, et que P'Q'R'' donne encore, par réfraction, une image dans la face de sortie.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1896)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Mathématiques (*Suite*).

158. — Étant donnée une équation entière $f(x) = 0$, voir si deux racines ont entre elles un rapport commensurable; voir si toutes les racines sont deux à deux dans un rapport commensurable.

159. — Nombre des racines réelles de l'équation

$$2x^n \cos \alpha - 2x^{n-1} + 4x - 3 = 0.$$

160. — Trouver un plan normal à une surface du second ordre en tous ses points de rencontre avec elle; même question pour une surface du troisième ordre.

161. — On donne $\operatorname{tg} \alpha$; calculer le produit

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{m} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \pi}{m} \ldots \operatorname{tg} \frac{\alpha + (m-1)\pi}{m}.$$

162. — On donne une cubique et un point d'inflexion réel A; lieu des conjugués harmoniques du point A par rapport aux points B et C d'intersection de la cubique avec une sécante passant en A. Montrer que par une perspective réelle on peut projeter la cubique de façon que l'axe des x soit le diamètre conjugué de l'axe des y et que la courbe n'ait pas d'asymptote réelle à distance finie. Chercher les points d'inflexion des cubiques ainsi obtenues, en déduire que les points d'inflexion d'une cubique sont trois à trois en ligne droite.

163. — Montrer qu'il n'existe aucune relation identique entière entre x et e^x, entre x et $\sin x$.

164. — Si deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, d'ordre n ont en commun une section par le plan $P = 0$, on a identiquement, pour une certaine valeur de λ, $f + \lambda\varphi \equiv P.Q$, Q étant un polynome entier de degré $n - 1$.

165. — Si l'on résout l'équation du second degré $Ax^2 + 2Bxy + \ldots + F = 0$ par rapport à y, on a toujours l'équation différentielle $\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]'' = 0$ et réciproquement. Cas où $B^2 - AC = 0$.

166. — Diviser $1 - x^2$ par $1 - 2x \cos \theta + x^2$.
On trouve une série. — Dans quel cas représente-t-elle la fraction? — Cas de $x > 1$.

167. — Nombre des racines réelles de l'équation

$$1 + 2x \cos \theta + \ldots + 2x^n \cos n\theta = 0.$$

Démontrer qu'elle a au moins $n - 3$ racines imaginaires.

168. — Équation tangentielle d'une quadrique. — Réciproquement, le plan est-il tangent? — Cas du cône.

169. — On donne l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

et le plan $$Ax + By + Cz + D = 0;$$

Voir si le plan est normal à l'ellipsoïde et en combien de points.

Soient M, M′ ces deux points; — on considère le plan mené par MM′ et perpendiculaire au plan donné. — Qu'est la droite MM′ par rapport à la section? (axe). — Énoncer la réciproque.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit axe est que les deux normales en M et M′ se rencontrent. — Démontrer que MM′ est perpendiculaire à sa conjuguée.

Réciproquement si deux droites conjuguées sont rectangulaires les normales se rencontrent.

170. — Théorème des forces vives.

171. — Formule d'approximation de Newton.

172. — On donne un parallélépipède; on considère les arêtes qui n'aboutissent pas à deux sommets opposés B et H. Démontrer que ces six droites sont sur un même hyperboloïde. — Centre. — Déterminer le cône asymptote.

173. — Racines primitives d'une équation binome.

Physique.

174. — Lois de la chute des corps. — Machines d'Atwood et de Morin.

175. — Sphéromètre. — Précision du sphéromètre. — Quelles peuvent être les imperfections de la vis ?

176. — Lois de la réfraction. — Mesure des indices par le goniomètre de Babinet.

177. — Mesure des indices par la méthode de la réflexion totale.

178. — Thermomètre à mercure de précision.

179. — Expérience des prismes croisés.

180. — Méthode de Cornu pour la mesure des éléments d'un système optique.

181. — Méthode de Foucault pour rendre les miroirs circulaires et paraboliques.

182. — Lois de la chute des corps. — Faire le calcul de la machine d'Atwood en tenant compte de la masse de la poulie.

183. — Déduire la formule de la réfraction du temps minimum que met la lumière pour aller d'un point à un autre.

184. — Niveau à bulle d'air. — Réglage.

185. — Mesure de la chaleur spécifique d'un corps solide. — Méthode des mélanges. — Corrections.

186. — Formules du prisme. — Condition d'émergence. — Minimum de déviation.

187. — Dilatation linéaire des solides. — Méthode de Roy et Ramsden. — Méthode de Laplace.

188. — Loi de Jurin.

189. — Calorimètre de Bunsen. — Méthode du refroidissement.

QUESTIONS PROPOSÉES

649. — Lorsque dans une équation entière à coefficients réels, quatre coefficients de termes consécutifs, ax^k, bx^{k-1}, cx^{k-2}, dx^{k-3} vérifient l'inégalité $(b^2-ac)(bd-c^2)>0$, l'équation admet au moins deux racines imaginaires.

J. Amar, élève de mathématiques spéciales au collège Rollin.

650. — Lorsque dans une équation entière à coefficients réels, quatre coefficients de termes consécutifs, ax^k, bx^{k-1}, cx^{k-2}, dx^{k-3}, vérifient l'inégalité $(bc-ad)^2-4(ac-b^2)(bd-c^2)>0$, l'équation admet au moins deux racines imaginaires.

J. Amar.

Ce second théorème renferme les théorèmes de l'Abbé de Gua et de M. Hermite (*).

J. Amar.

(*) Ces théorèmes, trouvés par M. J. Amar, ont déjà été énoncés sous d'autres formes par Newton et Calalan ; mais les démonstrations de M. Amar sont particulièrement simples et nous serons heureux de les publier quand les lecteurs de la *Revue* auront eu le temps d'étudier ces questions et d'envoyer eux-mêmes leurs propres démonstrations.

651. — On donne un cercle (C) et une droite (D), puis on considère un point M variable sur le cercle (C) et la tangente en ce point ; on prend la symétrique, Δ, de la droite (D) par rapport à cette tangente, et on demande :

1° L'enveloppe de la droite Δ ;

2° Le lieu des projections du point M sur la droite Δ.

Construire les courbes ainsi trouvées. Généraliser la question. X. Antomari.

652. — On considère trois coniques S, S' et Σ ayant un foyer commun F ; la conique Σ varie en restant tangente aux coniques S et S' qui sont fixes ; soient A et A' les points de contact. On demande :

1° L'enveloppe de la directrice D de Σ qui correspond au foyer F, et le lieu du point de rencontre de D avec chacune des tangentes en A et A' à la conique Σ ;

2° De démontrer que la droite AA' passe par un point fixe ;

3° De trouver le lieu du pôle de cette droite par rapport à la conique Σ.

E. Limes, lycée Louis-le-Grand.

653. — Trouver l'enveloppe des asymptotes et l'enveloppe des axes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle. E. Limes, lycée Louis-le-Grand.

654. — On suppose que, dans l'appareil employé par Regnault pour étudier la dilatation des gaz à volume constant, le gaz, au lieu d'être sec, soit au contact d'une petite quantité d'eau. Comment devra-t-on écrire l'équation qui permettra de calculer le coefficient de dilatation du gaz ?

Quelle sera la différence entre les poids d'eau subsistant à l'état liquide dans les deux opérations à 0° et à T° ?

Quelle valeur trouverait-on pour le coefficient de dilatation si on le calculait sans tenir compte de l'eau, les données numériques étant les suivantes : Espace nuisible : négligeable, — T = 100°, — pression atmosphérique, 760^{mm}, — tension maxima de la vapeur d'eau à 0°, $4^{mm},6$, — tension maxima à la température ambiante, $12^{mm},7$, — coefficient de dilatation linéaire du verre, 0,000008, — coefficient de dilatation exact du gaz, 0,003665.

655. — Étant donnée une capacité V contenant un gaz à la pression p_0 et la pression atmosphérique étant P, calculer le travail nécessaire 1° pour y faire le vide, 2° pour y réduire la pression à une valeur donnée p. Cas particulier : $P = p_0$.

On supposera la loi de Mariotte applicable.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1896, 2e session)

Géométrie analytique.

585. — *On donne l'angle droit xOy et les points A sur Ox, B sur Ox, tels que* $OA = OB = a$.

Problème I. — 1° *Écrire l'équation générale des coniques S circonscrites au triangle AOB et tangentes en A à la parallèle Ay' à Oy.*

Trouver le lieu de leur centre.

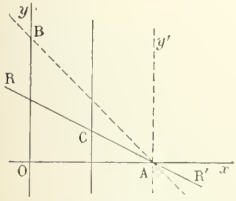
2° *Par chaque point du plan passe une conique S : séparer les régions du plan pour lesquelles l'espèce de cette conique reste la même. Construire graphiquement les points communs à une droite arbitraire OZ et à la ligne qui sépare ces régions : tangentes en ces points.*

Problème II. — 1° *Former l'équation générale des paraboles S' passant par les points A, B et dont l'axe contient le point O.*

2° *Trouver le lieu géométrique des points* M *par lesquels passent deux paraboles* S′ *ayant leurs axes rectangulaires. Prouver que la droite* AB′, *symétrique de* AB *par rapport au point* O, *doit faire partie du lieu.*

3° *Lieu des sommets des paraboles* S′; *ce lieu se compose d'une droite et d'une courbe qu'on propose de tracer (on pourra s'aider d'un changement de direction des axes de coordonnées). Vérifier que cette courbe présente une inflexion en chacun des points* A, B.

I. — 1° L'équation générale des coniques circonscrites au triangle AOB et tangentes en A à la droite Ay' est de la forme



$$x(x-a)+\lambda y(x+y-a)=0.$$

Le centre est le point de rencontre des deux droites

$$f'_x = 2x-a+\lambda y = 0,$$
$$f'_y = \lambda(x+2y-a) = 0.$$

Pour $\lambda \neq 0$, les coordonnées du centre vérifient, quel que soit λ, l'équation

$$x+2y-a=0;$$

le lieu du centre est la droite qui joint le point A au milieu de la corde OB (diamètre conjugué des cordes parallèles à Oy). Pour $\lambda = 0$, le centre est un point quelconque de la droite

$$2x-a=0;$$

la conique se réduit à un système de deux droites parallèles Oy et Ay'; elle admet une ligne de centres.

Il est facile de distinguer sur le premier lieu les centres d'ellipses des centres d'hyperboles. Pour cela il suffit de calculer δ en fonction des coordonnées d'un point du lieu et d'étudier son signe. On a

$$\delta = \lambda - \frac{\lambda^2}{4}, \qquad \lambda = -\frac{2x-a}{y},$$

d'où

$$\delta = -\frac{(2x-a)(2x+4y-a)}{4y^2},$$

et, en remarquant que pour tout point du lieu $x+2y=a$,

$$\delta = -\frac{a(2x-a)}{4y^2};$$

on aura des centres d'ellipses pour $x < \frac{a}{2}$ c'est-à-dire sur la demi-droite CR et des centres d'hyperboles pour $x > \frac{a}{2}$ c'est-à-dire sur la demi-droite CR′.

2° L'équation générale contenant le paramètre λ au premier degré, par un point donné M du plan passera une seule conique S. Soient x, y les coordonnées du point M, la valeur correspondante de λ sera

$$\lambda = -\frac{x(x-a)}{y(x+y-a)}.$$

Le genre de la conique S dépendra du signe de

$$\delta = \lambda - \frac{\lambda^2}{4} = -\frac{x(x-a)[x(x-a)+4y(x+y-a)]}{4y^2(x+y-a)^2};$$

δ s'annule pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = 4$.

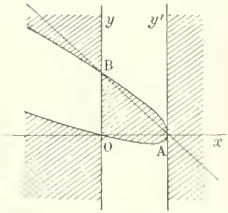
$\lambda = 0$. — On a $x(x-a)=0$, le point M est situé sur l'une ou l'autre des deux droites parallèles Oy et Ay' et la conique S se réduit à ces deux droites (genre parabole).

$\lambda = 1$. — On a $x(x-a) + 4y(x+y-a) = 0$, le point M est situé sur la parabole P qui passe par les trois points O, A, B et est tangente en A à la droite Ay'. La conique S se réduit à cette parabole.

Enfin on aura une ellipse ou une hyperbole suivant que δ sera $\gtrless 0$, c'est-à-dire suivant que l'on aura

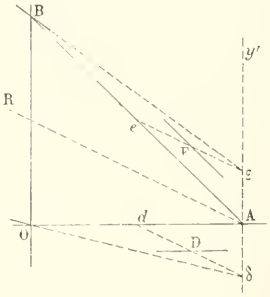
$$x(x-a)\,[x(x-a) + 4y(x+y-a)] \lessgtr 0.$$

La séparation du plan en régions est faite par la parabole P et les deux droites parallèles Oy, Ay'. Les régions couvertes de hachures sont celles où doit se trouver le point M pour que la conique S soit du genre hyperbole.



On peut chercher les valeurs de λ pour lesquelles la conique S se réduit à un système de deux droites. Ces valeurs sont données en général par une équation du 3e degré (équation en λ) qui admettra, dans le cas actuel, $\lambda = 0$ comme racine simple et $\lambda = \infty$ comme racine double. A $\lambda = 0$ correspondent les deux droites parallèles Oy et Ay'; à λ infini les deux droites OA et AB (droites concourantes, genre hyperbole). — Pour tout point M pris sur l'une de ces droites, la conique S se réduit à un système de deux droites.

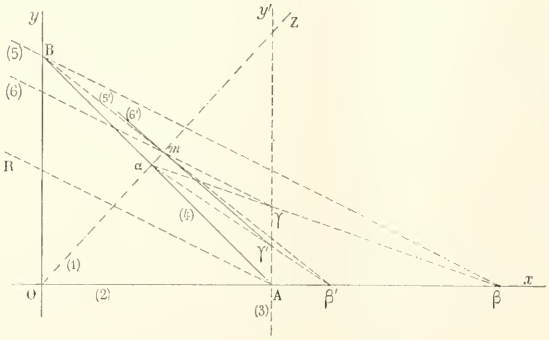
La parabole P est définie par quatre conditions : elle passe par les trois points O, A, B et admet pour tangente en A la droite Ay'. La droite AR qui joint le point A au milieu de OB donne la direction des diamètres.



Soient d, e les milieux des côtés OA et AB du triangle donné, $d\delta$, $e\varepsilon$ les diamètres passant par ces points, δ et ε sont les pôles des droites OA et AB. Par suite δO et εB sont les tangentes à la parabole P aux deux points O et B. Soient D, E les milieux des segments δd, εe ; ces points sont situés sur la parabole et les tangentes en ces points sont respectivement parallèles à OA, AB.

Pour déterminer le second point de rencontre de la parabole P avec une droite quelconque OZ menée par l'origine, on appliquera le théorème de Pascal, en considérant P comme une conique définie par cinq points, savoir, le point O, deux points confondus en A sur la droite Ay', le point B et un point rejeté à l'infini dans la direction AR.

Les droites 1, 2, 3, 4, 5 sont les cinq premiers côtés d'un hexagone de Pascal. Prenons les points de rencontre α, β des côtés 1 et 4, 2 et 5. La droite $\alpha\beta$ rencontre le côté 3 en un point γ qui appartient au côté 6. En menant par le point γ la parallèle à AR et prenant l'intersection avec OZ, on aura le point cherché m. — Pour construire la tangente en ce point, on la considérera comme le sixième côté d'un hexagone dont les cinq premiers côtés sont 1, 2, 3, 4, 5′ (5′ étant la droite Bm). Prenons encore les points de rencontre de 1 et 4, 2 et 5′. Ce sont les points α et β' ; la droite $\alpha\beta'$ rencontre le côté 3 au point γ' ; $\gamma' m$ est la tangente cherchée.



II. — 1° Soit $y - mx = 0$ l'équation de l'axe; l'équation de la tangente au sommet sera de la forme

$$x + my + h = 0,$$

et l'équation de la parabole

$$(y - mx)^2 + 2\lambda(x + my + h) = 0;$$

on déterminera λ et h en exprimant que cette parabole passe par les deux points A et B. On obtient ainsi les deux conditions

$$(1) \qquad m^2a^2 + 2\lambda(a + h) = 0,$$

$$(2) \qquad a^2 + 2\lambda(ma + h) = 0.$$

Retranchant membre à membre, il vient

$$(3) \qquad (m^2 - 1)a^2 - 2\lambda(1 - m)a = 0,$$

qui se décompose en

$$m - 1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad m = 1 \qquad \text{et} \qquad 2\lambda = -\frac{a^2}{a + h};$$

$$(m + 1)a^2 - 2\lambda a = 0, \qquad \text{d'où} \qquad 2\lambda = a(m + 1) \qquad \text{et} \qquad h = -\frac{a(m^2 + m + 1)}{m + 1}$$

Il y a donc deux séries de paraboles répondant à la question, savoir

$$(S_1) \qquad (y - x)^2 - \frac{a^2}{a + h}(x + y + h) = 0.$$

$$(S_2) \qquad (y - mx)^2 + a(1 + m)(x + my) - a^2(m^2 + m + 1) = 0.$$

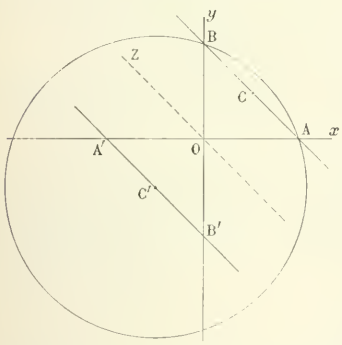
2° Par un point M du plan passe une parabole S_1 dont l'axe a pour coefficient angulaire 1. S'il passe par ce point une autre parabole d'axe perpendiculaire, ce sera une parabole S_2 dont l'axe aura pour coefficient angulaire $m = -1$. Ecrivons que par le point (x, y) passe une parabole S_2 telle que $m = -1$; nous aurons l'équation de la première partie du lieu

$$(y + x)^2 - a^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$x + y \pm a = 0,$$

qui représente les deux droites AB et A'B'.



Ce résultat était facile à prévoir. La parabole S_2 a pour axe la droite OZ parallèle à AB. Elle rencontre la droite AB en deux points à distance finie A et B par suite la contient tout entière et se décompose en AB et sa symétrique A'B' par rapport à OZ. Inversement si l'on prend le point M sur l'une de ces deux droites, l'une des deux paraboles S_2 qui passent par ce point se compose des deux droites AB et A'B' et par suite a son axe perpendiculaire à celui de la parabole S_1 qui passe par le point M.

On remarquera que lorsque le point M est situé sur la droite AB, la parabole S_1 se réduit à la droite AB elle-même.

Considérons maintenant la parabole S_2. Par un point du plan passent deux de ces paraboles, dont les axes ont pour coefficients angulaires les racines de l'équation

$$m^2(x^2 + ay - a^2) - m(2xy - ax - ay - a^2) + y^2 + ax - a^2 = 0.$$

La condition pour que ces axes soient rectangulaires, c'est que l'on ait

$$\frac{y^2 + ax - a^2}{x^2 + ay - a^2} = -1,$$

$$x^2 + y^2 + a(x + y) - 2a^2 = 0.$$

Cette équation représente un cercle ayant son centre au milieu C′ de A′B′ et passant par les points A et B. C'est la seconde partie du lieu.

3° Les paraboles S_1 ayant pour axe la droite $y - x = 0$, cette droite est le lieu des sommets des paraboles S_1. Pour les paraboles S_2 le sommet est le point d'intersection de l'axe

$$y - mx = 0$$

et de la tangente au sommet

$$(1 + m)(x + my) - a(m^2 + m + 1) = 0\,;$$

on aura l'équation du lieu en éliminant m entre ces deux équations, ce qui donne

$$(x + y)(x^2 + y^2) - a(x^2 + xy + y^2) = 0.$$

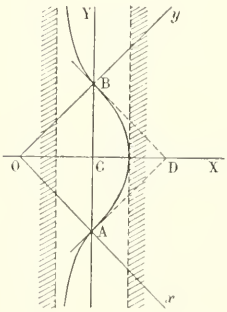
Le lieu est une courbe du 3e degré, présentant un point double isolé à l'origine. Elle admet une direction asymptotique simple

$$x + y = 0,$$

et de plus elle est symétrique par rapport à la première bissectrice (l'équation ne change pas quand on change x en y et y en x). Toute parallèle à la seconde bissectrice coupera donc la courbe en deux points symétriques l'un de l'autre par rapport à la première, de sorte qu'en prenant les deux bissectrices pour axes de coordonnées, on obtiendra une équation qui ne contient y qu'au second degré.

En faisant cette transformation, puis portant l'origine au point C, milieu de AB, il vient après avoir posé $\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{4}$,

$$Y = \pm(X + 2\alpha)\sqrt{\frac{\alpha - X}{\alpha + X}}.$$



Y n'est réel que si X varie entre $-\alpha$ et $+\alpha$. Pour construire la courbe, prenons le signe $+$ dans l'expression de Y. Nous aurons

$$Y = (X + 2\alpha)\sqrt{\frac{\alpha - X}{\alpha + X}},$$

$$Y' = \frac{X^2 + \alpha X + \alpha^2}{X^2 - \alpha^2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha - X}{\alpha + X}},$$

$$Y'' = -\frac{3\alpha^2 X}{(X^2 - \alpha^2)^2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha - X}{\alpha + X}}\,;$$

Y′ est constamment négatif, X croissant de $-\alpha$ à $+\alpha$, Y décroît de $+\infty$ à 0.

Pour $X = 0$ $Y = 2\alpha$ $Y' = -1$ $Y'' = 0$.

On obtient une branche de courbe qui passe par le point B et présente en ce point une inflexion, la tangente d'inflexion étant la droite BD parallèle à OA. La branche symétrique passe par le point A (point d'inflexion) et y est tangente à la droite DA parallèle à OB. La courbe présente la disposition ci-dessus.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

592. — *Lieu des points d'où l'on peut mener deux normales rectangulaires à une conique : examiner en particulier le cas de la parabole.*

(*École des Ponts et Chaussées, Cours préparatoires, 1896.*)

1. Cas de l'ellipse. — Soit (x, y) un point du plan. L'équation aux coefficients angulaires des normales menées de ce point à l'ellipse est

$$(a^2 + b^2m^2)(y - mx)^2 - c^4m^2 = 0,$$

ou

$$b^2x^2m^4 - 2b^2xy.m^3 + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)m^2 - 2a^2xy\,m + a^2y^2 = 0.$$

En exprimant que cette équation admet deux racines dont le produit est égal à -1, on obtient l'équation du lieu

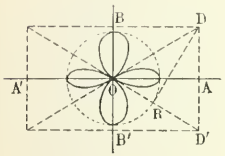
$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)(b^2x^2 + a^2y^2)^2 - c^4(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = 0;$$

c'est une courbe du 6e degré admettant les axes de l'ellipse comme axes de symétrie ; elle est tout entière à distance finie et présente à l'origine un point quadruple. Les tangentes à l'origine sont données par l'équation

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0;$$

ce sont les diagonales du rectangle construit sur les axes de symétrie de l'ellipse. Pour discuter la courbe, on peut prendre l'équation en coordonnées polaires

$$\rho = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{b^2 \cos^2 \omega - a^2 \sin^2 \omega}{b^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin^2 \omega} = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \omega}.$$



$\operatorname{tg} \omega$ variant de 0 à $+\infty$, la fraction

$$\frac{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \omega}$$

décroît constamment de $+1$ à -1 $\left(\text{elle s'annule pour } \operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a}\right)$.

ρ décroît donc constamment de $\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ à $-\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, en sorte que la courbe est située tout entière à l'intérieur d'un cercle décrit de O comme centre avec un rayon

$$R = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pour construire ce rayon posons

$$a = d \cos \varphi, \qquad b = d \sin \varphi, \qquad (\varphi = \widehat{DOA})$$

$$R = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{d^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{d} = d \cos 2\varphi, \qquad (2\varphi = \widehat{DOD'}),$$

R est donc égal à la projection de OD sur OD'.

2. Cas de l'hyperbole. — On passe du cas de l'ellipse au cas de l'hyperbole en changeant b^2 en $-b^2$. Le lieu a pour équation

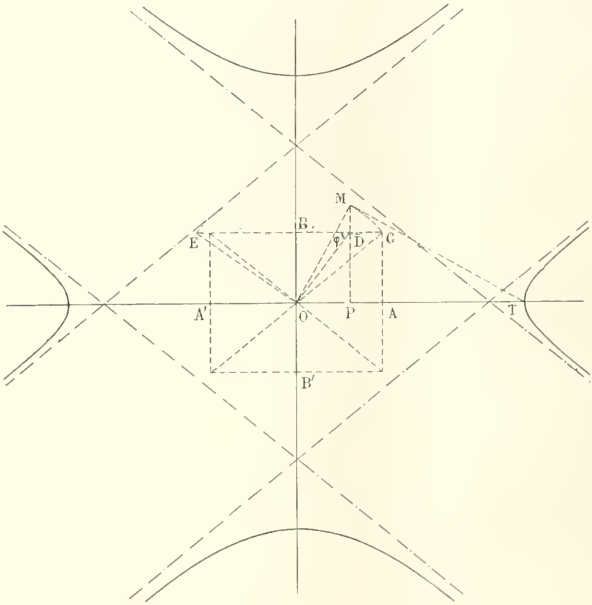
$$(a^2 - b^2)(x^2 + y^2)(b^2x^2 - a^2y^2)^2 - c^4(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = 0;$$

c'est une courbe du sixième degré admettant les axes de l'hyperbole comme axes de symétrie et qui n'est réelle que pour $a^2 > b^2$. Ses points à l'infini sont les mêmes que ceux de l'hyperbole et l'origine est un point quadruple isolé.

L'équation du lieu en coordonnées polaires est

$$\rho = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \omega}.$$

$\operatorname{tg}\omega$ variant de 0 à $\frac{b}{a}$ et à $+\infty$ la fraction $\frac{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \omega}$ croît constamment de 1 à $+\infty$ puis de $-\infty$ à -1. ρ croît constamment de $\frac{c^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ à $+\infty$, puis de $-\infty$ à $-\frac{c^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, en sorte que la courbe est tout entière à l'extérieur d'un cercle décrit de O comme centre avec $\frac{c^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ comme rayon. La distance de l'origine à l'asymptote dont la direction est donnée par $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ est $h = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.



La figure indique la construction du rayon $R = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. Dans le triangle rectangle OMT

$$OP = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad OM = c,$$

par suite $R = OT$.

Pour construire les asymptotes, il faut construire

$$|h| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{ab}{OP} = \frac{OD.OB}{BD}.$$

Soit φ l'angle DOA = ODB, on a $|h| = OD \,.\, \operatorname{tg}\varphi$.

$|h|$ est donc le côté OE opposé à l'angle φ dans le triangle rectangle DOE. On décrira un cercle de O comme centre avec OE comme rayon. Les asymptotes sont les tangentes menées à ce cercle parallèlement aux asymptotes de l'hyperbole.

3. Cas de la parabole. — L'équation de la normale en fonction de son coefficient angulaire est

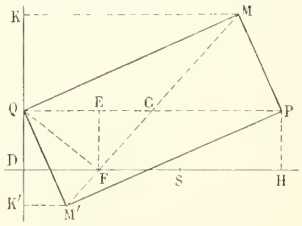
$$y = mx - pm - \frac{pm^3}{2}.$$

L'équation aux coefficients angulaires des normales menées du point (x, y) est donc

$$pm^3 - 2(x - p)m + 2y = 0.$$

En exprimant que deux des racines de cette équation ont pour produit -1, on obtient l'équation du lieu

$$4y^2 - 2px + 3p^2 = 0.$$



C'est une parabole ayant même axe que la proposée; son paramètre est égal à $\frac{p}{4}$ et son sommet est le point S d'abscisse $x = \frac{3p}{2}$.

Il est facile d'établir ce résultat géométriquement. Soit P un point du lieu, PM, PM' les deux normales rectangulaires; les tangentes en M et M' sont également rectangulaires et se coupent en Q sur la directrice. La corde MM' passe par le foyer et QF est perpendiculaire à MM'.

De plus la parallèle à l'axe menée par le point Q passe par le milieu C de MM'. C'est la seconde diagonale du rectangle PMQM'. Cela posé, on a

$$FE^2 = QE.EC = p(QC - p) = p \cdot \frac{QP - 2p}{2};$$

soit

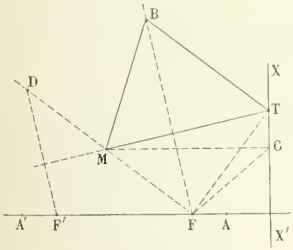
$$DS = 2p, \qquad FE^2 = PH^2 = \frac{p}{2} \cdot SH.$$

Le lieu du point P est donc une parabole de sommet S et dont le paramètre est égal à $\frac{p}{4}$.

Ont résolu la question : MM. Barré, à Valenciennes ; Gauthier, pensionnat de Vaibenoite, à Saint-Etienne ; J. Lhériaud (lycée de Toulouse) ; Pégorier, à Cette, qui a donné une solution géométrique dans le cas de la parabole.

GÉOMÉTRIE

594. — *Une ellipse est déterminée par son axe* AA' *et ses deux foyers* F *et* F' ; *on donne en outre sur la directrice relative au foyer* F *un point* T. *On demande de construire un triangle ayant pour base la portion de tangente* TM *comprise entre le point* T *et le point de contact avec l'ellipse de l'une des tangentes issues du point* T, *sachant en outre que la hauteur passe au point* F *et que l'angle que fait le côté issu du point* T *avec la base est égal à l'angle que fait la directrice avec* FC, C *désignant la projection du point* M *sur la directrice.* (*On ne construira ni la courbe, ni la parallèle à l'axe menée par le point* M.)



La portion de tangente TM comprise entre le point T et le point de contact est vue du foyer F sous un angle droit ; la construction du point M est donc aisée : on élève en F une perpendiculaire à FT ; sur cette droite, on prend FD = AA', et du point T on abaisse une perpendiculaire sur F'D.

Le sommet B est situé sur la perpendiculaire abaissée de F sur TM ; d'autre part, l'angle MTB est égal à l'angle FCX', et, puisque le quadrilatère MTCF est inscriptible, ce dernier angle est égal à TMF. On aura donc le point B en menant par le point T une parallèle à FD.

Il est clair que l'on eût pu se dispenser de tracer la droite MC, ainsi que la droite FC, et que ces droites n'interviennent pas dans la construction proprement dite.

Le problème admet une autre solution symétrique de la précédente par rapport à TM, puis deux solutions relatives à la seconde tangente menée du point T.

A. BARBIER.

Bonne solution : M. Primet (lycée Saint-Louis).

QUESTIONS PROPOSÉES

656. — On considère un triangle fixe ABC et deux cercles variables passant respectivement en A et B, puis en A et C et tangents en A, et l'on demande les lieux des milieux des tangentes communes autres que la tangente en A.

G. Pouilliart.

657. — On donne une parabole P et un point fixe A ; par ce point on mène une droite quelconque D et l'on considère l'hyperbole équilatère H ayant pour asymptote la droite D et la perpendiculaire abaissée du foyer sur cette droite.

On demande les lieux du centre, des sommets, des foyers de l'hyperbole H, et le lieu du point de rencontre de deux sécantes communes à la parabole P et à l'hyperbole H.

G. Pouilliart.

658. — Dans un cercle fixe, on considère un rayon fixe OA et un rayon variable OM ; le point M se projette en P sur OA et on demande de trouver :

1° Le lieu du centre de gravité du triangle OMP ;

2° Les lieux des centres des cercles inscrits dans ce triangle.

E. N. Barisien.

659. — La tangente en un point M d'une parabole rencontre l'axe de cette courbe en un point M' ; soit F' le symétrique du foyer F par rapport à la droite MM'.

On demande de trouver et de construire les lieux des centres des cercles circonscrits aux triangles MFF' M'FF', MM'F et MM'F'.

E. N. Barisien.

660. — On considère deux cercles fixes C et C'. Par le centre de C' on mène un diamètre variable qui dépend d'un paramètre arbitraire λ ; soit D_λ cette droite. On considère, en outre, tous les cercles qui passent par l'intersection de C' et de D_λ ; ces cercles contiennent un nouveau paramètre variable μ ; soit C_μ^λ un d'eux.

1° Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de C sur l'axe radical des cercles C_μ^λ et C, quand μ varie seul.

2° Trouver les coordonnées des points de contact des cercles C_μ^λ et C, quand μ prend des valeurs particulières, λ restant fixe, et l'équation de la droite, $\Delta_\lambda = 0$, qui joint ces points. Montrer que cette droite passe par un point fixe, quand λ varie.

3° Lieu du point de rencontre de D_λ et de Δ_λ, quand λ varie. Ce lieu est une conique. Dans quels cas est-elle un cercle ou une hyperbole équilatère ?

E. H.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

7e Année N° 10. Juillet 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR UNE CORRESPONDANCE ENTRE LES DROITES DE L'ESPACE ET LES CERCLES D'UN PLAN

par **X. Antomari**, Professeur de mathématiques spéciales au lycée Carnot.

L'équation d'un cercle en coordonnées rectangulaires peut se mettre sous la forme

$$(\gamma + i\delta)(x^2 + y^2) + 2\alpha x + 2\beta y - (\gamma - i\delta) = 0.$$

Si l'on pose

$$x = x_1, \qquad y = x_2,$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) = x_3, \qquad \frac{i}{2}(x^2 + y^2 + 1) = x_4,$$

elle devient

$$(1) \qquad \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 = 0.$$

Entre les variables x_1, x_2, x_3, x_4 on a d'ailleurs la relation

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

de sorte qu'on peut représenter une circonférence par une équation (1) linéaire par rapport à quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 liées par la relation (2). Si l'on considère les quantités x_1, x_2, x_3, x_4 comme les coordonnées d'un point de l'espace, ce mode de représentation d'une circonférence équivaut évidemment à considérer cette ligne comme la section faite par le plan (1) dans la quadrique (2) rapportée à un tétraèdre conjugué.

Pour plus de symétrie dans la notation écrivons l'équation du cercle sous la forme

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$

avec la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

et appelons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les coordonnées homogènes du cercle considéré. Au moyen de ces quantités les formules que l'on rencontre dans la géométrie analytique du cercle prennent des formes remarquables que nous allons donner brièvement en laissant au lecteur le soin de faire les rapprochements qu'elles comportent.

Si l'on désigne par R le rayon du cercle, on a tout d'abord

$$R^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}{(\alpha_3 + i\alpha_4)^2};$$

d'où il suit qu'un cercle de rayon nul est caractérisé par la condition

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 0,$$

qui a lieu entre ses coordonnées et qui exprime que le cercle est la section faite dans la quadrique (2) par un plan tangent.

Si on considère deux cercles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, un calcul simple montre que la condition de contact de ces deux cercles se met sous la forme

$$\Sigma(\alpha_i\beta_j - \beta_i\alpha_j)^2 = 0,$$

les indices i et j pouvant prendre toutes les valeurs 1, 2, 3, 4.

Par un calcul tout aussi simple, on voit de même que si l'on appelle V l'angle des deux cercles, on a

$$\cos V = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2)}},$$

d'où il suit que la condition d'orthogonalité est

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 = 0,$$

et qu'elle exprime que les deux plans

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 = 0$$

sont conjugués par rapport à la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Nous nous arrêterons là dans l'énumération très facile de ces relations pour passer à un ordre d'idées qui est précisément celui que nous nous proposons de développer dans cette note.

Considérons un système de deux cercles représentés par les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 = 0, \end{cases}$$

les variables x étant liées par la relation (2).

Si l'on fait abstraction de l'équation (2), et si l'on considère les lettres x comme les coordonnées d'un point de l'espace, les équations (3) représentent une droite. Si, au contraire, on tient compte de l'équation (2), elles représentent un couple de points déterminés par l'intersection des deux cercles.

On peut donc considérer l'équation (2) comme établissant une correspondance entre les droites de l'espace et les couples de points dans un plan. A un autre point de vue on voit que le couple de points qui correspond à une droite n'est autre chose que l'ensemble des deux points de rencontre de la droite avec la quadrique représentée par l'équation (2). Il en résulte, en particulier, qu'à deux droites qui se coupent, c'est-à-dire à deux droites situées dans le même plan, il correspond deux couples de points situés sur la même section plane de la quadrique (2) si on les considère comme points de l'espace, et situés sur le même cercle si on les considère comme points d'un plan.

Cette correspondance ou, plutôt, cette double manière d'envisager un couple de points permet de transporter immédiatement aux systèmes de cercles certains problèmes relatifs aux systèmes de droites. En voici quelques exemples :

I. — Deux droites quelconques étant données dans l'espace, il existe une infinité de droites les rencontrant. Il en résulte que deux couples de points (A, B) et (C, D) étant donnés, il existe une infinité de couples de points (P, Q) tels que les deux quadrilatères ABPQ et CDPQ soient inscriptibles. Pour fixer la position d'une droite qui s'appuie sur deux droites données, on peut l'assujettir à être dans un plan donné; pareillement pour fixer la position du couple de points (P, Q), on peut l'assujettir à être

sur un cercle donné. On est ainsi conduit à un problème de géométrie élémentaire, et l'on voit facilement le moyen d'en imaginer d'autres en assujettissant le couple de points (P, Q) à une autre condition.

II. — Lorsque trois droites ne sont pas situées deux à deux dans le même plan, il existe une infinité de droites qui les rencontrent. Il en résulte que si trois couples de points d'un plan ne sont pas deux à deux sur la même circonférence, il existe une infinité de couples de points situés sur la même circonférence avec chacune des trois autres. Pour définir une droite s'appuyant sur trois droites données, on peut l'assujettir à être dans un plan passant par l'une d'elles; pareillement, étant donnés trois couples de points (A, B), (C, D), (E, F), pour définir un couple de points (P, Q) tels que les quadrilatères (ABPQ), (CDPQ), (EFPQ) soient inscriptibles, on peut l'assujettir à être situé sur un cercle donné.

III. — Quatre droites étant données d'une manière quelconque dans l'espace, il existe en général deux droites qui les rencontrent. Il en résulte que si on donne dans un plan quatre couples de points (A, B), (C, D), (E, F), (G, H), il existe en général deux couples de points (P, Q) tels que les quadrilatères ABPQ, CDPQ, EFPQ, GHPQ soient inscriptibles.

Pour terminer nous engageons le lecteur à chercher directement les solutions de ces divers problèmes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

597. — *On considère le cercle* (C) *décrit sur une corde variable* AB *d'une parabole* (P) *comme diamètre et tangent à la parabole* (P) *en un point* M, *et on demande de trouver :*

1° *Le lieu du centre de* (C) *et l'enveloppe de* AB;

2° *Le lieu des points de rencontre des tangentes communes à* (C) *et à* (P);

3° *Le lieu du point de rencontre de* AB *et de la tangente en* M;

4° *L'enveloppe du cercle* (C).

Prenons pour axes l'axe de la parabole et la tangente au sommet et désignons par $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole, par α et β les coordonnées du point M. Alors la tangente en M à la parabole a pour équation

$$px - \beta y + p\alpha = 0,$$

et la seconde corde commune au cercle et à la parabole,

$$px + \beta y + \mu = 0,$$

puisqu'elle fait avec Ox le même angle en sens contraire que la droite précédente. Le cercle cherché a donc pour équation

$$\lambda(y^2 - 2px) + (px - \beta y + p\alpha)(px + \beta y + \mu) = 0,$$

λ étant déterminé de façon que cette conique soit un cercle et μ de façon que le centre du cercle soit sur la seconde corde commune, AB; nous trouvons ainsi

$$\lambda = \beta^2 + p^2, \qquad \mu = p\alpha - 2p^2.$$

La corde AB est alors représentée par

$$(1) \qquad px + \beta y + p\alpha - 2p^2 = 0,$$

et le cercle, par

$$(2) \qquad p(x^2 + y^2) - 2(2p^2 + \beta^2 - p\alpha)x + 2p\beta y + \alpha(p\alpha - 2p^2) = 0.$$

1. Les coordonnées du centre de ce cercle sont données par

$$x = \frac{2p^2 + \beta^2 - p\alpha}{p}, \qquad y = -\beta,$$

et le lieu de ce point s'obtient en éliminant α et β entre ces deux équations et l'équation $\beta^2 - 2p\alpha = 0$ qui exprime que le point M est sur la parabole. On trouve ainsi, sans peine,

$$y^2 = 2p(x - 2p). \tag{3}$$

Cette équation représente une parabole égale à la proposée, à laquelle on a fait subir une translation parallèle à Ox et d'amplitude $2p$.

Il est facile de voir que la droite AB est tangente à cette courbe au point $(\alpha + 2p, \ -\beta)$; elle a donc pour enveloppe la parabole (3). Ce résultat s'obtient d'ailleurs très facilement par le procédé habituel.

2. Remplaçons dans l'équation de la tangente en M et dans l'équation (2) α par $\frac{\beta^2}{2p}$, nous aurons

$$px - \beta y + \frac{\beta^2}{2} = 0,$$

$$x^2 + y^2 - \frac{4p^2 + \beta^2}{p}x + 2\beta y + \frac{\beta^2}{2p^2}\left(\frac{\beta^2}{2} - 2p^2\right) = 0.$$

L'équation générale des tangentes à la parabole est donc $px - ty + \frac{t^2}{2} = 0$, t étant un paramètre arbitraire, et nous aurons les paramètres des tangentes communes au cercle et à la parabole, en exprimant que cette droite touche le cercle, ou, ce qui revient au même, que l'équation aux ordonnées des points de rencontre de la droite et du cercle a une racine double; ce calcul conduit à l'équation

$$t^4 + 4\beta t^3 - (8p^2 + 10\beta^2)t^2 + 4\beta(4p^2 + \beta^2)t + \beta^4 - 8p^2\beta^2 = 0.$$

D'après les conditions imposées au cercle, cette équation admet la racine double $t = \beta$; ceci se vérifie aisément et, en divisant deux fois par $t - \beta$, nous obtenons l'équation

$$t^2 + 6\beta t + \beta^2 - 8p^2 = 0,$$

qui donne les paramètres des deux autres tangentes communes.

D'autre part, si nous exprimons que la tangente à la parabole passe au point (x, y), nous avons pour déterminer les paramètres des deux tangentes correspondantes

$$t^2 - 2ty + 2px = 0;$$

nous aurons donc le lieu du point de rencontre des deux tangentes communes, autres que la tangente en M, en exprimant que les deux équations en t coïncident; l'identification fournit les deux relations $3\beta = -y$, $\beta^2 - 8p^2 = 2px$; l'élimination de β entre ces deux équations est immédiate et le lieu du point envisagé est la parabole

$$y^2 - 18px - 72p^2 = 0. \tag{4}$$

Pour avoir le lieu du point de rencontre de l'une de ces tangentes avec la tangente en M, nous exprimerons que l'équation $t^2 - 2ty + 2px = 0$ admet la racine β et que l'autre racine, $t = 2y - \beta$, appartient à l'équation $t^2 + 6\beta t + \beta^2 - 8p^2 = 0$. Nous trouvons ainsi les deux équations en β,

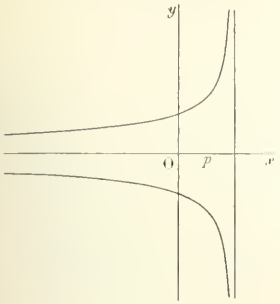
$$\beta^2 - 2\beta y + 2px = 0,$$

$$-4\beta^2 + 8\beta y + 4y^2 - 8p^2 = 0,$$

entre lesquelles β s'élimine immédiatement : il suffit de diviser la seconde par 4 et de l'ajouter à la première. Nous avons ainsi pour second lieu la parabole

$$y^2 + 2px - 2p^2 = 0. \tag{5}$$

3. La tangente en M et la corde AB ont pour équations



$$px - \beta y + p\alpha = 0,$$
$$px + \beta y + p\alpha - 2p^2 = 0;$$

en ajoutant et retranchant les deux premiers membres, on obtient les relations plus simples

$$x + \alpha - p = 0, \qquad \beta y - p^2 = 0.$$

Le lieu du point de rencontre est alors

$$(6) \qquad 2y^2(x - p) + p^3 = 0.$$

C'est une cubique, symétrique par rapport à Ox, ayant pour asymptote simple la droite $x - p = 0$, pour asymptote double l'axe des x, et située tout entière à gauche de la droite $x - p = 0$. Sa forme est dès lors évidente.

4. Revenons à l'équation du cercle (C),

$$x^2 + y^2 - \frac{4p^2 + \beta^2}{p}x + 2\beta y + \frac{\beta^2}{2p^2}\left(\frac{\beta^2}{2} - 2p^2\right) = 0,$$

et prenons l'équation dérivée par rapport à β; nous aurons la droite

$$-2\beta x + 2py + \frac{\beta^3}{p} - 2p\beta = 0,$$

qui passe par les deux points où le cercle touche son enveloppe. Or il est évident que l'un de ces points est le point M, d'après la manière même dont le cercle (C) est défini; donc si nous formons l'équation du second degré qui donne les ordonnées des points de rencontre de la droite et du cercle, cette équation admettra la racine β, puis une autre racine qui sera, en fonction de β, l'ordonnée du point courant de l'autre partie de l'enveloppe. Nous avons ainsi

$$x = \frac{py}{\beta} + \frac{\beta^2}{2p} - p,$$

puis
$$(p^2 + \beta^2)y^2 + 2\beta(\beta^2 - 3p^2)y + \beta^2(5p^2 - 3\beta^2) = 0,$$

enfin, en supprimant du premier membre de cette équation le facteur $y - \beta$,

$$(p^2 + \beta^2)y + \beta(3\beta^2 - 5p^2) = 0.$$

Cette équation donne y, la première donne ensuite x, et nous avons ainsi les équations de la seconde partie de l'enveloppe, en fonction d'un paramètre variable, β,

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\beta^4 - 7p^2\beta^2 + 8p^4}{2p(\beta^2 + p^2)}, \\[2ex] y = \dfrac{\beta(5p^2 - 3\beta^2)}{p^2 + \beta^2}. \end{cases}$$

Ces équations nous montrent que la seconde partie de l'enveloppe est une quartique unicursale; cette courbe est symétrique par rapport à Ox, car le changement de β en $-\beta$ laisse x invariable et change y en $-y$; nous aurons donc une moitié de la courbe en faisant varier β de 0 à $+\infty$. Les valeurs remarquables de β sont celles qui annulent les dérivées de x et de y et ces fonctions elles-mêmes; les dérivées sont

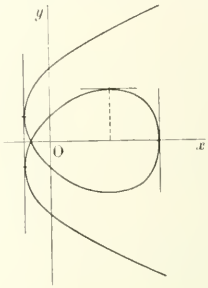
$$x' = \frac{\beta}{p} \cdot \frac{\beta^4 + 2p^2\beta^2 - 15p^4}{(\beta^2 + p^2)^2},$$
$$y' = \frac{-3\beta^4 - 14p^2\beta^2 + 5p^4}{(\beta^2 + p^2)^2};$$

la première s'annule pour $\beta = p\sqrt{3}$, la seconde, pour $\beta = \frac{p}{\sqrt{3}}$. Les fonctions x et y s'annulent pour

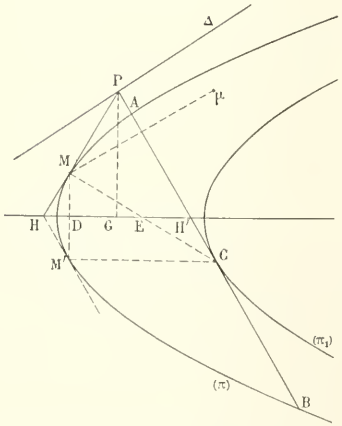
$$\beta = p\sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{2}}, \qquad \beta = p\sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{p\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

β	x'	x	y'	y
0		$4p$		0
	$-$	décroît	$+$	croît
$\frac{p}{\sqrt{3}}$			0	Max. > 0
$p\sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{2}}$	$-$	0	$-$	décroît
$p\sqrt{\frac{5}{3}}$		décroît		0
$p\sqrt{3}$	0	min. < 0		décroît
		croît	$-$	
$p\sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{2}}$	$+$	0		
		croît	$-$	
$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$

Il est donc facile de former le tableau ci-contre et ensuite de construire la courbe, en se rappelant ce qui a été dit au début et en ajoutant à tout ce qui précède cette remarque : que la courbe n'a qu'une direction asymptotique réelle, Ox, et que les branches infinies correspondantes sont paraboliques.



Remarques géométriques. — **1.** Considérons la parabole donnée, π, et un de ses points, M ; menons la tangente au point M, HM, et la tangente au point symétrique par rapport à l'axe, M' ; la corde AB est parallèle à cette seconde droite, HM' ; le centre du cercle est au milieu de cette corde et sur la normale au point M ; il est donc à l'intersection du diamètre qui passe en M' avec la normale en M, au point C, et, comme $MM' = 2MD$, on a aussi $M'C = 2DE = 2p$, d'après la propriété que possède la sous-normale à la parabole d'être constante et égale au paramètre. Le lieu du point C s'obtient donc en faisant subir à la parabole une translation parallèle à l'axe de la parabole et d'amplitude $2p$. Les tangentes aux points correspondants M' et C sont parallèles ; donc la droite AB touche la seconde parabole, π_1. Les questions posées dans la première partie de l'énoncé sont complètement résolues.



2. Le triangle HPH' est isoscèle ; la hauteur, PG, tombe donc au milieu de HH', et l'on a $HG = GH' = p$. De là résulte un mode de génération du lieu du point P à l'aide des tangentes à la parabole π : on mène par un point quelconque de l'axe de cette parabole, H, une tangente à la parabole, on prend sur l'axe, dans le sens de la concavité, $HG = p$; par G on mène une perpendiculaire à l'axe jusqu'au point de rencontre avec la tangente, en P, le point P décrit la courbe cherchée. Je dis que cette courbe est du troisième ordre. En effet considérons une droite quelconque Δ ; si par les points de cette droite nous menons des droites telles que AB hypoténuses de triangles rectangles ayant leurs sommets en ces points et chacun un côté de l'angle droit, analogue à GH', sur l'axe de la parabole ; si, d'autre part, nous menons les tangentes à la parabole, nous aurons deux séries de droites traçant sur Δ deux séries de points entre lesquels existe une correspondance (1, 2) ;

ces séries ont donc trois éléments doubles ; par suite, il y a trois points P sur la droite Δ. En outre, quand le point H se rapproche du sommet de la parabole, le point P s'éloigne à l'infini dans la direction perpendiculaire à l'axe et la droite GP tend vers la droite $(x = p)$; cette droite est donc une asymptote perpendiculaire à l'axe. Tous les points P sont à gauche de cette asymptote. Enfin, quand le point H s'éloigne à l'infini, à gauche, sur l'axe, l'angle PHG tend vers 0, l'ordonnée GP tend vers 0 et le point P, qui s'éloigne aussi à l'infini, à gauche, se rapproche indéfiniment de l'axe de la parabole ; à cause de la symétrie, l'axe de la parabole, est une asymptote double de la cubique.

3. Un premier point limite du cercle (C) est le point M ; le second est donc le point μ symétrique de M par rapport à la droite AB, ligne des centres de deux cercles infiniment voisins. Cela nous fournit une définition géométrique très simple de la seconde partie de l'enveloppe, de laquelle nous pourrions déduire facilement l'équation du lieu du point μ. Nous pouvons remarquer en outre que la droite $M\mu$ est la polaire du point P par rapport au cercle (C), et aussi par rapport à la parabole π, puisque ce point P est le point de concours de deux sécantes communes aux deux coniques ; donc la droite $M\mu$ enveloppe une courbe de troisième classe, polaire réciproque par rapport à la parabole du lieu du point P.

---

604. — *On considère trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *sur* Ox *un point* P, *sur* Oy *un point* Q, *et enfin deux paraboloïdes de révolution ayant tous deux pour foyer le point* O *et pour sommets respectifs les points* P *et* Q; *on considère, en outre, une quadrique* (S) *de révolution ayant le point* O *pour foyer et pour longueur de son axe focal une quantité constante représentée par* $2a$, *cette quadrique étant astreinte au surplus à toucher chacun des paraboloïdes en trois points. On demande alors :*

1° *Le lieu du second foyer de la quadrique* (S) ;

2° *Le lieu de l'axe de révolution ;*

3° *L'enveloppe du plan équatorial ;*

4° *Le lieu des sommets de l'axe focal.*

Désignons par $\frac{p}{2}$ l'abscisse du point P et par $\frac{q}{2}$ l'ordonnée du point Q ; les équations des deux paraboloïdes sont

$$(P) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = (x - p)^2,$$

$$(Q) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = (y - q)^2.$$

D'autre part, une quadrique de révolution quelconque ayant pour foyer l'origine, a pour équation

$$(S) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma z + h)^2.$$

Nous allons écrire que la longueur de l'axe focal est égale à $2a$. Un point quelconque de cet axe a pour coordonnées

$$x = \frac{\alpha\rho}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \qquad y = \frac{\beta\rho}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \qquad z = \frac{\gamma\rho}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

ρ désignant le segment qui a pour origine le point O et pour extrémité le point (x, y, z).

Les valeurs de ρ relatives aux extrémités de l'axe focal sont racines de l'équation

$$\rho^2 = [\rho\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} + h]^2.$$

En exprimant que la différence des racines de cette équation est égale à $2a$ nous avons

$$\frac{h^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1)^2} = a^2$$

ou

$$(1) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = \varepsilon\frac{h}{a}. \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

La surface (S) et le paraboloïde (P) se coupent suivant deux courbes planes dont les plans sont

déterminés par l'équation

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z + h)^2 = (x - p)^2.$$

Il en résulte que ces deux surfaces sont bitangentes; pour qu'elles soient tangentes en trois points il faut que l'un des deux plans soit tangent aux deux surfaces.

Ecrivons, par exemple, que le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + h - \varepsilon'(x - p) = 0, \qquad (\varepsilon' = \pm 1)$$

ou

$$(\alpha - \varepsilon')x + \beta y + \gamma z + h + \varepsilon' p = 0$$

est tangent au paraboloïde (P); il sera aussi tangent à la surface (S).

Il faut pour cela éliminer x, y, z entre l'équation du plan et les suivantes

$$\frac{p}{\alpha - \varepsilon'} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{px - p^2}{h + \varepsilon' p};$$

on obtient sans difficulté

$$(2) \qquad p(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1) + 2h(\alpha - \varepsilon') = 0.$$

En écrivant de même que la surface (S) est tangente en trois points au paraboloïde (Q) nous avons

$$(3) \qquad q(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1) + 2h(\beta - \varepsilon'') = 0. \qquad (\varepsilon'' = \pm 1)$$

On voit ainsi que les paramètres α, β, γ, h qui figurent dans l'équation de la surface (S) sont liés par les relations (1), (2) et (3).

On en tire aisément

$$(4) \qquad \alpha = \varepsilon' - \frac{p\varepsilon}{2a}, \qquad \beta = \varepsilon'' - \frac{q\varepsilon}{2a},$$

ce qui montre que α et β sont des constantes, susceptibles de prendre quatre valeurs correspondant aux signes de ε, ε', ε''.

Cela posé, il est facile de résoudre les diverses parties de la question.

1. Le lieu du deuxième foyer est homothétique du lieu du centre; nous chercherons d'abord celui-ci.

Les coordonnées du centre sont définies par les équations

$$x = \alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z + h),$$
$$y = \beta(\alpha x + \beta y + \gamma z + h),$$
$$z = \gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z + h).$$

On en déduit facilement

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = -\frac{h}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1},$$

ou en tenant compte de la relation (1)

$$x = -\frac{a\alpha}{\varepsilon}, \qquad y = -\frac{a\beta}{\varepsilon}, \qquad z = -\frac{a\gamma}{\varepsilon},$$

ou encore, d'après les formules (4)

$$x = \frac{p}{2} - a\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, \qquad y = \frac{q}{2} - a\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}, \qquad z = -\frac{a\gamma}{\varepsilon}.$$

Il en résulte que le lieu du centre se compose de quatre droites parallèles à Oz. Le lieu du deuxième foyer se compose alors des quatre droites homothétiques, le rapport d'homothétie étant égal à 2.

2. Puisque α et β sont constants, le lieu de l'axe de révolution a pour équation

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$$

ou

$$\frac{y}{x} = \frac{2a\varepsilon - q\varepsilon}{2a\varepsilon - p\varepsilon};$$

ce lieu se compose de quatre plans passant par Oz.

3. Le plan équatorial passe par le centre et est perpendiculaire à l'axe, par suite son équation est

$$\alpha\left(x + \frac{a\alpha}{\varepsilon}\right) + \beta\left(y + \frac{a\beta}{\varepsilon}\right) + \gamma\left(z + \frac{a\gamma}{\varepsilon}\right) = 0.$$

Nous aurons l'équation de l'enveloppe en écrivant que cette équation, considérée comme du deuxième degré en γ, a une racine double; nous obtenons

$$z^2 - 4a\varepsilon(\alpha x + \beta y) - 4a^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

En remplaçant α et β par leurs valeurs (4) on voit que le lieu se compose de quatre cylindres paraboliques.

4. Puisque le centre a pour coordonnées $-\frac{a\alpha}{\varepsilon}$, $-\frac{a\beta}{\varepsilon}$, $-\frac{a\gamma}{\varepsilon}$, et que l'axe focal a pour longueur $2a$, les sommets de cet axe ont pour coordonnées

$$(5)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{a\alpha}{\varepsilon} + \dfrac{a\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \\[2ex] y = -\dfrac{a\beta}{\varepsilon} + \dfrac{a\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \\[2ex] z = -\dfrac{a\gamma}{\varepsilon} + \dfrac{a\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \end{cases}$$

En y considérant γ comme une variable, ces équations représentent une courbe située dans le plan

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}.$$

Nous aurons l'équation de la projection de cette courbe sur le plan des xz en éliminant γ entre la première et la troisième des équations (5).

En éliminant d'abord $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, nous avons $\gamma = \frac{\alpha z}{x}$, puis en remplaçant γ par cette valeur dans la première équation (5) nous obtenons

$$\left(x + \frac{a\alpha}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{a^2\alpha^2 x^2}{(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha^2 z^2}$$

ou

$$\left(x + \frac{a\alpha}{\varepsilon}\right)^2 [(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha^2 z^2] = a^2\alpha^2 x^2.$$

C'est l'équation d'une courbe du quatrième degré.

E. BARRÉ, à Valenciennes.

CONCOURS DE 1897

CONCOURS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Mathématiques (Paris et Départements).

I. **661.** — Soient $oabc$ un tétraèdre T trirectangle au sommet o dont les arêtes oa, ob, oc ont la même longueur l, et d le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

On suppose que le tétraèdre T se déplace par rapport à un trièdre trirectangle fixe OX, OY, OZ de manière que les points a, b, c, d décrivent respectivement les plans qui ont pour équation

$$Y + Z = 0, \qquad Z + X = 0, \qquad X + Y = 0,$$

$$X + Y + Z + \frac{l}{2} = 0.$$

1° Démontrer que les points symétriques des points a, b, c, d par rapport aux arêtes oa, ob, oc du tétraèdre T décrivent également des plans.

2° Trouver l'équation de la surface S décrite par le sommet o du tétraèdre T. — Cette surface, qui est du quatrième ordre, a un point triple et trois droites doubles.

3° Par chaque point α d'une droite double passent deux droites δ, δ' qui rencontrent la surface S en quatre points confondus. — Chercher pour quelles positions du point α sur cette droite double les droites δ, δ' coïncident.

4° Montrer que tout plan tangent à la surface S coupe cette surface suivant deux coniques, et que ces deux coniques se confondent pour quatre positions particulières du plan tangent.

II. — **662.** — Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable réelle x continue pour toute valeur de cette variable.

On suppose que la valeur absolue de la dérivée $\varphi'(x)$ est, pour toute valeur de x, moindre qu'un nombre k inférieur à l'unité.

1° Montrer que l'équation

$$x - \varphi(x) = 0$$

a *une* et *une seule* racine réelle a.

2° On forme la suite

$$x_1 = \varphi(x_0), \qquad x_2 = \varphi(x_1), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi(x_{n-1}),$$

où x_0 est une quantité réelle *arbitrairement* choisie.

Montrer que x_n tend vers la racine a quand n devient infini.

Nota. — Pour éviter une perte de temps aux concurrents qui croiraient devoir faire usage des formules d'Euler en résolvant le problème de géométrie, on rappelle que l'on a

$$a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \qquad a' = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \qquad a'' = \sin\varphi\sin\theta,$$
$$b = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \qquad b' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \qquad b'' = \cos\varphi\sin\theta,$$
$$c = \sin\psi\sin\theta, \qquad c' = -\cos\psi\sin\theta, \qquad c'' = \cos\theta.$$

$$X = ax + by + cz,$$
$$Y = a'x + b'y + c'z,$$
$$Z = a''x + b''y + c''z.$$

(*28 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2*)

Physique (Paris).

I. — Mesure de la vitesse de la lumière par la méthode de Fizeau.

II. — **663.** — Un objectif photographique est formé de deux verres identiques centrés sur le même axe et placés symétriquement par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe commun. Pour déterminer les constantes optiques du système, on en a mesuré l'épaisseur totale E, puis, l'ayant démonté, on a mesuré sur l'une des lentilles

1° l'épaisseur e,
2° la distance du foyer extérieur à la face externe d_1,
3° la distance du foyer extérieur à l'image de la face interne δ_1,
4° la distance du foyer intérieur à la face interne d_2,
5° la distance du foyer intérieur à l'image de la face externe δ_2.
On a trouvé

$$E = 46^{mm}, \qquad d_1 = 326^{mm}, \qquad d_2 = 297^{mm},$$
$$e = 7^{mm},5, \qquad \delta_1 = 329^{mm},86, \qquad \delta_2 = 300^{mm},52.$$

On demande de calculer la distance focale du système et la position des plans principaux.

Enfin, quelles valeurs aurait-on trouvées si, appliquant à l'objectif composé la méthode employée pour une des lentilles, on avait déterminé les distances du foyer principal 1° à la première surface, 2° à l'image de la dernière ?

31 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.

Chimie (Paris).

I. — Azote. Air atmosphérique. Modes de formation et propriétés chimiques des combinaisons que forme l'azote avec l'hydrogène et avec le chlore.

II. — **664**. — On fait détoner dans une bombe calorimétrique, dont la température initiale est 0°, $2^{gr},27$ d'un explosif solide dont la formule est

$$C^mH^n(AzO^2)^pO^q.$$

1° Lorsque l'équilibre de température est établi, on recueille $0^{gr},45$ d'eau et un gaz qui, après avoir été traité par la potasse et le pyrogallate alcalin, mesure 336^{cc} à 0° et à 760^{mm}. Calculer la formule la plus simple que l'on puisse attribuer au composé, formule qui sera adoptée comme formule moléculaire.

2° La chaleur dégagée dans la réaction est $3^{cal},605$. Calculer la chaleur de formation de l'explosif à partir de ses éléments.

$$C + O^2 = CO^2 + 94^{cal},0,$$
$$H^2 + O = H^2O \text{ liq.} + 69^{cal},0.$$

3° Calculer la température théorique de la réaction. On admettra que la chaleur moléculaire à volume constant d'un gaz peut être mise sous la forme $Pv = a + bt$, dans laquelle

$a = 0,0048$ $\quad b = 0,000002$ pour les gaz diatomiques,
$a = 0,0062$ $\quad b = 0,000005$ pour les gaz triatomiques.

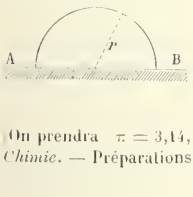
4° Le volume de la bombe étant 500^{cc}, calculer la pression théorique au moment de la détonation.

1 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Physique et Chimie.

Physique. — I. — Indiquer comment on peut vérifier les lois de la réfraction à l'aide d'un prisme et d'un goniomètre. (On ne décrira ni le goniomètre ni son réglage.)



II. — 1° Construction d'un baromètre normal, et mesure précise de la hauteur barométrique.

2° **665**. — La hauteur barométrique étant égale à $76^{cm},5$, évaluer, dans le système d'unités C.G.S., la résultante verticale de la pression atmosphérique sur la surface d'un hémisphère dont le rayon $r = 50^{mm}$ et posée sur un plan horizontal AB.

(On prendra $\pi = 3,14$, et l'on inscrira les calculs sur la feuille.)

Chimie. — Préparations du phosphure d'hydrogène gazeux; ses analogies avec l'ammoniaque.

9 juin, de 7 h. à 10 h.

Mathématiques.

666. — On donne dans un système d'axes rectangulaires $Oxyz$: la droite AB qui a pour équations $x = y$, $y = z$, le point C, qui a pour coordonnées $x = 0$, $y = 0$, $z = a$. On considère l'hyperboloïde (H) engendré par la rotation de AB autour de Oz, puis la sphère (S) qui a pour centre C et qui est tangente à AB.

I. — Trouver les équations des surfaces (H) et (S).

II. — Déterminer leur courbe commune, et calculer (*) le rapport de la plus grande à la plus petite des surfaces que cette courbe découpe sur la sphère. (Il suffira de donner le résultat avec deux décimales.)

III. — Autour d'un point P de Oz dont la cote est $z = h$, pivote une sécante qui perce l'hyperboloïde (H) en un point H, et la sphère (S) en un point S. On demande :

D'étudier le lieu de l'intersection M des diamètres OH et CS; de discuter les coefficients angulaires de ses directions asymptotiques, quand le point P décrit l'axe Oz.

(10 juin, de 7 h. à 11 h.)

Calcul trigonométrique.

On donne deux angles à la base d'un triangle ABC, savoir : $B = 72^\circ 27' 48'',5$; $C = 41^\circ 19' 23'',6$, et la hauteur $AD = 4^m,53$.

1° Calculer les trois côtés du triangle.

2° Calculer, en décimètres cubes, le volume V engendré par le triangle tournant autour de sa base BC.

(10 juin, de 4 h. à 6 h. 1/2.)

Géométrie descriptive.

667. — On donne dans le plan vertical de projection un cercle de rayon égal à 60^{mm}, dont le centre C est situé à droite de la ligne YY′ qui divise la feuille en deux parties égales parallèlement aux grands côtés, à une distance CD de cette ligne égale à 80^{mm}, et à 327^{mm} du bord inférieur de la feuille. Ce cercle, en tournant autour de YY′, engendre un tore plein.

Une sphère pleine, de rayon égal à 90^{mm}, touche le plan du cercle précédent en un point O′ situé au-dessous de CD, à 50^{mm} du point C, et à 40^{mm} à droite de YY′. La projection horizontale, O, du centre de la sphère est à 180^{mm} au-dessous de O′ sur une parallèle à YY′.

On construira l'intersection du tore et de la sphère, et l'on représentera par ses projections ce qui reste de la sphère en supprimant la partie comprise dans le tore, les parties vues étant en traits noirs pleins, et les parties cachées en pointillé.

On indiquera en traits pleins rouges les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point, ainsi que les points remarquables. On tracera en rouge également les parties des deux surfaces en dehors de l'intersection.

(11 juin, de 7 h. à 11 h.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Mathématiques.

668. — On considère deux hyperboloïdes à une nappe H et H′ se coupant suivant deux coniques S et Σ dont aucune ne se décompose ; ces deux coniques ont, comme on sait, deux points communs A et B que l'on suppose distincts. Soit μ un point quelconque de Σ ; par ce point passent quatre génératrices rectilignes (deux sur H et deux sur H′) qui rencontrent S aux quatre points M, N, M′, N′.

I. — Trouver l'enveloppe des six droites qui joignent deux à deux ces *quatre* points ; on trouvera *quatre* coniques que l'on désignera par c, c', C_1, C_2, les coniques c et c' d'une part, C_1, C_2 d'autre part jouant un rôle analogue. On indiquera dans quels cas l'une de ces coniques se réduit à un point.

II. — Dans cette seconde partie, on ne regarde plus H et H′ comme donnés ; on se propose au contraire de remonter à la figure primitive en partant des éléments auxquels on a abouti et que l'on a étudiés dans la première partie :

1° On donne la conique S ; peut-on choisir arbitrairement l'une des quatre coniques c, c', C_1, C_2 ? Les trois autres sont-elles alors déterminées ?

2° On donne S et c ou C_1, à quelles conditions est assujettie Σ ? Si l'on donne en outre Σ, à quelles conditions sont assujettis H et H′ ? Il y a lieu ici de distinguer deux cas, suivant que l'on donne c ou C_1. Dans l'un de ces deux cas, les deux hyperboloïdes sont variables, mais chacun d'eux est déterminé quand on fixe l'autre : trouver alors l'enveloppe E de la droite D qui joint les pôles d'un plan fixe Π par rapport aux deux hyperboloïdes (on remarquera d'abord que la droite D reste dans un plan).

(*) Les calculs seront faits sur la feuille.

3° Ecrire l'équation du lieu engendré par E lorsque le plan H tourne autour d'une droite fixe.

N. B. — Les candidats qui, pour traiter la première partie, seraient embarrassés dans le choix des axes, peuvent, s'ils le veulent, prendre pour axe des x la droite AB; pour axe des y la tangente en A à la conique S; pour axe des z la tangente en A à la conique Σ ; *mais ce choix d'axes n'est nullement obligatoire.*

(14 juin, durée 6 heures.)

Physique (*).

I. — Télescopes.

II. — Problème. — Dans une expérience de dilatation de l'air, on a par inadvertance négligé de dessécher l'air ; on achève néanmoins le calcul du coefficient de dilatation comme si l'air était sec ; on obtient une valeur erronée.

On demande d'expliquer le rôle perturbateur de la vapeur d'eau, et de calculer l'erreur commise lorsqu'il y a quelques gouttes d'eau en excès :

1° Dans la mesure à volume constant. } Méthodes de Regnault.
2° Dans la mesure à pression constante. }

On négligera la dilatation du verre et le volume des tubes de jonction au manomètre.

Pression atmosphérique, 760^{mm}.

Température de la salle et du manomètre, 15°.

Pressions de vapeur saturantes de l'eau à 0°, $4^{mm},6$; à 15°, $12^{mm},7$.

15 juin, durée 6 heures.

II bis. — **669**. — Quelques modifications produites dans l'apparence d'un astre éloigné par une atmosphère très réfringente entourant cet astre. — L'astre est supposé lumineux par lui même ; il est sphérique ; il tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire au rayon qui joint le centre de l'astre à l'œil de l'observateur.

L'atmosphère de l'astre est supposée homogène ; elle est limitée par une sphère de même centre que l'astre.

On demande :

1° Comment le diamètre apparent de l'astre dépend de l'épaisseur et de l'indice de réfraction de l'atmosphère ; à quelle partie de la planète correspond le disque apparent ;

2° Pendant quelle fraction de tour un point de l'astre est visible sur le disque apparent ; la position du point est définie par sa latitude vraie à la surface de l'astre.

3° On décrira sommairement l'aspect sous lequel on verrait le réseau de parallèles et de méridiens de l'astre.

Notations. — Le rayon de l'astre dépourvu d'atmosphère est pris pour unité. — Epaisseur de l'atmosphère e. — Indice de réfraction de l'atmosphère n.

28 juin, durée 3 heures.)

QUESTIONS PROPOSÉES

670. — On donne une conique S, deux points B et C de cette conique et un point A de son plan ; on considère la conique variable Γ passant par B et C, tangente à la conique S en un point variable M, et telle que AQ, AQ′ étant les tangentes issues du point A, le rapport anharmonique du faisceau (AB, C, Q, Q′) ait une valeur donnée. Trouver :

1° Le lieu du pôle P de BC par rapport à Γ ;

2° Le lieu des points Q et Q′ où les droites AQ et AQ′ touchent Γ ;

3° Les enveloppes des droites QQ′, PQ et PQ′.

Voir ce que deviennent ces diverses courbes quand le point A est sur la conique S. VASNIER.

671. — Trouver l'équation générale des cubiques qui ont pour asymptote double l'axe des y et pour asymptote simple la bissectrice de l'angle des axes, $y = x$, telles en outre que les trois points de rencontre de cette cubique avec l'hyperbole $xy = a^2$ soient sur un cercle qui passe au point $(a, 0)$. Trouver :

1° Le lieu du centre de ce cercle ;

2° L'enveloppe des cubiques du système ;

3° Le lieu de leur point d'inflexion. E. H.

(*) Cette composition a été annulée en partie, en raison de la grande analogie que présentait le problème avec celui que nous avons proposé dans la *Revue* du 1er juin, sous le n° 654, et sur lequel la plupart des candidats s'étaient déjà exercés.

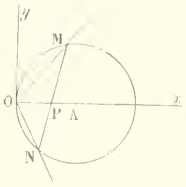
672. — Si l'on considère deux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à la fois à une conique et à une parabole ayant pour foyer le centre de cette conique, l'un de ses points et le symétrique de l'autre par rapport à l'axe non focal de la conique sont inverses par rapport au cercle concentrique à la conique, qui passe par ces foyers. (M. D'OCAGNE).

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NAVALE (Concours de 1897)

Géométrie analytique.

673. — *Oxy étant un système d'axes rectangulaires, on considère une conique C dont le centre A se trouve sur l'axe des x ($\overline{OA} = a$) et qui est tangente en O à l'axe des y. Par un point P de l'axe des x ($\overline{OP} = p$) on mène une sécante quelconque MN de coefficient angulaire m, et on joint OM et ON par des droites.*



1° Trouver l'équation de l'hyperbole passant par P et ayant pour asymptotes les droites OM et ON.

2° Trouver analytiquement le lieu du second point de rencontre de cette hyperbole avec la droite MN quand m varie : ce lieu est une conique C' homothétique de la première C. Le démontrer géométriquement en considérant d'abord les cas où la conique C se réduit à une circonférence et à une hyperbole équilatère.

3° Démontrer que la droite qui joint les pôles de la droite MN par rapport aux deux coniques C et C' passe par un point fixe, et trouver le lieu des points de rencontre de cette droite avec les deux droites OM et ON.

1. Toute conique (C) ayant pour centre le point donné A et tangente en O à l'axe des y est représentée par l'équation

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0,$$

ou bien

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - \frac{2x}{a} = 0,$$

ε désignant $+1$ ou -1, suivant que la conique donnée est du genre ellipse ou du genre hyperbole.

La sécante qui passe par le point donné P a pour équation

$$(2) \qquad y = m(x-p).$$

Nous aurons l'équation du faisceau des droites OM et ON en éliminant x entre les équations (1) et (2) préalablement rendues homogènes ; on obtient ainsi

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{2a}{p}\right) + \frac{2xy}{map} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 0.$$

Toute hyperbole ayant ces droites pour asymptotes est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{2a}{p}\right) + \frac{2xy}{map} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - \lambda = 0;$$

si en outre elle passe par le point P, on a

$$\lambda = \frac{p(p-2a)}{a^2},$$

de sorte que l'équation demandée est

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{p-2a}{p} + \frac{2xy}{map} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - \frac{p(p-2a)}{a^2} = 0.$$

2. Si nous supposons m variable, le second point d'intersection de l'hyperbole et de la sécante PMN décrira

un lieu géométrique dont nous aurons l'équation en éliminant m entre les équations (2) et (3) ou plutôt en remplaçant dans (3) $\frac{y}{m}$ par $x - p$, ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{p - 2a}{p} + \frac{2x(x-p)}{ap} + \frac{y^2}{2b^2} - \frac{p(p-2a)}{a^2} = 0,$$

ou, après réductions,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{p(p-2a)}{a^2} = 0.$$

Le lieu est donc une conique (C') concentrique à (C) et qui se confond avec elle si l'on a $p = 0$ ou $p = 2a$ ce qui signifie que le point donné P est l'un des sommets situés sur Ox de la conique (C). On voit sans peine que le lieu passe au point donné P.

Les coniques (C) et (C') sont homothétiques et ont leur centre commun pour centre d'homothétie, parce que si l'on porte l'origine à ce centre, la conique (C') est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2b^2} - \frac{(p-a)^2}{a^2} = 0,$$

ce qui montre que les longueurs de ses axes sont proportionnelles aux longueurs d'axes de la conique (C).

Démonstration géométrique. On sait que si OM (*fig.* 1) et ON sont les asymptotes d'une hyperbole passant en P, on obtient le second point de rencontre de la courbe avec la sécante PMN en prenant $\overline{NR} = \overline{PM}$. Supposons que la conique (C) soit un cercle et soit I le milieu de la corde MN, ce sera aussi le milieu de la corde PR de l'hyperbole; les obliques AR et AP sont donc égales comme s'écartant également du pied I de la perpendiculaire. Le lieu du point R est donc un cercle concentrique au cercle donné.

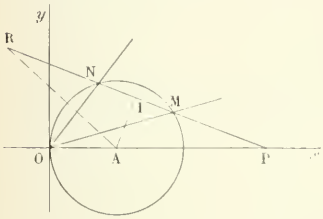


Fig. 1

Si la conique (C) est une ellipse, on peut la regarder comme la projection orthogonale d'un cercle auquel les explications précédentes sont applicables; dans le plan du cercle la figure sera identique à la précédente; en la projetant orthogonalement les projections des segments égaux $\overline{NR}$ et $\overline{PM}$ seront des segments égaux, et la projection du point R décrira bien le lieu demandé; ce lieu sera une ellipse concentrique à l'ellipse donnée, ayant ses axes dirigés suivant les mêmes droites, le rapport des longueurs du petit axe au grand étant évidemment le même pour les deux ellipses.

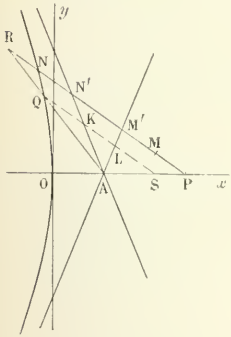


Fig. 2

Enfin si la conique (C) est une hyperbole, ses asymptotes sont rencontrées par la sécante PMN en des points M' et N' (*fig.* 2) tels que $\overline{MM'} = \overline{NN'}$, de sorte que $\overline{PM} + \overline{MM'}$ ou $\overline{PM'}$ est égal à $\overline{NN'} + \overline{NR}$ ou $\overline{N'R}$. Par le point Q où la droite AR coupe l'hyperbole donnée, tracons la parallèle à PR et soient S le point où elle coupe l'axe des x, K et L les points où elle coupe les asymptotes de l'hyperbole donnée. L'égalité $\overline{PM'} = \overline{N'R}$ entraîne $\overline{SL} = \overline{KQ}$. Par conséquent S est un point de l'hyperbole et puisqu'il est sur Ox, ce point est un sommet : il est fixe et le rapport $\frac{AR}{AQ}$ est égal au rapport constant $\frac{AP}{AS}$ ce qui établit la proposition.

3. Le milieu de la corde MN de la conique (C) coïncide avec le milieu de la corde PR de la conique (C'); le diamètre des cordes parallèles à MN est donc le même pour les deux coniques; on sait que les pôles de MN par rapport aux deux coniques se trouvent sur ce diamètre; il est donc prouvé que la droite qui joint les pôles passe par le point fixe A.

L'équation de cette droite est

$$\frac{x}{a^2} - \frac{1}{a} + \frac{my}{2b^2} = 0;$$

l'équation du lieu des points où elle coupe les droites OM et ON s'obtient en éliminant m entre cette équation et l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{p-2a}{p} + \frac{2xy}{map} + \frac{y^2}{2b^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{p-2a}{p} + \frac{2axy^2}{\varepsilon b^2 p(a-x)} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 0,$$

ou en simplifiant

$$(p-2a)(a-x)\frac{x^2}{a^2} + (p-2a)x - ap\frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 0.$$

Divisons tous les termes par $p-2a$, et posons

$$\frac{p}{p-2a} = k,$$

l'équation du lieu devient

$$(4) \qquad (a-x)\frac{x^2}{a^2} - (x-ak)\frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 0.$$

Le nombre k est le rapport $\frac{\overline{PO}}{\overline{PS}}$ des segments ayant pour origine commune le point P donné et pour extrémités les sommets O et S de la conique (C) situés sur l'axe des x. On sait que si l'abscisse p de P varie de $-\infty$ à $+\infty$, k diminue constamment de 1 à $-\infty$ puis de $+\infty$ à 1; ce nombre est nul en même temps que p et infini quand $p = a$.

Étude du lieu géométrique représenté par l'équation (4). — Ce lieu, qui est du 3e ordre, a évidemment l'axe des x pour axe de symétrie; il rencontre cet axe au point A donné; c'est un point simple de sorte que la tangente en A est nécessairement parallèle à Oy; il passe par l'origine qui est un point double; les tangentes en ce point sont représentées par

$$\frac{x^2}{a^2} + k\frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 0.$$

Si $k\varepsilon$ est positif, ces tangentes sont imaginaires et l'origine est un point isolé. Si $k\varepsilon$ est négatif, il y a deux branches réelles de courbe ayant des tangentes distinctes et passant à l'origine.

Pour k infini, le lieu se réduit à $y^2 = 0$, droite double confondue avec Ox.

Résolvons par rapport à y l'équation (4), nous trouvons

$$y = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{\frac{\varepsilon(a-x)}{x-ak}}.$$

On voit que si le point P est à distance finie, k étant différent de 1, la droite $x = ak$ est asymptote.

Si $k = 1$, l'équation (4) se réduit à

$$(x-a)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2}\right) = 0;$$

elle représente trois droites.

Si la conique donnée (C) est une ellipse, ε est égal à $+1$; y n'est réel que si l'on donne à x des valeurs comprises entre a et ak; toute la courbe est comprise entre les deux parallèles à l'axe des y représentées par les équations $x = a$ et $x = ak$; au contraire la courbe n'a aucun point compris entre ces parallèles dans le cas où la conique (C) est une hyperbole.

Prenons le signe $+$ devant le second membre et calculons la dérivée y' de y; après simplifications, nous obtenons

$$y' = \frac{b}{a}\,\frac{\varepsilon[-2x^2 + (1+3k)ax - 2a^2k]}{2(x-ak)^2\sqrt{\frac{\varepsilon(a-x)}{x-ak}}}.$$

Le numérateur de cette dérivée ne peut s'annuler que si l'on a

$$(1+3k)^2 - 16k \geqslant 0 \qquad \text{ou bien} \qquad (9k-1)(k-1) \geqslant 0,$$

ce qui signifie que k n'est pas compris entre $\frac{1}{9}$ et 1; si au contraire k est compris dans cet intervalle, la dérivée y' ne peut pas s'annuler.

Ces remarques faites, étudions successivement les divers cas qui peuvent se présenter.

Premier cas. — *La conique donnée* (C) *est une ellipse.* Alors ε est égal à $+1$ et l'on a

$$y = \frac{bx}{a}\sqrt{\frac{a-x}{x-ak}}, \qquad y' = \frac{b}{a}\cdot\frac{-2x^2+(1+3k)ax-2a^2k}{2(x-ak)^2\sqrt{\frac{a-x}{x-ak}}}.$$

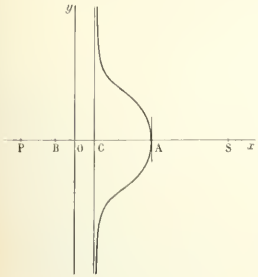


Fig. 3

1° Supposons que le point donné P soit à gauche du point B dont l'abscisse est $-\frac{a}{4}$; alors k sera compris entre $\frac{1}{9}$ et 1, la dérivée sera constamment négative et y décroîtra sans cesse ; la droite $x = ak$ est asymptote, et elle est placée entre O et A ; la courbe a la forme indiquée sur la figure 3.

2° Si le point P est donné entre B et O, k est compris entre $\frac{1}{9}$ et zéro, les racines de la dérivée deviennent réelles ; il faut voir si elles sont comprises entre ak et a ; or, si nous posons

$$f(x) = 2x^2 - (1+3k)ax + 2a^2k,$$

nous voyons que l'on a

$$f(a) = a^2(1-k) \qquad \text{et} \qquad f(ak) = a^2k(1-k)\ ;$$

ces résultats étant positifs, les quantités a et ak ne sont pas placées entre les racines ; la comparaison de a et ak avec la demi-somme montre que celle-ci se place entre a et ak ; par conséquent les racines de la dérivée sont dans l'intervalle utile et la fonction y admet un maximum et un minimum. La courbe a la forme ci-contre (*fig.* 4).

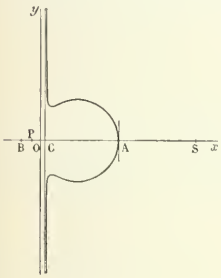


Fig. 4

Si le point P se confond avec l'origine le lieu se réduit à l'axe des y et à une ellipse homothétique à l'ellipse donnée et ayant O et A pour sommets.

3° Supposons le point P donné entre O et S ; alors k est négatif, $f(a)$ et $f(ak)$ sont de signes contraires et l'une des racines et une seule se place dans l'intervalle utile ; il est aisé de voir que c'est la racine positive. La figure 5 indique la forme de la courbe qui est une strophoïde droite dans le cas où l'ellipse donnée se réduit à un cercle, le point P étant au centre du cercle.

4° Enfin si le point P est donné à droite du sommet S de l'ellipse, k est supérieur à 1, a et ak sont compris entre les racines de la dérivée, de sorte que ces racines, bien que réelles doivent être rejetées. On obtient alors la figure 6.

Second cas. *La conique* (C) *est une hyperbole.* ε est alors égal à -1 et l'on a

$$y = \frac{bx}{a}\sqrt{\frac{x-a}{x-ak}} \qquad y' = \frac{b}{a}\,\frac{2x^2-(1+3k)ax+2a^2k}{2(x-ak)^2\sqrt{\frac{x-a}{x-ak}}}.$$

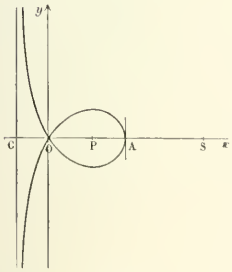


Fig. 5.

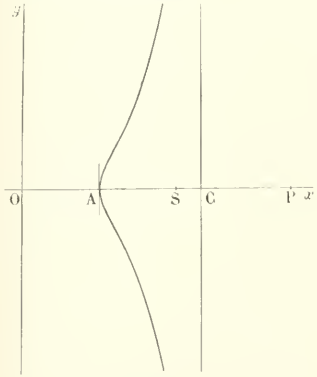


Fig. 6.

En ce cas la courbe admet deux asymptotes non parallèles à l'axe des y, symétriques par rapport à Ox, et

dont les coefficients angulaires sont $\pm\frac{b}{a}$; elles sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole donnée; l'ordonnée à l'origine de l'asymptote de coefficient angulaire $\frac{b}{a}$ est la limite pour x infini de $y-\frac{b}{a}x$; cette limite, qui s'obtient sans difficulté, est $\frac{b(k-1)}{2}$; de sorte que l'équation de l'asymptote est

$$y=\frac{b}{a}x+\frac{b(k-1)}{2}.$$

Cette droite rencontrant une courbe du 3e ordre en deux points rejetés à l'infini la coupe forcément en un 3e point dont il faut calculer l'abscisse; on trouve

$$x=\frac{k(1-k)}{3k+1}a.$$

1° Supposons le point P donné à gauche de O. Inutile ici de distinguer les cas où $k>\frac{1}{9}$ et $k<\frac{1}{9}$ lorsque ce rapport est positif et inférieur à 1 parce que les racines de la dérivée, bien que réelles dans le second cas sont, comme on l'a vu, comprises entre ak et a; elles ne sont donc pas comprises parmi les valeurs de x que nous avons à considérer. Lorsque P est à gauche de O la courbe a la forme indiquée ci-contre (*fig.* 7).

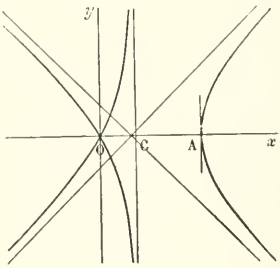


Fig. 7

2° Si le point P est donné entre O et S, il y a deux cas à distinguer suivant que ce point est à gauche ou à droite du point dont l'abscisse est $\frac{a}{2}$; s'il est à gauche, c'est-à-dire si p est compris entre zéro et $\frac{a}{2}$, le nombre k surpasse $-\frac{1}{3}$ et l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de l'asymptote est négative; elle est positive dans l'autre cas; dans les deux cas $f(a)$ et $f(ak)$ sont de signes contraires, a n'est pas compris entre les racines de la dérivée tandis que ak y est compris; celle des racines qui est inférieure à ak correspond à un maximum de y. La courbe a la forme indiquée sur la figure 8.

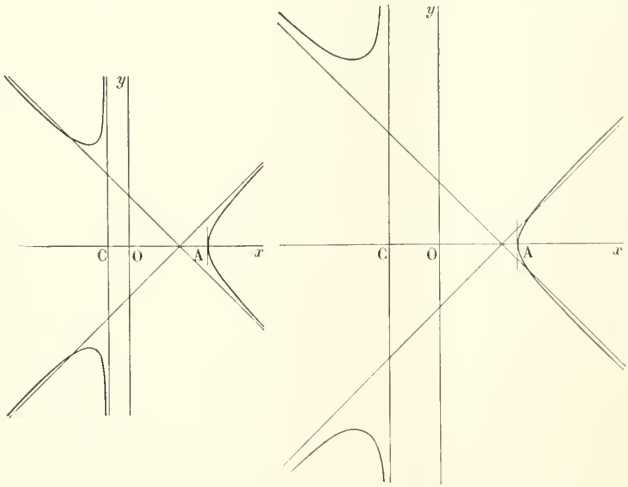


Fig. 8.

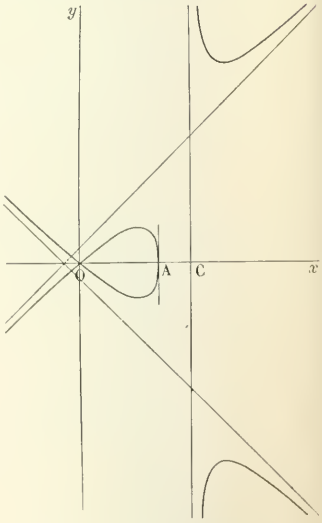


Fig. 9.

3° Si enfin le point P est au-delà du sommet S, k est plus grand que 1, $f(a)$ et $f(ak)$ sont tous deux négatifs,

a et ak sont compris entre les racines qui conviennent toutes deux ; la fonction y passe alors par un maximum et par un minimum. La courbe qui correspond à ce dernier cas est tracée ci-contre (*fig.* 9).

E. D.

M. P. SAILLY, à Limoges, a envoyé une solution de la question.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

570. — *On donne deux cercles C et C′ ; trouver le lieu des centres des cercles orthogonaux à l'un et tangents à l'autre.*

Prenons pour axe des x la ligne des centres des deux cercles dirigée du centre du cercle C vers le centre du cercle C′ et pour axe des y le diamètre perpendiculaire dans le cercle C ; désignons par r et r' les rayons des cercles C et C′ et par a l'abscisse du centre du cercle C′ ; appelons λ le rayon du cercle variable, pris avec le signe + ou le signe — suivant que ce cercle est tangent extérieurement ou intérieurement au cercle C ; désignons enfin par ω l'angle que fait avec Ox le rayon du cercle C qui aboutit au point de contact et par ρ le rayon vecteur du centre du cercle mobile. Nous aurons alors pour équation du cercle variable

$$x^2 + y^2 - 2(r+\lambda)(x\cos\omega + y\sin\omega) + r^2 + 2r\lambda = 0\,;$$

d'autre part, l'équation du cercle C′ est

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r'^2 = 0\,;$$

donc la condition d'orthogonalité est

$$2a(r+\lambda)\cos\omega - r^2 - 2r\lambda - a^2 + r'^2 = 0.$$

Comme nous pouvons prendre dans tous les cas $\rho = r + \lambda$, cette condition nous donne de suite l'équation du lieu en coordonnées polaires,

$$2a\rho\cos\omega - r^2 - 2r(\rho - r) - a^2 + r'^2 = 0,$$

ou

$$2a\rho\cos\omega - 2r\rho + r^2 + r'^2 - a^2 = 0.$$

L'équation du lieu en coordonnées rectangulaires s'en déduit immédiatement :

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{r^2}\left(x + \frac{r^2 + r'^2 - a^2}{2a}\right)^2 = 0.$$

Elle représente une conique ayant pour foyer l'origine, pour axe focal l'axe des x et pour excentricité le nombre $\frac{a}{r}$. Si donc le centre du cercle C′ est extérieur au cercle C, la conique est une hyperbole ; s'il est intérieur au même cercle, c'est une ellipse, et s'il est sur le cercle, la conique est une parabole. Dans le cas particulier où l'on a $r^2 + r'^2 = a^2$, c'est-à-dire quand les deux cercles donnés sont orthogonaux, le lieu est un couple de droites. Si l'on a $a = 0$, c'est-à-dire si les deux cercles donnés sont concentriques, le lieu est un cercle.

M. MALPLAT, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne.

Bonnes solutions : MM. BARISIEN ; J. GAUTHIER, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne ; J. BADARD, élève à l'Ecole des mines de Saint-Etienne ; C. BOUSQUIÉ, à Paris.

Solution satisfaisante : M. E. BARRÉ, à Valenciennes.

GÉOMÉTRIE

Intersection d'une droite quelconque avec un ellipsoïde de révolution à axe vertical ou de bout par des constructions élémentaires.

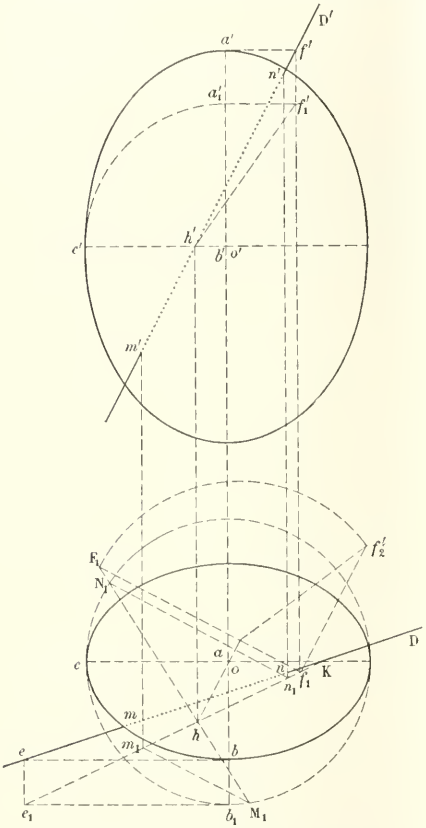
(*Centrale, Examens oraux, 1895, question 461.*)

La méthode élémentaire que l'on peut suivre pour traiter cette question, et qui a l'avantage de s'appliquer avec succès à toutes les quadriques, repose sur ce lemme évident :

Si on multiplie par un rapport constant les distances de tous les points d'une figure F *à un plan* P, *le lieu des nouveaux points est une figure* F_1 *de même forme que la première, et la coupant dans le plan* P.

Quand F est une droite, F_1 est aussi une droite ;

Quand F est une quadrique ayant P pour plan principal, F_1 est aussi une quadrique ayant le même plan principal ; par suite, en choisissant le rapport multiplicateur de sorte que F_1 ait une forme géométrique plus simple que F, on pourra ramener la recherche des points d'intersection de F avec une droite à un problème analogue relatif à F_1, mais plus simple que le précédent.

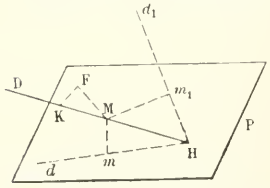


1er Exemple : F *est un ellipsoïde de révolution à axe vertical.* — Soient *ocb*, *o'c'b'* les projections de l'équateur, et *oa*, *o'a'* celles du demi-axe de révolution, *h'f'*, hf_1 les projections de la droite donnée ; multiplions par $\frac{o'c'}{o'a'}$ les cotes relatives au plan de l'équateur ; la droite devient $h'f'_1$, hf_1 — l'ellipsoïde devient la sphère de centre *oo'* avec *oc* pour rayon ; nous construisons par la méthode connue du grand cercle, les deux points de rencontre de la droite avec la sphère ; ils sont rabattus autour de *oh* en M_1N_1 et par conséquent projetés en m_1m', n_1n'.

2e Exemple : F *est un ellipsoïde à axes inégaux.* — Soient les trois axes *oa*, *o'a'* vertical, *ob*, *o'b'* de bout, et *oc*, *o'c'* parallèle à LT. Sur la figure, OA>OC>OB. Multiplions d'abord les éloignements relatifs au plan de front *oc* par le rapport $\frac{oc}{ob}$; la droite donnée DD' se transforme en une droite ayant pour projection Ke_1 et D' ; l'ellipsoïde F devient un ellipsoïde de révolution ayant pour méridien principal l'ellipse AOC et pour équateur le cercle horizontal OC ; nous avons construit dans le premier exemple les points m_1m', n_1n' où la nouvelle droite perce cette surface ; revenant aux premiers éloignements, nous avons donc les points *mm'*, *nn'* demandés.

3e Exemple : F *est un hyperboloïde à deux nappes ou un paraboloïde elliptique.* — Supposons l'axe réel vertical ; en multipliant convenablement les éloignements relatifs à un des plans principaux contenant cet axe, plan que nous supposerons de front, la surface devient de révolution autour de l'axe vertical ; le problème est donc ramené à celui-ci : *Construire les points de rencontre d'une droite avec un hyperboloïde de révolution à deux nappes, ou un paraboloïde de révolution, à axe vertical.*

Rappelons ce théorème élémentaire : *L'ellipsoïde allongé, l'hyperboloïde à deux nappes, et le paraboloïde de révolution, sont lieux géométriques de points* M *tels que le rapport de leurs distances à un foyer* F *et à un plan directeur* P *est constant et égal à* e.



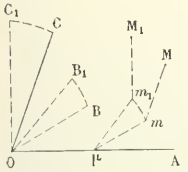
F est le foyer de la méridienne principale, P le plan engendré par la directrice de cette courbe en tournant autour de l'axe focal placé ici verticalement. Soit M un point commun à la droite D et à la surface. Projetons D et M sur P en *d* et *m* ; puis rabattons le plan D*d* autour de D sur le plan que D détermine avec F ; *d* devient d_1 ; donc M est également le point où D rencontre la conique qui a pour foyer F, pour directrice d_1, et pour excentricité le rapport constant *e*. Pratiquement, ce qu'il y a de plus simple à faire, c'est de rabattre d'abord le plan FD autour de son horizontale FK

sur le plan horizontal passant par F; il sera aisé ensuite de tracer d_1 et d'achever les constructions qui sont fort courtes.

Le cas des deux quadriques réglées présente moins d'intérêt parce que l'on a à sa disposition la méthode du paraboloïde auxiliaire qui a avec l'une des surfaces données deux génératrices rectilignes communes; toutefois, par l'amplification des cotes ou des éloignements, on peut encore ramener ici les surfaces réglées à être un hyperboloïde de révolution et un paraboloïde réglé équilatère; cette réduction sera un avantage dans bien des cas.

Intersection d'une droite avec un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués.

Soient OA, OB, OC les trois demi-diamètres donnés en position et grandeur; si on savait construire les axes principaux, la question se trouverait réduite au deuxième exemple; mais une transformation simple permet de se passer des axes. Soit M un point de l'espace; construisons le contour $O\mu m M$ des coordonnées de M par rapport à OA, OB, OC envisagés comme axes de coordonnées; on peut supposer que $\overline{mM}$ et $\overline{\mu m}$ sont la cote et l'éloignement obliques de M vis-à-vis des plans respectifs AOB, AOC; si on fait tourner $\overline{\mu m}$ autour de μ dans le plan AOB jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire à OA suivant $\overline{\mu m_1}$ et qu'on élève ensuite $\overline{m_1 M_1}$ perpendiculaire à AOB et égal à $\overline{mM}$, le point M_1 ainsi obtenu est transformé de M; si M décrit une droite D, M_1 décrit aussi une droite D_1; si M appartient à l'ellipsoïde donné, M_1 se trouve sur l'ellipsoïde qui a pour axe de symétrie OA en position, $OB_1 = OB$ perpendiculaire à OA dans le plan AOB, et $OC_1 = OC$ perpendiculaire sur le plan AOB. Les constructions à effectuer ne sont pas bien longues si on a préalablement rendu le plan AOB parallèle au plan horizontal, et le rayon OA parallèle à la ligne de terre; on peut évidemment les appliquer à toutes les quadriques rapportées à trois directions conjuguées; elles seraient également utiles pour certaines recherches de plans tangents ou de sections planes.



P. BARBARIN.

PHYSIQUE ET CHIMIE

555. — *Chercher la température x à laquelle il faut porter de l'air sec à la pression* H *pour qu'il prenne la densité de l'air humide sous la même pression à la température t et à l'état hygrométrique e.*

$$H = 75^{cm},2, \qquad e = \frac{2}{3}, \qquad t = 19^{\circ},4.$$

Tension maxima F_t *de la vapeur d'eau*, $1^{cm},68$.

Coefficient de dilatation des gaz, $\alpha = 0,00367$.

Densité de la vapeur d'eau, $\frac{5}{8}$.

(*École centrale, 1896, 1re session.*)

La masse spécifique de l'air sec à la température x et sous la pression H est

$$a\,\frac{H}{76}\,\frac{1}{1+\alpha x},$$

a désignant la masse spécifique de l'air normal.

La masse spécifique de l'air humide dans les conditions données est

$$a\,\frac{H-\frac{3}{8}eF_t}{76}\,\frac{1}{1+\alpha t}.$$

On a donc l'égalité

$$a\,\frac{H}{76}\,\frac{1}{1+\alpha x} = a\,\frac{H-\frac{3}{8}eF_t}{76}\,\frac{1}{1+\alpha t},$$

d'où

$$\alpha x = \frac{H\alpha t + \frac{3}{8} e F_t}{H - \frac{3}{8} e F_t}.$$

Application numérique : $x = 21^{\circ},04.$

J. C. VERCHÈRE, à Saint-Etienne.

Solution exacte de M. J. Gauthier, à Saint-Etienne.

---

556. — *Quelle position et quelle hauteur minimum doit avoir un miroir plan vertical pour qu'une personne placée debout à distance d puisse s'y voir de la tête aux pieds ?*

(*Ecole centrale, 1896, 1re session.*)

Soient A le sommet de la tête, B la place des pieds, O celle des yeux de l'observateur. Considérons le symétrique O′ du point O par rapport au miroir plan ; le champ de ce miroir est, comme on sait, limité par les droites qui joignent le point O′ aux divers points de son contour ; les limites doivent être ici O′A et O′B ; les points α et β où ces droites rencontrent le plan du miroir déterminent sa position. On voit aisément que, quelle que soit la distance d, $\alpha\beta$ est la moitié de AB; et la hauteur du point β au-dessus du sol la moitié de OB.

E. BARRÉ, à Valenciennes.

Solution exacte de M. J. Gauthier, à Saint-Etienne.

---

557. — *Dans un ballon, on chauffe* 1284^{gr} *d'iodate de potassium. On recueille le gaz qui se dégage, et on arrête l'expérience quand le volume mesuré est* $167^{lit},25$ *dans les conditions normales. Après refroidissement du ballon, on dissout dans l'eau le résidu qu'il contient, et on ajoute un excès d'acide sulfurique étendu. Il se forme un précipité.*

On demande :

1° *Le poids et la nature du gaz recueilli dans la première phase de l'expérience ;*

2° *Le poids et la nature du précipité obtenu dans la seconde. On le supposera d'ailleurs complètement insoluble dans la liqueur où se fait la réaction.*

$$\delta = 0{,}0695, \qquad H = 1, \qquad O = 16, \qquad K = 39, \qquad I = 127.$$

(*Ecole centrale, 1896, 1re session.*)

Exprimons le poids d'iodate en fonction du poids moléculaire :

$$x.IO^3K = 1284, \qquad \text{d'où} \qquad x = 6.$$

Exprimons de même le poids d'iodate décomposé :

$$y(IO^3K = KI + 3O).$$

Le volume atomique de l'oxygène étant la moitié du volume moléculaire $22^{lit},25$, on a

$$167{,}25 = 3y\,\frac{22{,}25}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad y = 5.$$

1° Le poids d'oxygène recueilli est $5 \times 3 \times 16 = 240^{gr}$.

2° Il reste exactement 1 poids moléculaire d'iodate non décomposé et 5 poids moléculaires d'iodure. Or l'acide sulfurique agit sur ce mélange comme l'indique l'équation

$$IO^3K + 5KI + 6SO^4H^2 = 6SO^4KH + 3H^2O + 3I^2.$$

Le précipité est donc de l'iode et son poids, représenté par $3I^2$, est de 762^{gr}.

Remarque. — En toute rigueur, le calcul donne $y = 5,0112...$, mais il est clair que, dans ces conditions, le désir de l'auteur du problème est qu'on arrondisse les nombres.

QUESTIONS PROPOSÉES

674. — D'un point M pris sur une ellipse on abaisse des perpendiculaires MP et MQ sur les axes de cette ellipse. Soient P et Q les points de rencontre de ces droites avec les axes de l'ellipse. On considère les deux cercles ayant pour centres les points P et Q et passant en M ; on demande les enveloppes de ces cercles.

L. Marthouret.

675. — On considère dans un plan un point O, une droite Δ et une courbe C. Soient M le point de contact d'une tangente à C et N le point où elle rencontre Δ.

Déterminer la courbe C de façon que l'angle formé par les deux droites OM et ON soit constant. Examiner les cas particuliers où cet angle est droit, Δ ayant une position quelconque et où la droite Δ est à l'infini, l'angle considéré ayant une valeur quelconque. (Id.)

676. — On considère les paraboles dont le foyer est un point donné F, sur Ox et qui sont tangentes à une droite donnée, Oy.

1° Lieu des sommets. — Construire pour une direction donnée de l'axe le sommet de la parabole et son point de contact M avec la tangente donnée. — Lieu du point de rencontre de la droite qui joint ces deux points avec la directrice.

2° Par un point P du plan passent deux de ces paraboles. — Discussion. — Construire leurs directrices, leurs sommets, leurs points de contact avec Oy. — Montrer que ces deux paraboles se coupent en deux points réels seulement et qu'elles s'y coupent sous le même angle.

3° Quel lieu doit décrire le point P pour que les axes des deux paraboles qui passent par ce point soient rectangulaires ? Chercher le lieu des points de rencontre de deux pareilles paraboles.

BIBLIOGRAPHIE

Éléments de Géométrie suivis d'un *Complément* à l'usage des élèves de mathématiques spéciales, par AMIOT. Nouvelle édition revue et augmentée par F. VINTÉJOUX. — Vol. in-8°, Paris, Delagrave.

Tout le monde connaît, au moins de nom, la Géométrie d'Amiot; c'est un ouvrage justement célèbre par la précision des définitions, la simplicité et l'élégance de l'exposition, la facilité, en un mot, avec laquelle l'élève peut être conduit depuis les principes jusqu'au seuil des plus hautes spéculations.

Cependant les méthodes d'enseignement ont continué à se modifier et à progresser; se modifier surtout puisque souvent l'on abandonne une démonstration en quelque sorte naturelle pour une autre, plus courte peut-être en comptant les mots, mais qui peut cacher le véritable caractère des choses et décourager l'élève en paraissant trop intuitive. D'ailleurs les programmes changent, eux aussi, et si M. Vintéjoux s'est chargé, en 1880, de donner une nouvelle édition des *Éléments de Géométrie* d'Amiot, c'était bien moins pour les corriger que pour les mettre en harmonie avec les programmes en vigueur.

M. Vintéjoux a été conduit, de la sorte, à refondre entièrement ce livre pour l'édition qui vient de paraître, tout en conservant, autant que possible, le plan si méthodique et le caractère de clarté et de simplicité qui en ont fait le succès.

Sans vouloir entrer ici dans le détail des différences qui existent entre cette édition et la précédente, nous

ne pouvons nous dispenser de signaler les principales additions qui ont été faites pour répondre aux besoins actuels de l'enseignement.

Au début de la géométrie plane on trouve, sous une forme aussi simple que possible, les notions essentielles sur la mesure des longueurs rectilignes, les nombres incommensurables et leurs rapports. Le déplacement fini d'une figure plane dans son plan et, plus tard, le déplacement d'un solide invariable sont encore traités d'une façon toute spéciale en tant que rigueur et simplicité. Les questions de similitude et de mesure des volumes ont été particulièrement bien exposées et un heureux *complement* renferme les premiers éléments des théories de la Géométrie moderne.

Il nous faudrait encore signaler le choix et la variété des questions proposées, mais une courte analyse ne saura jamais suppléer à la lecture du livre : celui qui ne sait point de Géométrie acquerra de rapides connaissances en lisant cet ouvrage et celui qui en sait un peu parcourra avec plaisir une série de déductions rendues si manifestes.

J. Mascart.

Géométrie dirigée : Les angles dans un plan orienté avec des droites dirigées ou non dirigées, à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires, par G. FONTENÉ, professeur au Collège Rollin. — In-8°, avec 88 figures. Paris, Nony et Cie.

Cet opuscule, fait avec soin, peut être utile aux élèves de Mathématiques Spéciales. Ceux qui le liront comprendront mieux la formule qui donne la tangente de l'angle V de deux droites, la relation $\alpha + \beta = 0$ (p. 79) ; ils n'oublieront pas qu'une droite δ représentée par une équation de la forme

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$$

est une droite dirigée, et que la distance d'un point M à cette droite est donnée par la formule

$$(M, \delta) = -(x \cos \alpha + y \cos \beta - p) ;$$

ils écriront pour l'aire d'un triangle

$$\overline{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin \theta ;$$

ils démontreront rigoureusement, et du premier coup, la formule $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$, et feront de même pour la formule relative aux asymptotes en coordonnées polaires, formule omise par l'auteur. Ils s'habitueront avec le même profit à donner des signes aux éléments de l'espace, distance d'un point à un plan, volume d'un tétraèdre, ...

L'emploi des formules

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\beta, \gamma)} = \frac{\overline{CA}}{\sin(\gamma, \alpha)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha, \beta)},$$

relatives à un triangle leur sera également utile pour l'Optique géométrique.

X...

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

7e Année N° 11. Août 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SOLUTION D'UNE QUESTION POSÉE AUX EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

par M. **J. Richard**, professeur au lycée de Tours.

Lieu d'une force dont la grandeur reste invariable, et qui a même moment par rapport à quatre droites données.

Nous allons résoudre cette question en nous appuyant sur certaines propriétés des droites communes à plusieurs complexes linéaires.

I. — Les forces (de grandeur constante) ayant même moment par rapport à deux droites fixes, forment un complexe linéaire (*).

Pour démontrer cette proposition, je vais faire voir que celles de ces forces qui sont situées dans un plan fixe, passent par un point fixe.

Soient, en effet, Δ et Δ' les deux droites données qui coupent le plan fixe P en A et B. Prenons sur Δ une longueur AM, et sur Δ' une longueur BN, ces deux longueurs égales entre elles et à l'unité. Soit CF une force ayant même moment par rapport aux deux droites. Les tétraèdres AMCF, BNCF devront avoir même volume. Les distances des points M et N au plan P restant invariables quand CF varie, le rapport des bases ACF, BCF doit être invariable, et comme ce rapport est égal à celui des distances de CF aux points A et B, ce dernier rapport doit lui-même être invariable, d'où il résulte facilement que CF coupe AB en un point fixe, ce qui démontre la proposition.

II. — D'après cela, si l'on a quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, une force F ayant même moment par rapport à ces quatre droites sera commune à trois complexes linéaires.

Pour déduire de là le lieu de la force F, je rappelle les propositions suivantes connues de tous ceux qui ont étudié la théorie des complexes.

A. Les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_3 y - \alpha_2 z = \alpha_4, \\ \alpha_1 z - \alpha_3 x = \alpha_5, \\ \alpha_2 x - \alpha_1 y = \alpha_6 \end{array}\right.$$

définissent une droite si l'on a : $\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_6 = 0$.

(*) Voir le numéro de la *Revue* d'octobre 1895.

B. Si l'on a deux droites, l'une ayant pour coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, l'autre, $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \alpha'_5, \alpha'_6$, la condition nécessaire et suffisante pour que ces droites se coupent est

$$\alpha_1\alpha'_4 + \alpha_2\alpha'_5 + \alpha_3\alpha'_6 + \alpha'_1\alpha_4 + \alpha'_2\alpha_5 + \alpha'_3\alpha_6 = 0.$$

C. Un complexe linéaire est l'ensemble des droites satisfaisant à une équation de la forme

$$A_4\alpha_1 + A_5\alpha_2 + A_6\alpha_3 + A_1\alpha_4 + A_2\alpha_5 + A_3\alpha_6 = 0$$

et l'on voit que si $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sont les coordonnées d'une droite D c'est-à-dire si l'on a

$$A_1A_4 + A_2A_5 + A_3A_6 = 0,$$

toutes les droites du complexe rencontreront cette droite D; on dit alors que le complexe est Spécial.

D. Les droites communes à deux complexes

$$A_4\alpha_1 + \ldots\ldots = 0 \qquad \text{ou} \qquad P = 0,$$

$$B_4\alpha_1 + \ldots\ldots = 0 \qquad \text{ou} \qquad Q = 0,$$

appartiennent évidemment au complexe $\lambda P + Q = 0$ ou

$$\alpha_1(\lambda A_4 + B_4) + \alpha_2(\lambda A_5 + B_5) + \ldots\ldots = 0;$$

déterminons λ de façon que ce troisième complexe soit Spécial; λ devra satisfaire à l'équation

$$(\lambda A_1 + B_1)(\lambda A_4 + B_4) + (\lambda A_2 + B_2)(\lambda A_5 + B_5) + (\lambda A_3 + B_3)(\lambda A_6 + B_6) = 0.$$

Cette équation étant du deuxième degré en λ détermine deux complexes spéciaux (en général distincts) dont font partie les droites appartenant aux deux complexes donnés. Les droites communes à deux complexes rencontrent donc deux droites fixes. (On verrait facilement que si ces deux droites sont confondues, les droites communes touchent une surface du second ordre passant par cette droite).

Il résulte immédiatement de là que les droites communes à nos trois complexes linéaires rencontreront quatre droites fixes et par conséquent que leur lieu est une surface du second ordre.

Remarque. — On voit que, pour une raison d'homogénéité, facile à apercevoir du reste, *a priori*, la grandeur de la force n'entre pas dans le calcul. On peut donc supprimer la condition pour cette force d'être de grandeur invariable.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

599. — *Sur l'une des bissectrices de l'angle formé par deux droites fixes, on prend un point fixe* A *autour duquel on fait tourner une droite ; on considère alors le cercle passant au sommet de l'angle fixe et aux points de rencontre des deux droites avec la sécante mobile.*

1° *Trouver le lieu du centre de ce cercle ;*

2° *Trouver l'enveloppe de ce cercle ;*

3° *Trouver le lieu du centre de similitude de deux cercles infiniment voisins du système ;*

4° *On joint le point* A *aux deux points qui divisent harmoniquement les extrémités des diamètres de deux cercles infiniment voisins sur la ligne qui unit leurs centres, et on demande le lieu des points de rencontre des bissectrices de l'angle des droites ainsi définies avec la ligne des centres.*

Construire les trois premières courbes en supposant les droites fixes rectangulaires.

1. Prenons pour axe des x la bissectrice sur laquelle se trouve le point A, pour axe des y, l'autre bissectrice ; désignons par a la longueur OA, par m et $-m$ les coefficients angulaires des deux droites.

La sécante passant au point A a pour équation $\lambda y + x - a = 0$, λ étant un paramètre arbitraire, et le cercle cherché,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0,$$

α et β désignant les coordonnées du centre. Nous aurons l'équation des droites qui joignent l'origine aux points de rencontre du cercle et de la sécante en formant une combinaison homogène des deux équations,

$$a(x^2 + y^2) - 2(\alpha x + \beta y)(x + \lambda y) = 0 ;$$

or ces deux droites sont représentées par $y^2 - m^2x^2 = 0$; en exprimant que l'autre équation est la même que celle-ci, nous obtenons

$$\alpha\lambda + \beta = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{a - 2\alpha}{a - 2\beta\lambda} + m^2 = 0.$$

Pour avoir le lieu du centre, il n'y a plus qu'à éliminer λ entre ces deux équations, ce qui donne

$$(1) \qquad 2(\alpha^2 - m^2\beta^2) - a(1 + m^2)\alpha = 0.$$

Si nous résolvons, au contraire, les deux équations par rapport à α et β, nous trouvons les deux équations du lieu en fonction d'un paramètre,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{2}\,\frac{1 + m^2}{1 - m^2\lambda^2}, \\ \beta &= -\frac{a}{2}\,\frac{(1 + m^2)\lambda}{1 - m^2\lambda^2}. \end{aligned} \right.$$

L'équation (1) nous montre immédiatement que le lieu du centre est une hyperbole ayant pour axe Ox, passant à l'origine et tangente à Oy en ce point, et ayant enfin pour directions asymptotiques les deux perpendiculaires aux droites données.

2. En portant les valeurs de α et de β, données par les équations (2), dans l'équation du cercle, on obtient l'équation

$$(1 - m^2\lambda^2)(x^2 + y^2) - a(1 + m^2)x + a\lambda(1 + m^2)y = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe de ce cercle en prenant la dérivée par rapport à λ et éliminant λ entre les deux équations. Nous trouvons ainsi successivement

$$-2m^2\lambda(x^2 + y^2) + a(1 + m^2)y = 0,$$

puis

$$\lambda = \frac{a(1 + m^2)y}{2m^2(x^2 + y^2)},$$

et, en portant dans la première équation,

$$(3) \qquad m^2[2(x^2 + y^2) - a(1 + m^2)x]^2 + a^2(1 + m^2)^2(y^2 - m^2x^2) = 0.$$

Cette équation représente une quartique bicirculaire ayant un point de rebroussement à l'origine et pour tangente en ce point l'axe des x. De plus, les tangentes issues de ce point à la courbe sont les droites données $y^2 - m^2x^2 = 0$.

3. Les tangentes communes à un cercle du système et à un autre cercle infiniment voisin sont tangentes au cercle envisagé aux points où il touche son enveloppe ; le centre de similitude est donc le pôle de la droite qui joint les deux points limites ; d'autre part, cette droite s'obtient aisément, soit en abaissant de l'origine une perpendiculaire sur la tangente au lieu des centres au point (α, β), soit en éliminant $x^2 + y^2$ entre l'équation du cercle et la dérivée de cette équation par rapport à λ. Nous obtenons ainsi

$$2m^2\lambda x - (1 + m^2\lambda^2)y = 0,$$

et nous avons à trouver le lieu du pôle de cette droite par rapport au cercle. En appelant x et y les

coordonnées de ce pôle, nous formons de suite les deux relations $(1+m^2\lambda^2)f'_x + 2m^2\lambda f'_y = 0$, $\lambda y - x = 0$, entre lesquelles l'élimination de λ se fait immédiatement. Nous trouvons ainsi

$$(4) \qquad 2x(y^2+m^2x^2)+4m^2xy^2-a(1+m^2)y^2=0.$$

Cette équation représente une cubique ayant une seule asymptote réelle et un point de rebroussement à l'origine avec Ox pour tangente en ce point.

4. Les droites qui joignent le point O aux extrémités des deux diamètres forment deux couples rectangulaires; le couple qui les divise harmoniquement est le couple isotrope. Par conséquent, en appelant I et I' les points de rencontre de ces droites avec la ligne des centres des deux cercles, c'est-à-dire la tangente au lieu des centres au point (α, β), puis H et H' les points de rencontre de cette même droite avec les bissectrices du couple AI, AI', le segment HH' est vu des deux points O et A sous des angles droits; il est donc déterminé par un cercle passant aux deux points O et A et ayant son centre sur la ligne des centres de deux cercles infiniment voisins.

Un cercle passant par les deux points O et A a pour équation

$$x^2+y^2-ax-\mu y=0;$$

il faut exprimer que son centre $\left(\frac{a}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$ est sur la tangente à l'hyperbole au point de paramètre λ trouvée en premier lieu ; en se servant des équations (2), on trouve de suite l'équation de cette droite,

$$(5) \qquad 2m^2\lambda y+(1+m^2\lambda^2)x-\frac{a}{2}(1+m^2)=0,$$

et il n'y a plus qu'à remplacer dans cette équation x par $\frac{a}{2}$, y par $\frac{\mu}{2}$ pour obtenir la valeur de μ ; on obtient ainsi

$$\mu=\frac{a}{2}\,\frac{1-\lambda^2}{\lambda},$$

et, par suite, le cercle qui donne les deux points H et H' a pour équation

$$x^2+y^2-ax-\frac{a}{2}\,\frac{1-\lambda^2}{\lambda}y=0.$$

Eliminons maintenant λ entre cette equation et l'équation (5) et nous aurons le lieu des points H et H',

$$(6) \qquad a^2(1+m^2)^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2y^2+4m^2(x-a)(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2-ax)\left(x-a\frac{1+m^2}{2}\right)+am^2y^2\right]=0.$$

Ce lieu est une courbe du 6e degré, symétrique par rapport à l'axe des x et ayant deux asymptotes parallèles à Oy.

Si l'on suppose maintenant que les deux droites données sont rectangulaires, on a $m=1$, et les trois premiers lieux ont des équations plus simples,

$$(a) \qquad x^2-y^2-ax=0,$$

$$(b) \qquad (x^2+y^2-ax)^2+a^2(y^2-x^2)=0,$$

$$(c) \qquad x(x^2+y^2)+2xy^2-ay^2=0.$$

La première représente une hyperbole équilatère qui se construit immédiatement. La troisième représente une cubique ayant une seule asymptote réelle, parallèle à Oy, et ayant un point de rebroussement en O avec Ox pour tangente en ce point. La forme de cette courbe est analogue à celle d'une cissoïde droite et il n'y a rien de plus à en dire.

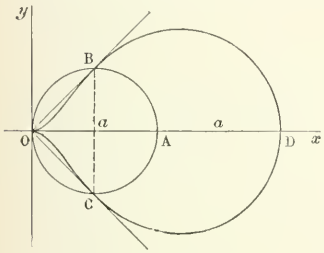
Quant à l'équation (b), elle représente une quartique bicirculaire que l'on construit aisément par

l'emploi des coordonnées polaires. En posant, en effet, $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$, cette équation devient

$$\rho^2 - 2a\rho \cos \omega + a^2 \sin^2 \omega = 0.$$

On voit de suite que l'on aura toute la courbe en faisant varier ω dans un intervalle total d'étendue égale à 2π, que le changement de ω en $-\omega$ n'altère pas les valeurs de ρ, par suite, que la courbe totale est symétrique par rapport à l'axe polaire, et, en outre, qu'il suffira de faire varier ω de 0 à π pour avoir une des moitiés de la courbe. Le changement de ω en $\pi - \omega$ change ρ en $-\rho$; on retrouve ainsi la symétrie par rapport à Ox et l'on voit qu'en définitive il suffit de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

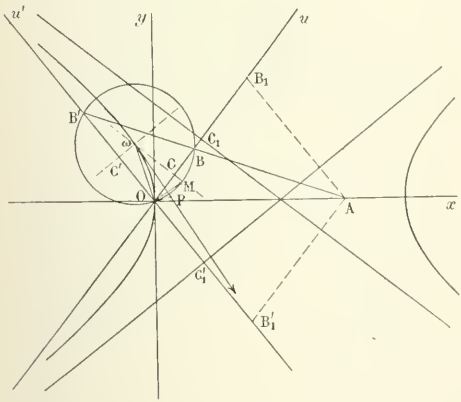
La demi-somme des racines est $a \cos \omega$, le lieu des milieux des cordes qui passent au point O est donc le cercle $\rho = a \cos \omega$ décrit sur OA comme diamètre. Pour avoir les points de la courbe, il faut d'abord, sur chaque direction ω, porter le ρ du cercle, puis, de part et d'autre du point ainsi obtenu, une longueur égale à $a\sqrt{\cos 2\omega}$. Cette longueur n'est réelle que quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, elle est maxima pour $\omega = 0$ et égale à a, minima et nulle pour $\omega = \frac{\pi}{4}$, et décroît constamment dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. La forme de la courbe est dès lors évidente.



Mais on peut aller plus loin, dans le cas où $m = 1$: on peut aussi discuter la dernière équation et construire le quatrième lieu. Nous laissons cet exercice à nos lecteurs.

Solution analytique incomplète de M. E. Barré, à Valenciennes.

Solution géométrique. — 1. Soient Ou, Ou' les deux droites données, ABB', la sécante et $C\omega$, $C'\omega$, les perpendiculaires élevées aux milieux des segments OB, OB'; elles se coupent en un point ω qui est le centre du cercle indiqué. Les points B et B' tracent sur u et u' deux divisions homographiques; il en est alors de même des milieux C et C' des deux segments OB et OB'; donc les deux rayons ωC et $\omega C'$ décrivent deux faisceaux homographiques ayant pour centres les points à l'infini sur les perpendiculaires à Ou et à Ou'. Par conséquent le lieu du point ω est une hyperbole ayant pour directions asymptotiques les directions normales à Ou et à Ou'. Cette courbe est évidemment symétrique par rapport à OA; elle passe au point O, parce que OC et OC' deviennent nuls en même temps; enfin son autre sommet correspond à la position particulière de la sécante qui est perpendiculaire à OA.



2. Les points où chaque cercle touche son enveloppe sont les deux points de rencontre de ce cercle avec le cercle infiniment voisin; l'un d'eux est toujours le point O; l'autre est le symétrique de O par rapport à la ligne des centres, qui est ici la tangente à l'hyperbole précédente au point ω. C'est ce second point, M, qui décrit la véritable enveloppe. Il résulte de ce qui précède que cette courbe est l'homothétique de la podaire du point O par rapport à l'hyperbole, dans le rapport 2; cette dernière courbe est trop connue pour qu'il y ait lieu d'insister maintenant

sur l'enveloppe du système de cercles. Enfin il y a une autre partie de l'enveloppe qui, au point de vue tangentiel, se réduit au point O.

3. Nous avons vu que le centre de similitude du cercle considéré et du cercle infiniment voisin est le pôle de OM par rapport à ce cercle, s'il s'agit du centre de similitude extérieure. Le centre de similitude intérieure est visiblement le point ω. Cherchons le lieu du premier point P. Pour cela, remarquons que ce point s'obtient en menant un rayon $O\omega$, prenant son point de rencontre avec l'hyperbole, puis la tangente à cette courbe en ce point, et élevant enfin OP perpendiculaire sur $O\omega$ en O; le point P est le point de rencontre de OP avec la tangente à l'hyperbole en ω. Or les deux rayons OP et $O\omega$ décrivent deux faisceaux homographiques; le faisceau du second ordre engendré par les tangentes à l'hyperbole est rapporté perspectivement au faisceau du premier ordre, $O\omega$; il est donc projectivement rapporté au faisceau du premier ordre, OP; et le lieu du point où se coupent deux rayons homologues est une cubique ayant pour point double le point O. Ici le point double est un point de rebroussement, la tangente en ce point est OA; OA est, au surplus, un axe de symétrie.

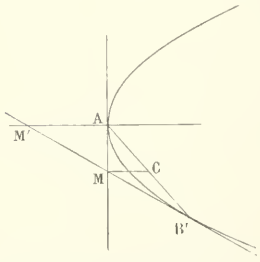
Le point P est à l'infini, quand OP et ωP sont parallèles, c'est-à-dire quand OM est normale à l'hyperbole. Il y a trois normales, autres que la normale en O; il y a donc trois directions asymptotiques parallèles aux tangentes menées aux pieds de ces trois normales; l'un de ces points est réel, c'est le deuxième sommet de l'hyperbole; les deux autres sont imaginaires. Il y a donc une direction asymptotique réelle, parallèle à Oy, et deux imaginaires. La courbe a dès lors une forme connue.

4. Le quatrième lieu est le lieu des points de rencontre d'une tangente à l'hyperbole avec le cercle ayant son centre au point de rencontre de cette droite et de la perpendiculaire sur OA en son milieu. A chaque cercle ayant son centre sur cette perpendiculaire correspondent deux tangentes à l'hyperbole, chacune d'elles donne deux points du lieu, ses points de rencontre avec le cercle; donc sur chaque cercle il y a quatre points du lieu. Mais il faut observer que tous ces cercles passent par quatre points fixes, O, A, et les deux points circulaires à l'infini; de chacun d'eux, on peut mener deux tangentes à l'hyperbole; par conséquent chacun de ces points est obtenu deux fois et est un point double du lieu; le point O est, en particulier, un point de rebroussement, car les deux tangentes menées de ce point à l'hyperbole sont confondues. Il y a donc douze points du lieu sur un cercle du système, et ceci montre que le lieu est du sixième ordre. Les particularités que présente cette courbe ont été rencontrées pour la plupart dans le raisonnement précédent : il n'y a plus qu'à remarquer que le point à l'infini sur la perpendiculaire à OA est donné deux fois, par les deux tangentes aux sommets de l'hyperbole, et est un point double, et qu'en outre les asymptotes correspondantes sont les symétriques de ces tangentes par rapport au milieu de OA.

---

605. — *Une cissoïde droite de grandeur variable a son point de rebroussement en un point fixe* A *et passe en un point fixe* B. *Montrer que le cercle tangent à la cissoïde en* B *et passant par* A *rencontre la tangente et la normale au point de rebroussement en deux points qui décrivent chacun une droite.*

Si on prend pour centre d'inversion le point A, la cissoïde se transforme en une parabole ayant pour sommet le point A. En effet, sur toute droite passant en A, il y a un point ordinaire, M, de la courbe qui a pour correspondant un certain point, M'; d'autre part, les trois points à l'infini de la cissoïde sont les points cycliques et un point réel; ce dernier a pour correspondant l'origine, les deux points cycliques ont pour correspondants les points des droites qui les joignent au point A, et, comme nous ferons abstraction de ces droites, la transformée par inversion ne passe qu'une fois au point A. Cette courbe est donc du second ordre; comme l'origine est un point double, elle a deux directions asymptotiques confondues dans la direction de la tangente au point de rebroussement; c'est donc une parabole. Il est d'ailleurs évident qu'elle a pour axe de symétrie la tangente de rebroussement et le fait annoncé est établi.



Cette parabole passe au point B' correspondant de B. Le cercle tangent à la cissoïde en B et passant en A se transforme en une droite tangente à la parabole en B', et l'on est ramené à trouver les lieux des points de rencontre de cette tangente avec la tangente au sommet et l'axe de la parabole.

La droite MC est le diamètre de la direction AB, par suite le point C est fixe, et, comme l'angle AMC est droit, le lieu du point M est le cercle décrit sur AC comme diamètre. D'ailleurs $B'M' = 2B'M$: le lieu du point M′ est donc aussi un cercle qui passe au point A et qui a un diamètre double du précédent. Dans la première figure, ces deux cercles ont pour correspondants deux droites perpendiculaires à AB.

A. BRIÈRE.

Bonnes solutions géométriques : MM. R. Hauser, à Clermont-Ferrand ; J. Merlin, à Versailles.
Ont envoyé de bonnes solutions analytiques : MM. R. Hauser, à Clermont-Ferrand ; Xambeu (collège Chaptal) ; E. Barré, à Valenciennes.

---

612. — *Autour d'un point* P *on fait pivoter une droite dont on prend les pôles* Q, Q′ *par rapport à deux coniques données.*

1° *L'enveloppe de la droite* QQ′ *est une conique* (C).

2° *Quelle doit être la position du point* P *pour qu'il soit un foyer de la conique* (C) ?

1. Prenons pour origine le point P et pour axes deux droites rectangulaires passant en ce point ; puis désignons par

$$f(u, v, w) \equiv au^2 + 2buv + \cdots + fw^2 = 0,$$
$$f_1(u, v, w) \equiv a_1u^2 + 2b_1uv + \cdots + f_1w^2 = 0,$$

les équations tangentielles des deux coniques données. Pour qu'une droite soit une droite QQ′, il faut et il suffit que ses deux pôles par rapport aux coniques f et f_1 soient en ligne droite avec le point P. Or les pôles d'une droite (u, v, w) par rapport à ces deux coniques ont pour coordonnées homogènes

$$f'_u,\quad f'_v,\quad f'_w \qquad \text{et} \qquad f'_{1u},\quad f'_{1v},\quad f'_{1w}.$$

La condition à laquelle doit satisfaire la droite QQ′ est donc $f'_u f'_{1v} - f'_{1u} f'_v = 0$ ou

$$(1) \qquad (au + bv + dw)(b_1u + c_1v + e_1w) - (a_1u + b_1v + d_1w)(bu + cv + ew) = 0\,;$$

c'est l'équation tangentielle de l'enveloppe de QQ′. On voit donc que cette droite enveloppe une conique.

2. Les coefficients angulaires des tangentes menées de l'origine à cette conique sont donnés par l'équation

$$(au + bv)(b_1u + c_1v) - (a_1u + b_1v)(bu + cv) = 0\,;$$

pour que l'origine soit un foyer, il faut que cette équation se réduise à $h(u^2 + v^2) = 0$. On trouve ainsi

$$ac_1 - ca_1 = 0$$

et

$$ab_1 - ba_1 = bc_1 - cb_1\,;$$

la première équation donne $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{c_1}{c}$ et l'on peut prendre $a_1 = a$, $b_1 = b$; la seconde devient alors $(b_1 - b)(a + c) = 0$; elle donne $b_1 = b$ ou $c = -a$. La première solution est peu intéressante, car si l'on a encore $b_1 = b$, les tangentes menées de l'origine aux deux coniques sont confondues et la conique (1) se décompose en deux points : l'origine et un autre : le point P n'est donc pas un foyer proprement dit. La seconde solution, $a + c = 0$, montre que les tangentes que l'on peut mener du point P à chacune des coniques sont rectangulaires. Le point P est donc un point de rencontre des cercles orthoptiques des deux coniques.

On pourrait chercher pour quelles positions du point P la conique (1) se décompose et comment elle se décompose ; mais la solution géométrique mettra mieux en relief ces diverses particularités.

Bonne solution de M. G. Rousier.

Solution géométrique. — Soient C et C′ les deux coniques données, p et p' les polaires du point P par rapport à ces deux coniques. Une droite u passant au point P a pour pôles deux points Q et Q′ qui décrivent respectivement les droites p et p' ; d'autre part, les séries Q et Q′ sont homographiques au faisceau des droites u, elles sont donc homographiques entre elles ; par suite, la droite QQ′ enveloppe une conique tangente aux deux droites p et p'.

Pour que cette conique se décompose, il faut que le point de rencontre des deux droites p et p' se corresponde à lui-même, c'est-à-dire qu'il y ait une droite passant par le point P et ayant même pôle dans les deux coniques. Donc le point P doit être situé sur l'un des côtés du triangle autopolaire commun aux deux coniques. Alors la conique considérée se décompose en deux points : le sommet opposé dans le triangle autopolaire et un autre point par lequel passent les droites QQ′ proprement dites.

Cherchons les droites QQ′ qui passent par le point P : ce sont celles qui ont même conjugué harmonique par rapport aux deux couples de tangentes menés du point P aux deux coniques C et C′ : ce sont donc les rayons doubles du faisceau involutif déterminé par ces deux couples de tangentes. Le point P sera un foyer si ces deux droites sont isotropes, c'est-à-dire si les deux couples de tangentes sont rectangulaires.

Bonnes solutions : MM. E. Barré, à Valenciennes ; E. Dufour (lycée de Lille) ; J. Lhériaud (lycée de Toulouse).

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires.

1° Les droites Δ qui sont coupées harmoniquement par deux cercles donnés C et C′ enveloppent une conique ; montrer que cette conique reste la même lorsqu'on remplace les deux cercles C et C′ par deux autres respectivement concentriques aux précédents et tels que la somme des carrés des rayons des deux nouveaux cercles soit égale à la somme des carrés des rayons des deux premiers.

2° Trouver le lieu des centres des cercles S qui sont coupés harmoniquement par deux cercles donnés C et C′ et qui sont orthogonaux à un troisième cercle donné Γ. Ce lieu est une conique Σ dont on déterminera les directions asymptotiques et dont on discutera le genre en admettant que le centre de Γ se déplace d'une façon quelconque dans le plan, tandis que les cercles C et C′ restent fixes.

On montrera que la direction des axes de Σ ne dépend que des positions des centres des trois cercles donnés et nullement de leurs rayons.

3° Trouver le lieu du centre de la conique Σ dans les deux hypothèses suivantes : 1° on fait varier le rayon du cercle Γ en laissant fixes le centre de ce cercle et les deux cercles C et C′ ; 2° on laisse fixe le cercle Γ, ainsi que les centres de C et de C′, et on fait varier les rayons de ces deux derniers cercles de telle sorte que la somme de leurs carrés reste constante.

4° Démontrer que les cercles S orthogonaux au cercle Γ et coupés harmoniquement par deux cercles C et C′ sont aussi coupés harmoniquement par une infinité de couples de cercles que l'on cherchera à caractériser géométriquement.

Nota. — On dit qu'un cercle S est coupé harmoniquement par deux cercles C et C′, lorsque le rapport anharmonique des deux points de rencontre de S avec C et des deux points de rencontre de S avec C′ est, sur le cercle S, égal à -1.

(*1er juillet, de 7 h. à 2 h.*)

Mathématiques spéciales.

677. — On considère un paraboloïde équilatère ayant pour équation par rapport à des axes rectangulaires

$$z = xy\,;$$

on prend sur l'axe Ox un segment

$$OM = \lambda$$

et sur l'axe Oy un segment

$$OM' = \mu,$$

ces deux segments étant liés par une relation de la forme

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0,$$

où a, b, c, d désignent des constantes réelles.

1° Trouver la courbe Γ, lieu du point de rencontre de la génératrice rectiligne MG du paraboloïde passant par le point M de Ox avec le plan mené par Oz perpendiculairement à la droite MM'.

2° Combien existe-t-il de surfaces du deuxième ordre qui passent par cette courbe Γ ; étudier le nombre des points d'intersection de Γ avec les génératrices rectilignes du paraboloïde donné ; discuter la réalité de ces points.

3° Établir la relation nécessaire et suffisante qui doit lier les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4 de quatre points de la courbe Γ, pour que ces quatre points soient dans un même plan. Former l'équation aux abscisses des points où le plan osculateur coupe la courbe en quatre points confondus ; résoudre et discuter cette équation.

Indiquer le nombre de plans osculateurs qu'on peut mener d'un point de l'espace à la courbe Γ.

4° Comment faut-il déterminer les coefficients a, b, c, d pour que les tangentes à la courbe Γ fassent partie d'un complexe linéaire ?

5° On désigne par Γ_1 la courbe du quatrième ordre qui correspond à cette détermination particulière des constantes a, b, c, d. Déterminer les points de contact des plans osculateurs menés d'un point donné P de l'espace à cette courbe Γ_1 ; démontrer que ces points sont dans un plan passant par P.

Nota. — On dit qu'une droite mobile

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

appartient à un complexe linéaire, quand les coefficients x_0, y_0, z_0, α, β, γ vérifient une équation de la forme

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + L(\gamma y_0 - \beta z_0) + M(\alpha z_0 - \gamma x_0) + N(\beta x_0 - \alpha y_0) = 0,$$

A, B, C, L, M, N désignant des constantes.

(2 juillet, de 7 h. à 2 h.)

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 = F\left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{z^2}\right),$$

où p, q désignent les dérivées partielles du premier ordre de z considéré comme fonction de x, y.

1° Former les équations des caractéristiques et prouver que ces équations admettent deux intégrales qui ne dépendent pas de la forme de la fonction F.

2° Déduire du résultat obtenu que les courbes caractéristiques sont planes et que les développables caractéristiques sont des cônes. Dire quelle relation existe entre le plan d'une courbe caractéristique et le sommet du cône caractéristique circonscrit suivant cette courbe.

3° Indiquer comment l'on pourra utiliser ces résultats pour intégrer complètement l'équation proposée.

4° On mènera l'intégration jusqu'au bout dans le cas particulier où la fonction F a la forme

$$A\,\frac{x^2 + y^2 + 1}{z^2} + B,$$

A, B désignant deux constantes.

Montrer que, dans ce cas, une intégrale complète est fournie par une surface du second degré dépendant de deux paramètres.

(3 juillet, de 7 h. à 2 h.)

Mécanique rationnelle.

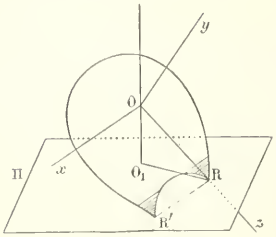
Un corps solide pesant, mobile autour d'un point fixe O, repose par deux de ses points R et R' sur un plan horizontal fixe H situé au-dessous de O. Soit OO_1 la perpendiculaire abaissée de O sur le plan H : on suppose que l'angle ORR' est droit et que l'on a, lorsque le corps repose sur le plan H,

$$OO_1 = O_1R = RR' = a.$$

Le point R glisse *avec frottement* sur le plan H, le point R' glisse *sans frottement*.

Trouver le mouvement du corps en supposant qu'on lui imprime une vitesse initiale ω_0 (positive ou négative) de rotation autour de la verticale ascendante O_1O.

On prendra comme axes liés au corps la droite Oz dirigée suivant OR, la droite Ox parallèle à RR' et dirigée dans le sens RR', la droite Oy perpendiculaire au plan xOz et dirigée vers le haut. On supposera que les droites Ox, Oy, Oz sont les axes principaux d'inertie du corps relatifs au point O, et on appellera A, B, C les moments d'inertie correspondants. On désignera par ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité G du corps par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.



On se bornera à écrire les équations du mouvement dans le cas général où les coordonnées ξ, η, ζ sont quelconques.

On discutera le problème dans les deux cas particuliers suivants :

1° Le centre de gravité G est sur la partie positive de l'axe Oz;

2° Le centre de gravité G est sur la partie positive de l'axe Ox.

S'il arrive que l'un des points R et R' quitte le plan H, ou que ces deux points le quittent à la fois, on se bornera à signaler ce fait sans étudier le mouvement ultérieur.

(5 juillet, de 7 h. à 2 h.)

BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DE SCIENCES

I. — Mathématiques.

678. — 1° Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy, on donne une droite (D) dont l'équation est

$$y = ax + b\,;$$

déterminer la parabole qui a son sommet en O, son axe dirigé suivant Ox et qui est normale à la droite (D); calculer en fonction de a et b les coordonnées du point P où cette parabole est normale à la droite D et du second point Q où elle rencontre cette même droite.

2° Trouver les lieux décrits par les points P et Q en supposant que la droite (D) tourne autour d'un point fixe, de coordonnées x_0, y_0.

On figurera les diverses formes que peut affecter ce dernier lieu.

(29 juin, de 8 h. à midi.)

II. — Sciences physiques.

Physique.

I. — **679.** — Un baromètre à siphon contient de l'air sec dans la petite branche, qui est fermée.

A la température de 0°, et en un point A du globe, la distance verticale du mercure dans les deux branches est $76^{cm},235$, et le volume de l'air dans la petite branche est $5^{cc},000$.

A la température de 23°, et en un autre point B du globe, la distance verticale du mercure dans les deux branches est $76^{cm},985$, et le volume de l'air dans la petite branche $5^{cc},375$.

Quel est le rapport des intensités de la pesanteur aux points A et B? Le coefficient de dilatation de l'air est 0,00367. Le coefficient de dilatation absolue du mercure, 0,00018.

II. — **680.** — Un petit objet est placé dans un plan perpendiculaire à l'axe principal d'une lentille infiniment mince, et rencontre cet axe; il est situé à une distance telle, qu'un œil placé de l'autre côté de la lentille, et dont le point nodal est sur l'axe principal, en voit une image virtuelle.

Démontrer qu'en intervertissant la position de l'œil et de l'objet, le grossissement n'est pas changé.

Cette propriété subsiste-t-elle si, au lieu d'une lentille infiniment mince, on a une lentille épaisse, ou un système dioptrique centré?

Chimie.

I. — Azote. Analyse de l'air atmosphérique.

II. — **681.** — On se sert comme oxydant d'une dissolution de permanganate de potassium, additionnée d'acide sulfurique, et contenant par litre 1/50 de molécule de permanganate.

Quelles doivent être les concentrations respectives exprimées en fractions de molécule, de dissolutions :

1° d'eau oxygénée,

2° d'acide sulfureux,

3° de sulfate ferreux,

4° d'anhydride arsénieux,

pour que des volumes égaux de ces dissolutions soient oxydés par un même volume de permanganate?

Comment peut-on vérifier la nature des produits formés dans les réactions précédentes?

(29 juin, de 8 h. à midi.)

QUESTIONS PROPOSÉES

682. — Deux coniques, l'une inscrite, l'autre circonscrite au triangle ABC ont le même cercle orthoptique.

1° Trouver le lieu du centre commun.

2° Les tangentes à la conique circonscrite, aux points A, B et C, rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite. Trouver l'enveloppe de cette droite et le lieu de son pôle par rapport à cette conique.

P. Puig, professeur au lycée de Bordeaux.

683. — On considère un triangle TPQ inscrit dans une conique Σ. L'un des sommets T est fixe, le côté opposé passe par un point fixe M ; les deux autres côtés rencontrant une droite fixe D en deux points A et B, on demande le lieu des points de rencontre des tangentes menées par A et B à Σ. Ce lieu est une conique C, dont on demande l'enveloppe lorsque le point T se déplace sur la conique Σ. Dans la même hypothèse, on demande le lieu des points de rencontre des tangentes à Σ aux points communs à C et à Σ. Examiner le cas particulier où le point M est sur la droite D.

J. Vidaillet.

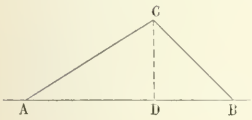
DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

591. — *On demande de former avec un périmètre donné $2a$ un triangle* ABC *tel qu'en le faisant tourner autour de son côté* AB *on engendre le volume le plus grand possible.*

(Ecole des Ponts et Chaussées, Cours prép., 1896.)

Soient x, y, z les longueurs des côtés respectivement opposés à A, B, C.



Le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de AB a pour expression $\frac{\pi}{3}\overline{CD}^2 \cdot AB$; or $CD \cdot AB$ représente le double de l'aire du triangle ABC; en désignant cette aire par S on a donc $\overline{CD}^2 = \frac{4S^2}{\overline{AB}^2}$; par conséquent le volume cherché a pour expression

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{S^2}{AB},$$

ou

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a(a-x)(a-y)(a-z)}{z}.$$

Cherchons d'abord le maximum de V en laissant fixe le côté z et en faisant varier x et y de façon à satisfaire aux conditions de l'énoncé; nous aurons simplement à trouver le maximum du produit $(a-x)(a-y)$; et, comme les deux facteurs $a-x$, $a-y$, ont une somme constante, ce maximum aura lieu quand les deux facteurs seront égaux. Cela nous donne $x=y$, et nous avons

maintenant à trouver le maximum de $\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{(a-x)^2(a-z)}{z}$, x et z étant liés par la relation $2x+z=2a$. Nous tirons de là $z=2(a-x)$ et nous sommes ramené à chercher le maximum de $\frac{2\pi}{3}(a-x)(2x-a)$, c'est-à-dire le maximum d'un trinome du second degré, $-2x^2+3ax-a^2$; il a lieu pour une valeur de x égale à la demi-somme des racines, $x=\frac{3a}{4}$.

Les trois côtés du triangle ont donc alors pour longueurs, $x=\frac{3a}{4}$, $y=\frac{3a}{4}$, $z=\frac{a}{2}$.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

562. — *Soit* M *un point du plan d'une parabole* P *et* AB *la corde polaire de* M *par rapport à* P.

1° *Le lieu des points* M *tels que l'orthocentre du triangle* MAB *soit sur la parabole* P *se compose d'une cubique et d'une ligne droite.*

2° *Dans les mêmes conditions, le lieu du centre de gravité du triangle* MAB *se compose d'une quartique et d'une parabole.*

3° *Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MAB *se compose d'une quartique et d'une parabole.*

4° *Trouver aussi le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* MAB.

1° Soient $y^2-2px=0$ l'équation de la parabole et α, β les coordonnées du point M.

L'orthocentre H du triangle MAB a pour coordonnées (voir question 561)

$$x=-(\alpha+p),\qquad y=\frac{2\beta(\alpha+p)}{p};$$

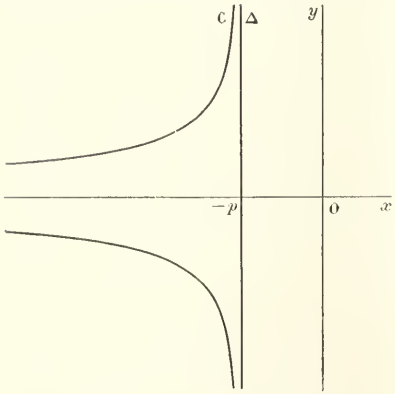
pour que ce point soit sur la parabole il faut qu'on ait

$$(\alpha+p)\left[\frac{4\beta^2(\alpha+p)}{p^2}+2p\right]=0;$$

on doit donc avoir l'une ou l'autre des conditions

$$(1)\qquad \alpha+p=0,$$

$$(1)'\qquad 2\beta^2(\alpha+p)+p^3=0.$$



En y considérant α et β comme des coordonnées courantes la première de ces équations représente une droite Δ, la deuxième une cubique C asymptote à Δ et que l'on construit aisément.

Quand le point M est sur la droite Δ le point de concours des hauteurs du triangle MAB coïncide avec le sommet de la parabole.

2° Les coordonnées du centre de gravité G du triangle MAB sont

$$(G)\qquad x=\frac{2\beta^2-p\alpha}{3p},\qquad y=\beta.$$

1. Eliminons d'abord α et β entre ces équations et la relation (1), nous obtenons

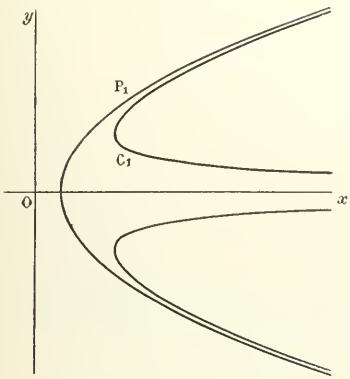
$$(2)\qquad x=\frac{2y^2+p^2}{3p}$$

équation d'une parabole P_1 ayant pour axe Ox.

II. En éliminant ensuite α et β entre les équations (G) et (1)′ on a

$$(2)' \qquad 2y^2(2y^2 - 3px + p^2) + p^4 = 0 \;;$$

c'est l'équation d'une quartique C_1 qui est asymptote à la parabole P_1. En effet, cette équation peut s'écrire



$$x = \frac{2y^2 + p^2}{3p} + \frac{p^3}{6y^2}.$$

On construit facilement cette courbe en augmentant les abscisses des points de la parabole P_1 de la quantité $\frac{p^4}{6y^2}$.

3° On sait que le centre ω du cercle circonscrit au triangle MAB est situé sur la droite GH, et l'on a

$$\frac{\overline{\omega G}}{\overline{\omega H}} = \frac{1}{3};$$

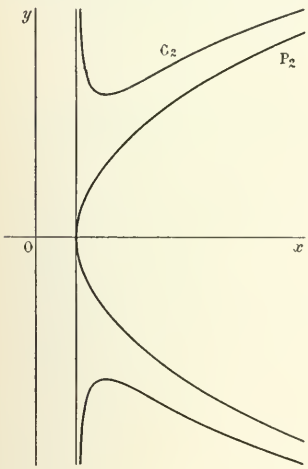
par suite les coordonnées du point ω sont

$$x = \frac{\dfrac{2\beta^2 - p\alpha}{3p} + \dfrac{1}{3}(\alpha + p)}{1 - \dfrac{1}{3}}, \qquad y = \frac{\beta - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2\beta(\alpha + p)}{p}}{1 - \dfrac{1}{3}},$$

ou

$$(\omega) \qquad x = \frac{2\beta^2 + p^2}{2p}, \qquad y = \frac{\beta(p - 2\alpha)}{2p}.$$

I. Remplaçons d'abord dans ces équations α par $-p$, nous obtenons les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un seul paramètre β



$$(3) \qquad x = \frac{2\beta^2 + p^2}{2p}, \qquad y = \frac{3\beta}{2};$$

ces équations représentent une parabole P_2 ayant pour axe Ox et pour sommet le point $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

II. De l'équation (1)′ on tire

$$\alpha = -p - \frac{p^3}{2\beta^2},$$

et en remplaçant α par cette valeur dans l'ordonnée du point ω, on a pour les coordonnées d'un point du lieu

$$x = \frac{2\beta^2 + p^2}{2p}, \qquad y = \frac{3\beta^2 + p^2}{2\beta}.$$

Ces équations représentent une courbe du troisième degré C_2; en écrivant la valeur de y sous la forme $\frac{3\beta}{2} + \frac{p^2}{2\beta}$, on reconnaît que cette courbe est asymptote à la parabole P_2.

Le lieu se compose donc de la parabole P_2 et de la courbe C_2.

4° On sait que le centre I du cercle des neuf points est le milieu de ωH ; les coordonnées de ce

point sont

$$x = \frac{-(\alpha+p)+\dfrac{2\beta^2+p^2}{2p}}{2}, \qquad y = \frac{\dfrac{2\beta(\alpha+p)}{p}+\dfrac{\beta(p-2\alpha)}{2p}}{2},$$

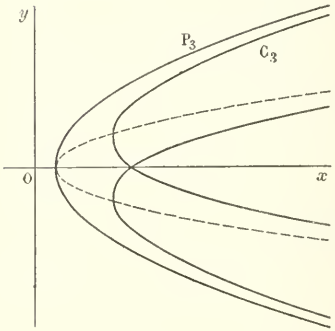
ou (1) $$x = \frac{2\beta^2-2p\alpha-p^2}{4p}, \qquad y = \frac{\beta(2\alpha+5p)}{4p}.$$

I. Remplaçons dans ces équations α par $-p$, nous avons

$$x = \frac{2\beta^2+p^2}{4p}, \qquad y = \frac{3\beta}{4};$$

ce sont les équations d'une parabole P_3 ayant pour axe Ox et pour sommet le point $\left(\frac{p}{4}, 0\right)$.

II. Remplaçons ensuite α par $-p-\frac{p^3}{2\beta^2}$, nous obtenons



$$x = \frac{2\beta^2+p^2}{4p}+\frac{p^3}{4\beta^2}, \qquad y = \frac{3\beta}{4}-\frac{p^2}{4\beta}.$$

Ces équations représentent une courbe du quatrième degré C_3 située tout entière à l'intérieur de la parabole P_3. Les branches infinies relatives aux valeurs infiniment grandes de β sont asymptotes à la parabole.

Les branches infinies relatives aux valeurs infiniment petites de β sont asymptotes à une autre parabole définie par les équations

$$x = \frac{p}{4}+\frac{p^3}{4\beta^2}, \qquad y = -\frac{p^2}{4\beta};$$

elle est représentée sur la figure en traits discontinus.

Le lieu du centre du cercle des neuf points se compose de la parabole P_3 et de la quartique C_3.

---

596. — *On considère un triangle rectangle isocèle* ABC *et le cercle circonscrit à ce triangle; sur ce cercle on prend un point* M *que l'on joint aux points* A, B *et* C, *et l'on désigne par* A′, B′ *et* C′ *les points de rencontre de ces droites avec les côtés du triangle respectivement opposés aux sommets* A, B *et* C; *on considère en outre le cercle* Γ *qui passe aux points* A′, B′ *et* C′.

1° *Montrer que lorsque* M *décrit le premier cercle, les cercles* Γ *ont leurs centres sur une ligne droite et sont orthogonaux à un cercle fixe.*

2° *Le cercle* Γ *rencontre à nouveau les côtés du triangle* ABC *en* A″, B″, C″. *Montrer que les droites* AA″, BB″, CC″ *concourent en un point* M′ *du cercle circonscrit au triangle* ABC *et que la droite* MM′ *passe par un point fixe quand* M *varie.*

3° *Trouver le lieu du pôle de* MM′ *par rapport à* Γ.

Prenons pour axes de coordonnées les deux côtés de l'angle droit CA, CB et soit $CA = CB = a$. L'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est

$$x^2+y^2-a(x+y) = 0.$$

Si λ désigne le coefficient angulaire de AM, les équations des droites perpendiculaires, AM et BM, sont respectivement

$$y-\lambda(x-a) = 0, \qquad x+\lambda(y-a) = 0;$$

on en déduit aisément les coordonnées du point M,

$$x = \frac{a\lambda(\lambda+1)}{\lambda^2+1}, \qquad y = \frac{a(\lambda-1)}{\lambda^2+1}.$$

Les coordonnées du point C′ sont $\frac{a(\lambda+1)}{2\lambda}$ et $\frac{a(\lambda-1)}{2\lambda}$; celles du point A′, 0 et $-\lambda a$; celles du point B′, λa et 0.

Cela posé, soit

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$$

l'équation du cercle Γ. Ecrivons qu'il passe par les points A′, B′, C′, nous avons

$$\lambda^2a^2+2\beta\lambda a+\gamma=0,$$

$$\lambda^2a^2-2\alpha\lambda a+\gamma=0,$$

$$a^2(\lambda^2+1)-2a\lambda[\alpha(\lambda+1)+\beta(\lambda-1)]+2\lambda^2\gamma=0$$

Des deux premières on tire

$$\alpha=\frac{\gamma+\lambda^2a^2}{2\lambda a}, \qquad \beta=-\frac{\gamma+\lambda^2a^2}{2\lambda a},$$

et en portant ces valeurs dans la troisième, on obtient

$$(\lambda^2-1)(2\gamma-a^2)=0$$

On ne peut avoir $\lambda^2-1=0$, car alors le point M coïnciderait avec l'un des points A et B. La dernière égalité donne donc $\gamma=\frac{a^2}{2}$ et par suite $\alpha=-\beta=\frac{a(2\lambda^2+1)}{4\lambda}$.

Il en résulte que l'équation du cercle Γ est

$$x^2+y^2-\frac{a(2\lambda^2+1)}{2\lambda}(x-y)+\frac{a^2}{2}=0.$$

1. On voit immédiatement que le lieu du centre est la droite $x+y=0$.

D'autre part, la puissance de l'origine par rapport au cercle Γ est constante et égale à $\frac{a^2}{2}$; le cercle Γ est donc orthogonal au cercle qui a pour équation

$$x^2+y^2-\frac{a^2}{2}=0.$$

2. Le cercle Γ est déterminé lorsqu'on connaît son centre

$$x_0=-y_0=\frac{a(2\lambda^2+1)}{4\lambda}.$$

Or au cercle Γ correspondent deux points tels que M, ces deux points M et M′ étant définis par les deux racines de l'équation en λ

(1) $$2a\lambda^2-4x_0\lambda+a=0.$$

Le cercle Γ est donc aussi circonscrit à un triangle A″B″C″ analogue au triangle A′B′C′, le point M étant remplacé par M′. Comme le point M′ est distinct du point M, les points A″, B″, C″ sont distincts des points A′, B′, C′ et sont les points où le cercle Γ rencontre à nouveau les côtés du triangle ABC.

Les coordonnées des points M et M′ sont

$$\text{M}\begin{cases} x=\dfrac{a\lambda_1(\lambda_1+1)}{\lambda_1^2+1}, \\ y=\dfrac{a\lambda_1(\lambda_1-1)}{\lambda_1^2+1}, \end{cases} \qquad \text{M}'\begin{cases} x=\dfrac{a\lambda_2(\lambda_2+1)}{\lambda_2^2+1}, \\ y=\dfrac{a\lambda_2(\lambda_2-1)}{\lambda_2^2+1}, \end{cases}$$

λ_1 et λ_2 désignant les racines de l'équation (1).

L'équation de la droite MM′ est

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2-1)x+(\lambda_1\lambda_2-\lambda_1-\lambda_2-1)y-2a\lambda_1\lambda_2=0;$$

comme on a $\lambda_1+\lambda_2=\frac{2x_0}{a}$, $\lambda_1\lambda_2=\frac{1}{2}$, cette équation devient

$$(4x_0-a)x-(4x_0+a)y-2a^2=0,$$

ce qui montre que la droite MM′ passe par un point fixe défini par les équations

$$x-y=0, \qquad x+y+2a=0.$$

3. L'équation du cercle Γ peut s'écrire

$$x^2+y^2-2x_0(x-y)+\frac{a^2}{2}=0,$$

par suite les coordonnées du pôle de MM′ par rapport à ce cercle sont déterminées par les équations

$$\frac{x-x_0}{4x_0-a}=\frac{y+x_0}{-4x_0-a}=\frac{-x_0(x-y)+\frac{a^2}{2}}{-2a^2}.$$

Multiplions les deux termes du premier rapport par x_0, ceux du deuxième par $-x_0$ et ajoutons terme à terme ces rapports ainsi modifiés au troisième. Nous obtenons un rapport égal aux trois précédents ; ce rapport est

$$\frac{-2x_0^2+\frac{a^2}{2}}{8x_0^2-2a^2} \qquad \text{ou} \qquad -\frac{1}{4}.$$

Les coordonnées du pôle de la droite MM′ vérifient donc les équations

$$\frac{x-x_0}{4x_0-a}=\frac{y+x_0}{-4x_0-a}=-\frac{1}{4}.$$

On en déduit

$$x=\frac{a}{4}, \qquad y=\frac{a}{4}.$$

ce qui montre que le pôle de la droite MM′ par rapport au cercle Γ est un point fixe.

Bonnes solutions par MM. E. Deschamps (lycée Saint-Louis) et J. Lhériaud (lycée de Toulouse).

Solution géométrique. — 1. Les triangles CAC′, BAB′ sont égaux comme ayant les côtés perpendiculaires et AC = AB; il en résulte que AC′ = AB′. Le cercle Γ passant par B′ et C′ a son centre sur la perpendiculaire au milieu de B′C′. Cette droite est fixe; c'est la bissectrice AD de l'angle B′AC′ car le triangle AC′B′ est isocèle, ou encore c'est la tangente en A à la circonférence donnée O, circonscrite au triangle ABC.

Le triangle A′B′C′ est évidemment conjugué par rapport au cercle O; il en résulte que

$$\text{(1)} \qquad OA'.OA_1=R^2,$$

R étant le rayon du cercle O.

Joignons OB′; cette droite est perpendiculaire à A′C′ polaire de B′. De même OA′ est perpendiculaire à B′C′. Il en résulte que les angles B′OA₁, A′C′B′ sont égaux, comme ayant les côtés perpendiculaires.

Mais dans le cercle Γ, on a

$$\widehat{A'C'B'}=\widehat{A'A''B'};$$

par suite

$$\widehat{B'OA_1}=\widehat{A'A''B'}.$$

Ceci nous montre que le triangle OB′A″ est isocèle; donc A_1 est le milieu de OA″ ou

$$OA_1=\frac{OA''}{2}.$$

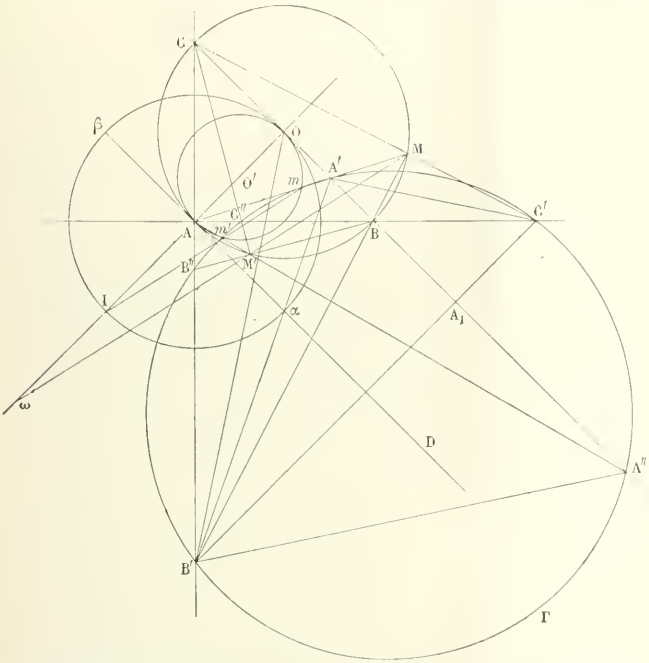
La relation (1) montre alors que

$$OA'.OA''=2R^2.$$

Par suite, le cercle Γ est orthogonal au cercle de centre O et de rayon $R\sqrt{2}$; ce dernier cercle est le lieu des sommets des angles droits circonscrits au cercle donné. Cette propriété est, d'ailleurs, un cas particulier du théorème bien connu de Faure.

Les cercles Γ, ayant leurs centres sur AD, sont orthogonaux, non seulement au cercle trouvé précédemment, mais encore à tous les cercles passant par les points d'intersection α, β de ce cercle avec AD. Ces points sont obtenus en prenant $A\alpha = A\beta = R$. En particulier, les cercles Γ sont orthogonaux au cercle de diamètre $\alpha\beta$, cercle de centre A et de rayon R. Il en résulte que

(2) $AB'.AB'' = AC'.AC'' = R^2$.



Remarquons que A'B' qui est la polaire de C', passe par le pôle α de AB. De même A'C' passe par β.

2. Comme $AC' = AB'$, on aura aussi $AC'' = AB''$ et alors la démonstration de la première partie, faite en sens inverse, nous montre que, si M' désigne le point de rencontre de AA'' et BB'', on a

$$\widehat{BM'C} = 90^\circ.$$

Donc M' est sur le cercle O. Je dis maintenant que AA'' passe par M'. En effet, désignons pour un instant par A_0 le point de rencontre de AM' avec BC. Si on trace le cercle circonscrit au triangle $A_0B''C''$, il coupera, d'après la première partie, AB et AC en des points C_0, B_0, tels que

$$AB''.AB_0 = AC''.AC_0 = R^2;$$

par suite, B_0 et C_0 coïncident respectivement avec B' et C'; le cercle que nous venons de considérer n'est donc autre que Γ et, par suite, A_0 coïncide avec A''.

Soit maintenant m le second point où OA' rencontre Γ; la propriété qui nous a donné (2) nous donnera aussi :

$$Am.AA' = R^2.$$

Mais on a évidemment :

$$AA'.AM = \overline{AB}^2 = 2R^2.$$

Donc $Am = \frac{AM}{2}$. Le point m est donc le milieu de AM. Ce point m se trouve par suite sur le cercle O' de diamètre OA. De même m', second point de rencontre de AA'' avec Γ, est le milieu de AM' et se trouve sur le cercle O'.

Soit I le 2e point de rencontre de AO avec le cercle A; la puissance de I par rapport à O' est $IA.IO = 2R^2$. Sa puissance par rapport à Γ est, par raison de symétrie, la même que celle de O; c'est donc aussi $2R^2$. Par suite le point I appartient à l'axe radical de O' et Γ, c'est-à-dire à la droite mm'. D'après les remarques qui précèdent on voit que la droite MM' passera par le point fixe ω tel que

$$A\omega = 2AI = 2R.$$

3. La droite qui joint O' au centre du cercle Γ est perpendiculaire à mm', axe radical de O' et Γ; elle est donc aussi perpendiculaire à MM'; cette droite contient le pôle de MM' par rapport à Γ.

Remarquons maintenant que la relation

$$AO'.A\omega = 2R \times \frac{R}{2} = R^2 = \overline{A\alpha}^2$$

nous montre que le cercle de diamètre $\omega O'$ passe par α et β et est, par suite, orthogonal au cercle Γ. Il en résulte, d'après une propriété bien connue, que la polaire de I par rapport à Γ, droite qui contient le pôle de MM', passe par O'.

Nous avons donc deux droites qui déterminent le pôle de MM' et qui passent toutes deux par O'.

Donc le pôle de MM', par rapport à Γ, est fixe : c'est le point O'.

G. LAPOINTE.

---

600. — *On donne deux circonférences* O *et* O', *dans lesquelles on mène deux diamètres parallèles* AB *et* A'B'. *Trouver l'enveloppe, le lieu du sommet et le lieu du foyer de la parabole inscrite dans le quadrilatère* AA'B'B, *lorsqu'on fait varier la direction commune des deux diamètres.*

Pour mettre ce problème en équation, il suffit de remarquer que les quatre droites AA', AB', A'B, BB' forment un quadrilatère dont les diagonales sont AB, A'B' et la ligne des centres ; par conséquent le triangle formé par ces trois droites est un triangle autopolaire de la parabole inscrite dans le quadrilatère; la ligne des centres, OO', est donc la polaire du point à l'infini dans la direction AB ; c'est, par suite, le diamètre conjugué de la direction AB ; de même AB est la polaire de O' et A'B', la polaire de O ; la parabole rencontre donc son diamètre OO' au milieu de OO'.

Prenons alors pour axes la ligne des centres, OO', et la perpendiculaire Oy à cette droite, menée par le centre du premier cercle ; désignons par $2a$ l'abscisse du centre du second cercle, par R et R' les deux rayons. Les points A et A' auront pour coordonnées $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$ et $2a + R'\cos\varphi$, $R'\sin\varphi$, φ étant l'angle du rayon OA avec Ox ; la droite OA aura pour équation

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0,$$

et la parallèle à cette droite menée par le milieu de OO', $(x - a)\sin\varphi - y\cos\varphi = 0$. Il en résulte que la parabole a pour équation, dans le système choisi et avec les notations adoptées,

$$y^2 - 2\lambda[(x - a)\sin\varphi - y\cos\varphi] = 0,$$

λ étant déterminé par la condition que cette courbe touche la droite AA'. Or cette droite a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & 1 \\ 2a + R'\cos\varphi & R'\sin\varphi & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(R - R')\sin\varphi x + [2a - (R - R')\cos\varphi]y - 2aR\sin\varphi = 0 ;$$

l'équation aux ordonnées des points de rencontre de la parabole et de la droite s'en déduit aisément ; c'est

$$y^2 + \frac{4a\lambda}{R - R'}y - \frac{2a\lambda(R + R')\sin\varphi}{R - R'} = 0,$$

et, en exprimant qu'elle a une racine double, on trouve λ,

$$\lambda = \frac{(R'^2 - R^2)\sin\varphi}{2a}.$$

L'équation définitive de la parabole est donc, en fonction du paramètre φ,

$$(1) \qquad y^2 - \frac{(R'^2 - R^2)\sin\varphi}{a}[(x - a)\sin\varphi - y\cos\varphi] = 0.$$

En exprimant que cette équation, rendue homogène en $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, a une racine double en $\operatorname{tg}\varphi$, nous aurons l'enveloppe de la parabole variable,

$$4ay^2[ay^2 + (R^2 - R'^2)(x - a)] - y^2(R^2 - R'^2)^2 = 0.$$

Cette enveloppe se décompose en deux : d'abord l'axe des y compté deux fois, puis la parabole

$$(2)\qquad y^2 + \frac{R^2 - R'^2}{a}(x-a) - \frac{(R^2 - R'^2)^2}{4a^2} = 0.$$

La portion $y^2 = 0$ est une enveloppe exceptionnelle : elle provient de ce que pour $\varphi = 0$ la parabole (1) se réduit à $y^2 = 0$, et que celle-ci est une courbe double du système. La véritable enveloppe est la parabole (2).

L'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\left[y + \frac{R'^2 - R^2}{2a}\sin\varphi\cos\varphi\right]^2 - \frac{R'^2 - R^2}{a}\sin^2\varphi\left(x - a + \frac{R'^2 - R^2}{4a}\cos^2\varphi\right) = 0.$$

On voit ainsi que l'axe a pour équation $y + \frac{R'^2 - R^2}{2a}\sin\varphi\cos\varphi = 0$, la tangente au sommet,

$$x - a + \frac{R'^2 - R^2}{4a}\cos^2\varphi = 0,$$

et que le paramètre a pour valeur $\frac{R'^2 - R^2}{2a}\sin^2\varphi$. Par conséquent les coordonnées du sommet sont données par les deux équations

$$y = \frac{R^2 - R'^2}{2a}\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$2(x-a) = \frac{R^2 - R'^2}{2a}\cos^2\varphi;$$

en élevant ces deux équations au carré et les ajoutant, on obtient

$$y^2 + 4(x-a)^2 = \frac{(R^2 - R'^2)^2}{4a^2}\cos^2\varphi;$$

l'élimination de $\cos^2\varphi$ est alors immédiate et conduit à l'équation

$$(3)\qquad y^2 + 4(x-a)^2 = \frac{R^2 - R'^2}{a}(x-a),$$

qui représente le lieu des sommets. Ce lieu est une ellipse symétrique par rapport à Ox.

L'abscisse du foyer a pour valeur

$$x = a + \frac{R^2 - R'^2}{4a}\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\text{ paramètre},$$

ou

$$x = a + \frac{R^2 - R'^2}{4a}\cos 2\varphi;$$

l'ordonnée est la même que celle du sommet, $y = \frac{R^2 - R'^2}{4a}\sin 2\varphi$.

L'élimination de 2φ entre ces équations est immédiate et donne pour lieu du foyer le cercle

$$(4)\qquad (x-a)^2 + y^2 = \left(\frac{R^2 - R'^2}{4a}\right)^2.$$

Remarques. — Si on prend

$$x = a + \frac{R^2 - R'^2}{4a}\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\text{ paramètre},$$

on obtient l'équation de la directrice,

$$x = a + \frac{R^2 - R'^2}{4a};$$

c'est aussi l'axe radical des deux cercles. Toutes les paraboles du faisceau ont donc même directrice, l'axe radical des deux cercles. Le point où cette droite perce la ligne des centres est le sommet de la parabole (2) ; c'est un sommet de l'ellipse (3), l'autre étant le milieu de OO' ; c'est aussi une des extrémités du diamètre du cercle (4) qui est situé sur Ox.

Le problème se traite très aisément et sans considérations géométriques préalables, par les coordonnées tangentielles.

TRIGONOMÉTRIE

590. — *Résoudre un triangle connaissant un côté c et les hauteurs h_a, h_b abaissées sur les deux autres côtés. Des deux triangles qui répondent à la question on calculera celui dont la surface est la plus grande :*

$$c = 25\,217^{m},63, \qquad h_a = 19693^{m},17, \qquad h_b = 16512^{m},14.$$

(Ecole Centrale, concours de 1896, 2e session.)

Tout revient au calcul des angles A et B. On a les formules

$$h_a = c \sin B, \qquad h_b = c \sin A,$$

d'où

$$\sin A = \frac{h_b}{c}, \qquad \sin B = \frac{h_a}{c}.$$

Soit, pour fixer les idées, $h_a > h_b$. Pourvu que h_a soit $< c$, on pourra calculer des angles aigus α et β tels que l'on ait

$$\sin \alpha = \frac{h_b}{c}, \qquad \sin \beta = \frac{h_a}{c}; \qquad (\beta > \alpha)$$

on trouve ainsi pour A les deux valeurs

$$A' = \alpha, \qquad A'' = 180^\circ - \alpha,$$

et pour B les deux valeurs

$$B' = \beta, \qquad B'' = 180^\circ - \beta.$$

L'angle C est donné par la formule

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

Sa valeur doit être positive et inférieure à 180°, ce qui exige

$$A + B < 180^\circ.$$

Cette condition n'est remplie que pour les angles A' et B' d'une part, et les angles A'' et B'' d'autre part. D'où deux solutions :

$$A' = \alpha, \qquad B' = \beta, \qquad C' = 180^\circ - (\alpha + \beta);$$

$$A'' = \alpha, \qquad B'' = 180^\circ - \beta, \qquad C'' = \beta - \alpha.$$

On doit choisir celle des deux solutions pour laquelle $S = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin C}$ a la plus grande valeur, c'est-à-dire celle pour laquelle $\sin C$ est le plus petit.

Or

$$\sin C' = \sin(\alpha + \beta), \qquad \sin C'' = \sin(\beta - \alpha).$$

L'inégalité

$$\sin(\beta - \alpha) < \sin(\beta + \alpha)$$

équivaut à l'inégalité

$$2 \sin \alpha \cos \beta > 0,$$

qui résulte de ce que β est un angle aigu. Il faut donc prendre la seconde solution.

Les formules de résolution sont les suivantes

$$A = \alpha, \qquad B = 180^\circ - \beta, \qquad C = \beta - \alpha.$$

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin C}, \qquad b = \frac{c \sin \beta}{\sin C}, \qquad S = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin C}.$$

Application numérique :

Données :	*Résultats :*	
$c = 25217^{m},63,$	$A = 40^\circ 54' 12'',25,$	$a = 91404^{m},$
$h_a = 19693^{m},17,$	$B = 128^\circ 39' 15'',53,$	$b = 108655^{m},$
$h_b = 16512^{m},14.$	$C = 10^\circ 26' 32'',22.$	$S = 897063500^{mq}.$

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

ÉCOLE CENTRALE

Première session.

Géométrie analytique.

684. — On donne deux axes Ox et Oy, faisant un angle θ, et, sur l'axe des y, un point P $(OP = p)$ et un point B $(OB = b)$. Par P on mène une parallèle à Ox, sur laquelle on prend des distances variables $P\mu = d$, $P\mu' = d'$, telles que $dd' = k^2$. Enfin, on considère une droite (D) $y = mx + b$. Faisant varier m,

1° Démontrer que, si le point de rencontre M des droites (D) et $O\mu$ décrit une conique (C) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dy = 0$, le point de rencontre M′ des droites D et $O\mu'$ décrit de même une conique.

2° Chercher la condition qui lie p, b et k pour que cette dernière conique se confonde avec la conique (C), et démontrer que, cette condition étant satisfaite, il y a toujours une position de D telle que la corde interceptée sur cette droite par la conique (C) soit vue du point O sous un angle droit.

3° Les points P et B étant supposés sur une droite OPB mobile autour de O, chercher, pour des valeurs données de p et de k, le lieu du point B tel que, pour chaque position de ce point, les points M et M′ décrivent la conique (C). Le lieu sera rapporté aux axes Ox et Oy donnés.

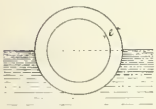
4° Enfin, trouver la position de B et la relation entre p et k telles que toutes les cordes interceptées par la conique (C) sur la droite (D) mobile soient vues sous un angle droit du point O.

(*1er juillet, de 7 h. à 11 h.*)

Physique et Chimie.

I. — **685.** — Quelle épaisseur e faut-il donner à une sphère creuse, en métal, de poids spécifique D et de poids total P, pour qu'un hémisphère surnage dans un liquide de poids spécifique d ?

On négligera l'influence de l'air.



II. — **686.** — Quelles sont dans le système C.G.S., les dimensions du coefficient $k = 6{,}7.10^{-8}$ de la loi de Newton $F = k\frac{MM'}{D^2}$; et quelle devrait être l'unité de masse pour que : la seconde étant l'unité de temps, la vitesse de la lumière (3.10^{10}) étant l'unité de vitesse, ce coefficient k devînt égal à l'unité ?

III. — **687.** — On attaque complètement, à chaud, 20^{gr} d'un alliage d'argent et de cuivre par l'acide sulfurique concentré. Le gaz produit est envoyé dans un excès d'eau de chlore. On verse ensuite, dans la liqueur très étendue d'eau, une solution de chlorure de baryum également en excès. Le précipité obtenu étant lavé et séché pèse $17^{gr},765$.

On demande la composition en poids de l'alliage.

$$H = 1, \qquad O = 16, \qquad S = 32, \qquad Cl = 35{,}5,$$
$$Cu = 63, \qquad Ag = 108, \qquad Ba = 137.$$

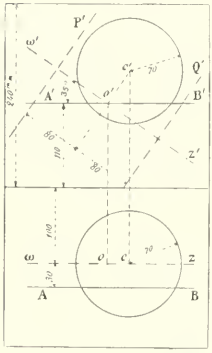
IV. — Quelques mots sur l'argon.

(*1er juillet, de 3 h. à 6 h.*)

Epure.

INTERSECTION D'UN HYPERBOLOÏDE ET D'UNE SPHÈRE.

688. — On demande de déterminer l'intersection d'un hyperboloïde de révolution avec une sphère. Les deux surfaces sont définies de la manière suivante :



I. — L'hyperboloïde a son axe (ωz, $\omega' z'$) de front et incliné de 35° sur le plan horizontal. Son centre est (o, o') (cote 110^{mm}, éloignement 100^{mm}). La génératrice (AB, A'B') parallèle à la ligne de terre définit la surface (cote de cette génératrice 110^{mm}, éloignement 130^{mm}) ; l'hyperboloïde est limité à deux plans P' et Q' perpendiculaires à son axe, symétriquement placés par rapport à son centre et à une distance de 80^{mm} de ce centre.

II. — Le centre de la sphère (c, c') est situé sur le diamètre de front du cercle de gorge de l'hyperboloïde et à une distance $o'c' = 50^{mm}$ du centre (o, o') de cet hyperboloïde. Le rayon de cette sphère est de 70^{mm}.

On représentera l'hyperboloïde limité ainsi qu'il a été dit en enlevant la portion de la surface comprise dans la sphère. On aura soin d'indiquer la construction rigoureuse des contours apparents de cette surface en faisant ressortir les particularités de ces courbes.

Cadre de 27^{cm} sur 45^{cm}.

Ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et à 240^{mm} du côté supérieur. Projetante oo' au milieu de la feuille de l'épure.

Titre extérieur : GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.
Titre intérieur : HYPERBOLOÏDE ET SPHÈRE.

(*2 juillet, de 7 h. à 11 h.*)

Calcul trigonométrique.

689. — Dans le triangle ABC on donne la surface S, la médiane m relative au côté BC et l'un des angles α que font entre elles les deux autres médianes.

1° Calculer la longueur a du côté BC,

$$S = 853^{a},54 \qquad m = 715^{m},63 \qquad \alpha = 121^{\circ}\ 27'\ 35''$$

en se bornant à la plus petite valeur de cette inconnue

2° Etablir les formules pour le calcul des deux autres médianes et donner les conditions de possibilité du problème ainsi que le nombre des solutions.

(*2 juillet, de 3 h. à 5 h.*)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1896)

Arithmétique. (M. COMBETTE.)

495. — Transcrire le nombre 3718 dans le système de numération de base 7. Reste de la division par 49, par 8, par 6.

496. — Si $a^2 + b^2$ est divisible par 7, a et b sont aussi divisibles par 7.

497. — Montrer que si a et b sont impairs, on ne peut pas avoir $a^2 + b^2 = k^2$.

498. — Montrer que si la somme a^2+b^2 est un carré parfait, le produit ab est divisible par 6.

499. — a et b étant deux nombres premiers absolus, trouver un nombre x tel que $ab+x^2$ soit un carré parfait.

500. — A quelle condition la somme $\frac{ab'+ba'}{bb'}$ de deux fractions irréductibles $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ sera-t-elle elle-même irréductible ?

501. — La fraction $\frac{n^2+2}{n(n+1)}$ est-elle irréductible ?

502. — Démontrer que si on convertit en décimales la fraction $\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$, on obtient une fraction périodique mixte.

503. — Démontrer que $\sqrt[m+n+p]{abc}$ est compris entre le plus grand et le plus petit des trois nombres $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$.

504. — a étant un entier qui n'est pas un cube parfait, démontrer que $m\sqrt[3]{a}+p\sqrt[3]{a^2}$ ne peut pas être commensurable.

505. — Calculer à $\frac{1}{100}$ près l'expression $\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}$. Qu'obtiendrait-on si le nombre des radicaux augmentait indéfiniment ?

Algèbre. (M. Combette.)

506. — K_m^p désignant le nombre des combinaisons complètes de m lettres p à p, démontrer la relation

$$K_m^p = K_{p+1}^{m-1}.$$

507. — Calculer la somme des produits

$$1.2.3.4+2.3.4.5+\ldots+100.101.102.103.$$

508. — Démontrer que dans une série convergente la différence $S_{n+p}-S_n$ tend vers 0, quand n augmente indéfiniment, quel que soit p.

509. — Sachant que la série $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ à termes positifs est convergente, prouver que la série

$$a_0u_0+a_1u_1+\ldots+a_nu_n+\ldots$$

est aussi convergente, $a_0a_1\ldots a_n\ldots$ étant des nombres tous inférieurs en valeur absolue à un nombre donné A.

510. — Etudier les séries

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{a+n}+\ldots,\qquad \frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots,\qquad 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots,$$

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots,\qquad \frac{a+1}{a}x+\left(\frac{a+2}{a+1}\right)^2x^2+\ldots+\left(\frac{a+n}{a+n-1}\right)^nx^n+\ldots.$$

511. — Démontrer que si l'on multiplie les termes $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ d'une série convergente par des nombres positifs $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ qui décroissent et tendent vers 0, la nouvelle série est convergente.

512. — Limite des expressions suivantes, quand x tend vers 0 :

$$(1-\operatorname{tg}3x)^{\operatorname{cotg}5x},\qquad (1-\sin^2 3x)^{\operatorname{cotg}^2 5x},$$

$$(1+\sin^3 5x)^{\operatorname{cotg}^3 3x},\qquad \left(1-\frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg}^3 x}}.$$

513. — Dérivée d'ordre n de $y=(1-x)^{-p}$. — Incidemment dérivée de $[\varphi(x)]^p$.

514. — Dérivées des fonctions suivantes :

$$\frac{\sin^2 x+3\sin x\cos^2 x}{\sin 2x+5\sin^3 3x};\qquad \operatorname{arc\,tg}(x^2+1);\qquad (\operatorname{arc\,tg}3x)^2;\qquad \cos(3x^2-1)\times\operatorname{arc\,tg}3x;$$

$$\cos^2 x\log a^{3x};\qquad \log[\operatorname{arc\,tg}(x+1)];\qquad \frac{3\operatorname{arc\,tg}x}{\mathrm{L}\operatorname{arc\,sin}x};\qquad \frac{(\operatorname{arc\,tg}x)^2}{\mathrm{L}(x^3+1)};\qquad (1-\operatorname{tg}^2 3x)^{\cos^3 2x};$$

$$[\operatorname{tg}3\operatorname{arc\,sin}x]^{x^2+1};\qquad [\mathrm{L}(x^2-1)]^{\sin^2 2x};\qquad [\operatorname{arc\,tg}x]^{\cos^2 x};\qquad [\operatorname{arc\,sin}(x^2-1)]^{\log^3 x^2}.$$

515. — Dérivée de y par rapport à x, y étant définie en fonction de x par une équation de la forme $f(x, y) = 0$. Application aux exemples suivants :

$$x^5y^3 - 3x^2y^2 + 3y + 1 = 0\,; \qquad 4\sin^2(x-y) + \operatorname{tg}^2(x^2+y^2) = \lambda\,; \qquad a\sin(x+2y) + b\cos(2x-y) + c = 0.$$

516. — On a par la formule des accroissements finis

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)\,;$$

limite de θ quand h tend vers 0.

517. — Trouver les fonctions primitives des fonctions suivantes :

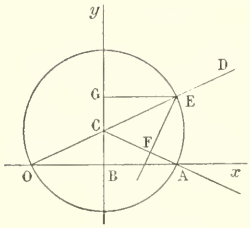
$$\frac{1}{(x-1)^2+3}, \quad \frac{1}{(x-1)^2+1}, \quad \frac{2x}{x^2-x+1}, \quad \frac{2x+1}{x^2-2x+4}, \quad \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{1}{x^3-1}, \quad \sin^2 x.\cos^3 x.$$

518. — Variations de la fonction

$$y = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{3\operatorname{tg} x - 1}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

690. — On considère deux droites rectangulaires Ox et By et sur la droite Ox deux points O et A symétriques par rapport au point B et tels que $OA = 2a$. Par le point O on mène une droite variable OD qui coupe By en un point C et la circonférence décrite du point C comme centre avec CO pour rayon en un point E. On trace CA et du point E on abaisse des perpendiculaires EF sur CA, EG sur By.



Etudier, quand la droite OD tourne autour du point O, les variations de l'aire du quadrilatère CGEF.

NICOL, professeur au lycée Janson-de-Sailly.

691. — On considère les coniques tangentes en O à Oy (axes rectangulaires) et qui admettent une droite donnée

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - h = 0$$

comme directrice.

1° Lieu du foyer qui correspond à cette directrice. Prenant un point sur ce lieu, reconnaître le genre de la conique correspondante. — Expliquer géométriquement les résultats obtenus.

2° Lieu du second foyer et lieu du centre. — Construire ces lieux en supposant $\varphi = \frac{\pi}{2}$, puis $\varphi = \frac{\pi}{4}$. — Dans cette dernière hypothèse, il y aura avantage à prendre pour axes de coordonnées les bissectrices des angles formés par les premiers.

Dans l'énoncé de la question 657 (page 224), un oubli a été commis : il faut astreindre encore l'hyperbole H à une nouvelle condition ; par exemple, la faire passer par le sommet de la parabole.

Page 238, ligne 2, il faut *ces* au lieu de *ses* ; ligne 3, *ses* au lieu de *ces*.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

7e Année N° 12. Septembre 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET SYNTHÉTIQUE

Par M. **H. Laurent.**

La géométrie repose sur un très grand nombre de postulata, et ce nombre est beaucoup plus grand qu'on ne le pense en général.

Après avoir défini la surface comme *ce qui sépare deux portions de l'espace*, la ligne comme *ce qui sépare deux portions d'une surface*, le point comme *ce qui sépare deux portions d'une ligne*, on admet :

1° Qu'un point en mouvement décrit une ligne ;

2° Qu'une ligne en mouvement décrit une surface ;

3° Qu'une surface en mouvement décrit un volume.

On appelle *figures égales* celles qui peuvent coïncider ou être décomposées en parties susceptibles de coïncider. Cette définition contient le postulatum :

4° Une figure en se déplaçant reste identique à elle-même, c'est-à-dire que si la figure A en se déplaçant peut venir coïncider avec B, cela aura lieu quelle que soit la position occupée par B.

Les auteurs qui ne définissent pas la ligne droite le plus court chemin d'un point à un autre, ce qui n'a pas de sens, admettent que par deux points on peut faire passer une ligne et une seule qui reste fixe quand ces deux points restent fixes, mais ils admettent encore sans le dire :

5° Que deux droites coïncident quand on a fait coïncider deux de leurs points.

6° On admet qu'un angle AOB coïncide avec lui-même quand on le retourne et que l'on peut appliquer à la fois OA sur OB et OB sur OA.

L'existence du plan, de sa continuité, de la sphère, de sa continuité, etc., etc... sont autant de postulata ou de vérités que l'on considère comme expérimentales.

On a essayé de s'affranchir de ces postulata et M. Sophus Lie y est parvenu de la façon la plus heureuse. Sa méthode d'exposition des vérités géométriques n'a qu'un défaut : elle n'est qu'à la portée d'un petit nombre de personnes très versées dans l'étude de la haute analyse.

Ne pourrait-on pas mettre l'étude rigoureuse de la géométrie à la portée d'un plus grand nombre d'intelligences? Je crois pouvoir répondre affirmativement à la question, et pour lire ce qu'il y a d'essentiel dans ce qui va suivre, il suffit de posséder les éléments de l'algèbre.

Le point. — Les variétés. — Pour faire une science, il faut au moins un postulatum ; la science des nombres admet l'existence de la *quantité* et un postulatum sur les limites. On peut faire la géométrie avec un postulatum nouveau relatif à la constitution de l'espace ou si l'on veut à la construction de l'espace, de l'espace *sensible*. Car indépendamment de ce que le vulgaire appelle l'espace, le mathémati-

cien conçoit, comme nous allons le voir, des espaces idéaux qui n'ont peut-être aucune réalité objective, mais dont il est impossible de démontrer la non existence. Il y a plus ; en admettant l'existence de ces espaces, on peut expliquer un certain nombre de phénomènes moraux. Mais passons, notre but n'est pas ici de faire de la métaphysique.

J'appellerai *point* dans un espace à n dimensions l'ensemble de n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont variables et fonctions d'une seule et même quantité t, on dit que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ décrit une ligne, ou une variété à une dimension, ou un espace à une dimension.

Lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont fonctions de p variables, on dit que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ décrit une variété ou un espace à p dimensions. Les variétés à $n-1$ dimensions dans l'espace à trois dimensions portent le nom de surfaces.

En général, si l'on pose $n-p$ équations entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ décrira une variété à p dimensions.

Les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées du point qu'elles représentent

Une variété à p dimensions est *continue*, si les coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ du point décrivant sont fonctions continues de p paramètres.

Postulatum. — L'espace sensible est une variété à trois dimensions. Le point que l'on conçoit et qu'on ne définit pas, est l'élément primordial de l'espace ; tout point de l'espace sensible que l'on suppose continu, a trois coordonnées qui le caractérisent, en ce sens que trois coordonnées déterminent un point et un seul.

Ce postulatum n'est pas indispensable pour faire la géométrie, il ne sert qu'à relier les théories abstraites que nous allons faire, au monde réel.

On avouera que la notion de point que nous admettons comme primordiale sans la définir est au moins aussi claire que celle de la droite et du plan.

Fonctions exponentielles et périodiques. — Nous aurons bientôt besoin des fonctions connues sous le nom de sinus et cosinus ; nous prions le lecteur de vouloir bien en oublier les définitions pour adopter les suivantes purement analytiques. Si l'on pose

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

on aura

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \\ \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \end{cases}$$

sont alors des identités qui donnent, en observant que $\sin 0 = 0$ et que $\cos 0 = 1$,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

L'équation $\cos x = 0$ a évidemment des racines réelles, car pour $x = 0$, $\cos x = 1$ et pour $x = 2$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{0.x^4}{24}$ est négatif ; en appelant $\frac{\pi}{2}$ la plus petite racine positive de $\cos x = 0$, on retrouve toutes les propriétés connues de $\sin x$ et $\cos x$ qui découlent alors des formules (1). Sans insister sur ce point, il est hors de doute qu'il n'y a pas besoin d'avoir recours à des

considérations géométriques pour faire la théorie du sinus et du cosinus. En sorte que l'on pourra faire usage de ces fonctions pour jeter les fondements de la géométrie.

Substitutions orthogonales. — Déplacements. — Je supposerai connue la théorie des substitutions orthogonales ; quand je ferai usage de pareilles substitutions, leur déterminant sera toujours égal à $+1$.

Je dirai que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a subi un *déplacement*, si on le remplace par le point $y_1, y_2, \ldots, y_n$ donné par des formules telles que

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} y_1 = \alpha_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \alpha_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \ldots + \alpha_{nn}x_n, \end{array}\right.$$

$\alpha_{11}, \ldots$ étant les coefficients d'une substitution orthogonale de déterminant un.

Un déplacement représenté par des équations telles que

$$y_1 = \alpha_1 + x_1 \ldots y_n = \alpha_n + x_n$$

est ce que nous appellerons une translation $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Soient A et A′ des points de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$; et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$; la quantité

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 \ldots + (x_n - x'_n)^2$$

est un *invariant* de tout déplacement, en sorte que si l'on fait subir à l'expression précédente la substitution (1) on a, en appelant $y_1, \ldots, y_n$ les coordonnées du point A déplacé, $y'_1, \ldots, y'_n$ celles du point A′ déplacé,

$$\Sigma(x_i - x'_i)^2 = \Sigma(y_i - y'_i)^2.$$

La racine carrée de cet invariant, $+\sqrt{\Sigma(x_i - x'_i)^2}$, est ce que nous appellerons la distance des points A et A′.

Lignes droites. — Directions. — La plus simple des lignes ou variétés à n dimensions est représentée par des équations du premier degré, soit par $n-1$ équations du premier degré entre $x_1, x_2 \ldots x_n$, soit par n équations de la forme

$$x_1 = c_1 + l_1 t, \qquad x_2 = c_2 + l_2 t, \qquad \ldots \qquad x_n = c_n + l_n t,$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ désignant des constantes quelconques ainsi que $l_1, l_2, \ldots, l_n$, et t désignant une variable pouvant prendre toutes les valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$. On peut donner à cette variété le nom de *ligne droite*. L'élimination de t donne les $n-1$ relations

$$(2)\qquad \frac{x_1 - c_1}{l_1} = \frac{x_2 - c_2}{l_2} \ldots = \frac{x_n - c_n}{l_n}.$$

Les équations (2) sont satisfaites pour une infinité de systèmes de valeurs des x, en d'autres termes la droite (2) contient une infinité de points, et en particulier le point $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Les quantités $l_1, l_2, \ldots$, ou toutes quantités proportionnelles à celles-ci, sont ce que l'on appelle les paramètres directeurs de la droite ; en particulier, si l'on pose

$$\gamma_1 = \frac{l_1}{\sqrt{\Sigma l_i^2}}, \qquad \gamma_2 = \frac{l_2}{\sqrt{\Sigma l_i^2}} \ldots$$

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ seront inférieurs à l'unité ; ce sont les cosinus directeurs de la droite. Nous poserons

$$\gamma_i = \cos \varepsilon_i. \qquad (\Sigma \cos^2 \varepsilon_i = 1)$$

Deux droites qui ont les mêmes paramètres directeurs ou les mêmes cosinus directeurs sont dites de même *sens*.

Un ensemble composé d'un nombre fini ou infini de points est une *figure*.

Considérons la figure composée de deux droites et soient $\cos\varepsilon_1, \cos\varepsilon_2, \ldots$ et $\cos\varepsilon'_1, \cos\varepsilon'_2, \ldots$ les cosinus directeurs de ces droites; leurs équations seront

$$(3) \qquad x_1 = c_1 + t\cos\varepsilon_1 \ldots; \qquad x'_1 = c'_1 + t'\cos\varepsilon'_1 \ldots$$

Si l'on fait subir à tous les points de la figure un même déplacement, $\sqrt{\Sigma(x_i - c_i)^2}$ et $\sqrt{\Sigma(x'_i - c'_i)^2}$ ne changeront pas; donc en vertu de

$$\Sigma\cos^2\varepsilon_i = 1, \qquad \Sigma\cos^2\varepsilon'_i = 1,$$

t et t' ne changeront pas et ce seront les distances des points $x_1\cdots$ et $c_1\cdots$; $x'_1\cdots$ et $c'_1\cdots$ respectivement. Mais les formules (3) deviendront

$$(y_1 - d_1)\alpha_{11} + (y_2 - d_2)\alpha_{12}\cdots = t\cos\varepsilon_1, \cdots$$

ou

$$y_1 = d_1 + t(\alpha_{11}\cos\varepsilon_1 + \alpha_{21}\cos\varepsilon_2\cdots + \alpha_{n1}\cos\varepsilon_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les nouveaux coefficients directeurs de la première droite (qui reste une droite après le déplacement) seront

$$\alpha_{11}\cos\varepsilon_1 + \alpha_{21}\cos\varepsilon_2\cdots, \qquad \alpha_{12}\cos\varepsilon_1 + \alpha_{22}\cos\varepsilon_2\cdots$$

et seront encore des cosinus directeurs, car la somme de leurs carrés est un. Si l'on forme alors la quantité

$$\begin{aligned}&(\alpha_{11}\cos\varepsilon_1 + \alpha_{21}\cos\varepsilon_2\cdots)(\alpha_{11}\cos\varepsilon'_1 + \alpha_{21}\cos\varepsilon'_2\cdots)\\ &+(\alpha_{12}\cos\varepsilon_1 + \alpha_{22}\cos\varepsilon_2\cdots)(\alpha_{12}\cos\varepsilon'_1 + \alpha_{22}\cos\varepsilon'_2\cdots)\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

on la trouve égale, en vertu des relations $\Sigma\alpha_{ij}\alpha_{kj} = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, à

$$\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon'_1 + \cos\varepsilon_2\cos\varepsilon'_2 + \cdots$$

Cette quantité est encore un *invariant* au plus égal à $\frac{1}{2}\Sigma\cos^2\varepsilon_i + \frac{1}{2}\Sigma\cos^2\varepsilon'_i = 1$; cet invariant est alors égal au cosinus d'un certain angle V qu'on appelle *angle* des deux droites.

Directions d'une droite. — Les équations de la droite sont de la forme

$$\frac{x_1 - c_1}{l_1} = \frac{x_2 - c_2}{l_2}\cdots$$

et on peut supposer que $l_1, l_2, \ldots$ sont des cosinus de quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ qui sont déterminées, mais mal déterminées; on ne change pas la droite en remplaçant ε_i par $2k\pi \pm \varepsilon_i$ ou même par $k\pi \pm \varepsilon_i$ à la condition de changer tous les ε de telle sorte que leurs cosinus conservent le même signe ou changent tous de signe; le cosinus de l'angle V de deux directions ou de deux droites, et qui est donné par la formule démontrée tout à l'heure,

$$\cos V = \cos\varepsilon_1\cos\varepsilon'_1 + \cos\varepsilon_2\cos\varepsilon'_2 + \cdots$$

est alors mal déterminé, car il change avec la forme des équations des droites; il change par exemple quand on change les signes de $\cos\varepsilon_1, \cos\varepsilon_2, \ldots$

Nous dirons que les deux droites forment deux angles en négligeant les multiples de 2π que l'on peut ajouter sans changer $\cos V$; l'un sera inférieur à $\frac{\pi}{2}$ ou au plus égal à $\frac{\pi}{2}$, ce sera l'angle aigu des deux droites, l'autre sera l'angle obtus. La somme de ces angles est π ou deux droits.

Il y a plus: nous distinguerons sur toute droite deux *directions* $\cos\varepsilon_1, \cos\varepsilon_2, \ldots$ et $-\cos\varepsilon_1, -\cos\varepsilon_2, \ldots$

Si les deux droites ont la même direction, $\cos V = 1$, $V = 0$, leur angle est nul. Lorsque $\cos V = 0$,

$$\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon'_1 + \cdots + \cos\varepsilon_n\cos\varepsilon'_n = 0,$$

on dit alors que les droites sont dans des directions *rectangulaires*; leur angle V est *droit*. Si elles ont un point commun, elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre. (*A suivre.*)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

603. — *On considère le faisceau des hyperboles* (H) *circonscrites à un triangle équilatéral* ABC *et dont une asymptote est tangente au cercle inscrit dans ce triangle. On demande de trouver et de construire les courbes suivantes :*

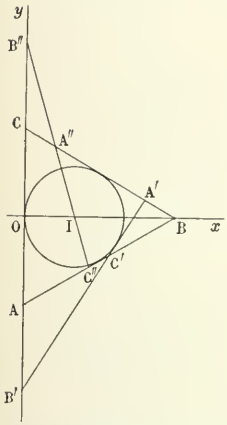
1° *L'enveloppe de la deuxième asymptote de* (H) *et le lieu du centre de cette hyperbole ;*

2° *L'enveloppe de la polaire par rapport à* (H) *du centre du cercle inscrit dans le triangle* ABC ;

3° *L'enveloppe des axes de l'hyperbole* (H) ;

4° *L'enveloppe de cette hyperbole.*

1. Soient ABC le triangle équilatéral donné et I le centre du cercle inscrit ; désignons par A′B′C′ la tangente à ce cercle, choisie pour asymptote, et par A″B″C″ la seconde asymptote. D'après une propriété connue de l'hyperbole, nous avons $BC' = -AC''$, $BA' = -CA''$, $AB' = -CB''$. D'autre part, la tangente mobile au cercle I, A′B′C′, trace sur les deux tangentes fixes BA et BC deux divisions homographiques ; il résulte alors des égalités écrites antérieurement que les deux séries C″ et A″ sont aussi homographiques ; par suite, la droite A″C″ enveloppe une conique ou passe par un point fixe ; or ici c'est le second cas qui se produit, car trois des droites telles que A″C″ sont les hauteurs du triangle équilatéral et se coupent au point I. La seconde asymptote tourne donc autour du point I, centre du cercle inscrit.

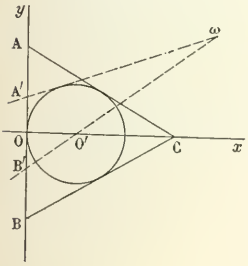


Alors le lieu du centre résulte aisément de cette propriété ; car ce point est le point de rencontre des droites A′B′C′ et A″B″C″, la première décrit un faisceau du second ordre, la seconde un faisceau du premier ordre et ces deux faisceaux sont rapportés projectivement l'un à l'autre ; par conséquent le lieu du point de rencontre de deux rayons homologues dans les faisceaux est une cubique ayant un point double isolé au point I. Il est facile de voir que cette cubique passe aux milieux des côtés du triangle, qu'elle y touche ces côtés et qu'elle admet pour directions asymptotiques les côtés du triangle eux-mêmes. D'ailleurs la méthode que nous avons suivie donne un procédé de construction par points qui permet de tracer la courbe avec beaucoup de précision.

Les résultats sont les mêmes, sauf dans les détails, quand on considère, au lieu d'un triangle équilatéral, un triangle quelconque.

L'étude préliminaire que nous venons de faire n'est pas indispensable, mais elle simplifie considérablement la mise en équation du problème et va nous permettre d'aborder aisément la question.

Nous prendrons pour axes l'un des côtés du triangle et la hauteur correspondante : Oy et Ox.



Soient $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ l'équation du cercle inscrit, $y = \lambda(x - R)$ l'équation d'une des asymptotes B′O′. L'autre sera tangente au cercle et rencontrera l'axe Oy en un point A′ tel que $AA' = -BB'$ ou $OA' = -OB'$. Or on a $\overline{OB'} = -\lambda R$. Donc $\overline{OA'} = +\lambda R$.

L'équation quadratique des tangentes menées du point $(0, \lambda R)$ au cercle étant $x[(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - 2\lambda^2 R] = 0$, l'équation de la deuxième asymptote est

$$(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - 2\lambda^2 R = 0.$$

Nous aurons sous forme rationnelle les coordonnées d'un point du lieu des centres en résolvant, par rapport à x et y, les équations des deux asymptotes

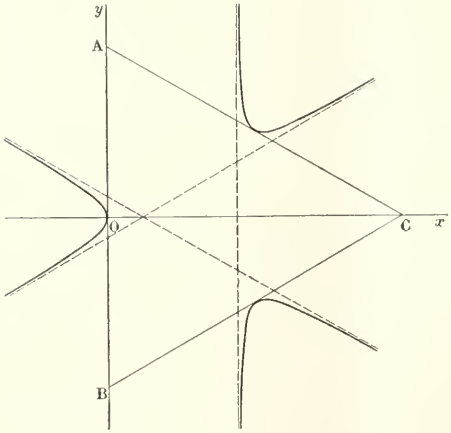
$$x = \frac{4R\lambda^2}{3\lambda^2 - 1}, \qquad y = \frac{R\lambda(1+\lambda^2)}{3\lambda^2 - 1}.$$

Nous trouvons ensuite

$$\frac{dx}{Rd\lambda} = \frac{-8\lambda}{(3\lambda^2-1)^2}, \qquad \frac{dy}{Rd\lambda} = \frac{3\lambda^4 - 6\lambda^2 - 1}{(3\lambda^2-1)^2},$$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\lambda^4 - 6\lambda^2 - 1}{-8\lambda}$, ce qui permet d'étudier complètement la forme de la cubique.

λ	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$			$+\infty$
$\frac{x}{R}$	0	décroît	$-\infty$	$+$	décroît			$\frac{4}{3}$
$\frac{dx}{Rd\lambda}$	0	$-$	∞		$-$			0
$\frac{y}{R}$	0	décroît	$-\infty$	$+$	décroît	minimum	croît	$+\infty$
$\frac{dy}{Rd\lambda}$	-1	$-$	∞		$-$	0	$+$	$\frac{1}{3}$
$\frac{dy}{dx}$	∞	$+$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+$	0	$-$	∞



On a seulement considéré les valeurs positives de λ, Ox étant axe de symétrie. La droite $x = \frac{4}{3}R$ est comme on voit asymptote. Les trois hauteurs du triangle étant évidemment axes de symétrie, la cubique a trois asymptotes parallèles aux côtés du triangle, et touche ces côtés en leurs milieux.

2. Cherchons l'équation de l'hyperbole (H). Elle est de la forme

$$[\lambda x - y - \lambda R][(\lambda^2-1)x + 2\lambda y - 2\lambda^2 R] - \mu R^2 = 0,$$

μ étant un nombre qu'on détermine aisément en écrivant que l'hyperbole passe par le point $x = 3R$, $y = 0$ (sommet C), ce qui donne $\mu = 2\lambda(\lambda^2 - 3)$, d'où l'équation

$$f(x, y) \equiv \lambda(\lambda^2-1)x^2 - 2\lambda y^2 + (\lambda^2+1)xy - \lambda(3\lambda^2-1)Rx + 6\lambda R^2 = 0.$$

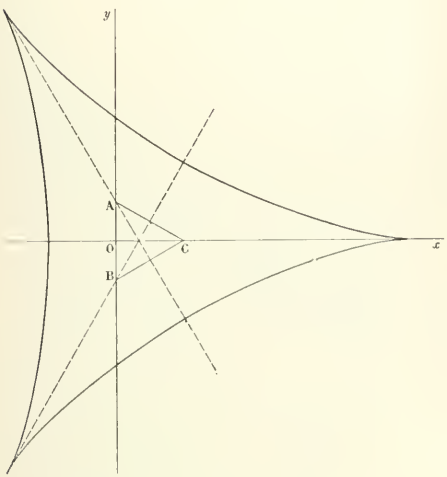
La polaire du centre du triangle $(x = R,\ y = 0)$ a pour équation $f'_x + \frac{1}{R} f'_z = 0$, z étant la variable d'homogénéité, ou

$$(\lambda^2+1)(y - \lambda x) - \lambda(3\lambda^2 - 1)R = 0.$$

L'enveloppe de cette droite est une courbe de troisième classe dont on trouve facilement l'équation tangentielle en identifiant l'équation de la droite avec $ux + vy + w = 0$, et éliminant λ,

$$\mathrm{R}u(3u^2 - 13v^2) - w(u^2 + v^2) = 0.$$

Cette équation étant de la forme $\varphi(u, v) - w(u^2 + v^2) = 0$, représente une hypocycloïde à trois rebroussements.



Pour avoir un point de la courbe en fonction du paramètre λ, il suffit de résoudre par rapport à x et y l'équation de la droite, et l'équation dérivée en λ, ce qui donne

$$x = \frac{-\mathrm{R}(3\lambda^4 + 22\lambda^2 - 13)}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad y = \frac{-32\lambda^3\mathrm{R}}{(1+\lambda^2)^2},$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{\mathrm{R}d\lambda} = \frac{32\lambda(\lambda^2 - 3)}{(1+\lambda^2)^3}, \qquad \frac{dy}{\mathrm{R}d\lambda} = \frac{32\lambda^2(\lambda^2 - 3)}{(1+\lambda^2)^3}.$$

Le coefficient angulaire de la tangente étant λ, x s'annule pour la valeur positive de λ^2,

$$\lambda_1^2 = \frac{-11 + 4\sqrt{10}}{3}.$$

$\frac{dx}{d\lambda}$ et $\frac{dy}{d\lambda}$ s'annulent en même temps pour $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{3}$, ce qui correspond aux trois rebroussements, les tangentes en ces points étant les hauteurs du triangle.

λ	0		λ_1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\frac{x}{\mathrm{R}}$	13	décroît	0	décroît	-5	croît	-3
$\frac{dx}{\mathrm{R}d\lambda}$	0	—		—	0	+	0
$\frac{y}{\mathrm{R}}$	0	décroît		décroît	$-6\sqrt{3}$	croît	0
$\frac{dy}{\mathrm{R}d\lambda}$	0	—		—	0	+	0

3. Les axes sont les bissectrices de l'angle des asymptotes,

$$\mathrm{D} \equiv (\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - 2\lambda^2\mathrm{R} = 0,$$
$$\mathrm{D}' \equiv y - \lambda x + \lambda\mathrm{R} = 0.$$

Les équations des bissectrices sont de la forme $\mathrm{D} \pm k\mathrm{D}' = 0$. En exprimant que ces deux droites

sont rectangulaires, on trouve $k = \sqrt{1+\lambda^2}$. Pour ne pas avoir de radicaux, changeons de paramètre, et posons $\sqrt{1+\lambda^2} = t + \lambda$; nous aurons $\lambda = \frac{1-t^2}{2t}$ et $\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{1+t^2}{2t}$.

Les équations des bissectrices deviennent alors

$$\varphi(t) \equiv y - tx + \frac{(3t^2-1)(t^2-1)}{2t(t^2-3)}\,\mathrm{R} = 0,$$

$$\psi(t) \equiv x + ty + \frac{(t^2-3)(t^2-1)}{2(3t^2-1)}\,\mathrm{R} = 0.$$

Il est facile de voir que ces deux droites ont même enveloppe. Si on remplace, en effet, dans $\varphi(t)$, t par $-\frac{1}{t'}$, on retrouve l'équation $\psi(t') = 0$. L'enveloppe des axes est une courbe de quatrième classe que nous construirons au moyen du paramètre t en résolvant par rapport aux coordonnées les équations $\varphi(t) = 0$, $\varphi'(t) = 0$.

$$x = \frac{\mathrm{R}(3t^6 - 23t^4 + 9t^2 + 3)}{2t^2(t^2-3)^2}, \qquad y = \frac{-\mathrm{R}(t^2+1)(5t^2-3)}{t(t^2-3)^2}.$$

$$\frac{dx}{\mathrm{R}dt} = \frac{5t^6 + 51t^4 - 9t^2 + 9}{t^3(t^2-3)^3}, \qquad \frac{dy}{\mathrm{R}dt} = \frac{5t^6 + 51t^4 - 9t^2 + 9}{t^2(t^2-3)^3}, \qquad \frac{dy}{dx} = t.$$

De là le tableau de discussion suivant :

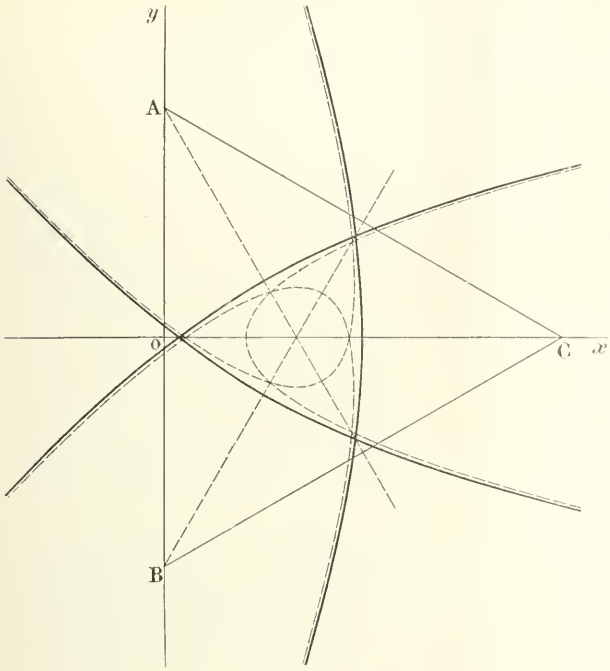
t	0			$\sqrt{\frac{3}{5}}$		t_1		$\sqrt{3}$			t_2		$+\infty$
$\frac{x}{\mathrm{R}}$	∞	$+$	décroît	$\frac{1}{9}$	décroît	0	décroît	$-\infty$	$-$	croît	0	croît	$\frac{3}{2}$
$\frac{dx}{\mathrm{R}dt}$	∞		$-$		$-$		$-$	∞		$+$		$+$	0
$\frac{y}{\mathrm{R}}$	∞	$+$	décroît	0	décroît		décroît	$-\infty$	$-$	croît		croît	0
$\frac{dy}{\mathrm{R}dt}$	∞		$-$		$-$		$-$	∞		$+$		$+$	0

x s'annule pour deux valeurs de t^2 positives, $t_1^2 = 0{,}64$ environ, et $t_2^2 = 7{,}4$ environ. Les numérateurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ n'ont pas de racine positive en t^2.

Pour $t = 0$, x et y sont infinis, $\frac{dy}{dx}$ étant nul. La courbe a donc des branches paraboliques dans la direction de Ox. Cherchons la parabole asymptote. Il faut déterminer k de façon que $y^2 - k\mathrm{R}x$ ait une valeur finie pour $t = 0$. On trouve sans difficulté $k = \frac{2}{3}$. La limite, pour $t = 0$, de $y^2 - \frac{2}{3}\mathrm{R}x$ est $-\frac{11}{27}\mathrm{R}^2$. De plus on a

$$y^2 - \frac{2}{3}\mathrm{R}x + \frac{11}{27}\mathrm{R}^2 = \frac{-16\mathrm{R}^2t^2(t^6 - 57t^4 + 27t^2 - 13{,}25)}{27(t^2-3)^4},$$

ce qui permet de voir comment est située la courbe par rapport à cette parabole asymptote. Le numérateur du second membre s'annule pour une seule valeur positive de t^2, $t_3^2 = 56{,}5$ environ (points d'intersection de la parabole et de la courbe).



La courbe ayant pour axes de symétrie les trois hauteurs du triangle ABC, il y a deux autres paraboles asymptotes qui correspondent aux points à l'infini pour $t^2 = 3$.

L'enveloppe des axes est comme on voit une sextique unicursale, ayant trois points doubles à distance finie sur les hauteurs du triangle.

4. L'enveloppe des hyperboles (H) s'obtient en éliminant λ entre les deux équations

$$F(\lambda) \equiv \lambda(\lambda^2-1)x^2-2\lambda y^2 + (\lambda^2+1)xy-\lambda(3\lambda^2-1)Rx + 6\lambda R^2 = 0,$$

$$F_\lambda'(\lambda) \equiv (3\lambda^2-1)x^2-2y^2+2\lambda xy - (9\lambda^2-1)Rx+6R^2=0.$$

Formons la combinaison

$$\lambda F_\lambda'(\lambda) - F(\lambda) \equiv x[2\lambda^2 x + (\lambda^2-1)y - 6\lambda^2 R] = 0;$$

nous obtenons ainsi

$$(1-\lambda^2)y = 2\lambda^2(x-3R).$$

Or on a

$$F_\lambda'(\lambda) \equiv (3\lambda^2-1)(x-3R)x - 2y^2 + 2\lambda xy - 2R(x-3R) = 0.$$

Si nous portons dans cette équation la valeur de y trouvée ci-dessus, nous avons, après suppression du facteur $(x-3R)$,

$$x = \frac{2R[(1-\lambda^2)^2 - 12\lambda^6]}{(3\lambda^2-1)(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^4(1-\lambda^2) - 8\lambda^6}.$$

Les deux termes de la fraction sont divisibles par $(3\lambda^2-1)$. Supprimons ce facteur, il reste

$$x = \frac{2R(4\lambda^4+\lambda^2+1)}{4\lambda^4-(1-\lambda^2)^2} = \frac{2R(4\lambda^4+\lambda^2+1)}{(\lambda^2+1)(3\lambda^2-1)}.$$

Il est plus simple de transporter l'origine des coordonnées au sommet C du triangle ; alors

$$X = x - 3R = -R\frac{(\lambda^2-1)(\lambda^2+5)}{(\lambda^2+1)(3\lambda^2-1)},$$

et

$$Y = y = \frac{2\lambda^2(x-3R)}{(1-\lambda^2)} = R\frac{2\lambda^2(\lambda^2+5)}{(\lambda^2+1)(3\lambda^2-1)}.$$

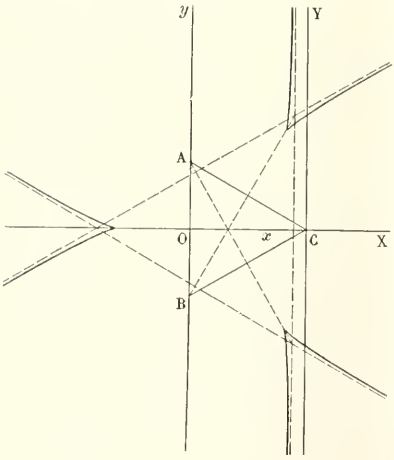
L'enveloppe des hyperboles (H) est donc une quintique unicursale.

On trouve facilement

$$\frac{dX}{R\,d\lambda} = \frac{4\lambda(5\lambda^2+1)(\lambda^2-3)}{(\lambda^2+1)^2(3\lambda^2-1)^2}, \qquad \frac{dY}{R\,d\lambda} = \frac{2\lambda^2(3\lambda^4+5)(\lambda^2-3)}{(\lambda^2+1)^2(3\lambda^2-1)^2}, \qquad \frac{dY}{dX} = \frac{\lambda(3\lambda^4+5)}{2(5\lambda^2+1)};$$

d'où le tableau de discussion suivant :

λ	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$			1			$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\frac{X}{R}$	-5	décroît	$-\infty$	$+$	décroît	$+$	0	$-$	décroît	$-\frac{1}{2}$	croît	$-\frac{1}{3}$
$\frac{dX}{R\,d\lambda}$	0	$-$	∞		$-$				$-$	0	$+$	0
$\frac{Y}{R}$	0	décroît	$-\infty$	$+$	décroît		3		décroît	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	croît	$+\infty$
$\frac{dy}{R\,d\lambda}$	0	$-$	∞		$-$				$-$	0	$+$	0
$\frac{dY}{dX}$	0	$+$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+$		$\frac{2}{3}$		$+$	$\sqrt{3}$	$+$	∞



En complétant par symétrie autour de Ox on a le tracé ci-contre. La courbe ayant évidemment pour axes de symétrie les trois hauteurs du triangle, l'étude des points à l'infini pour l'asymptote

$$X = -\frac{R}{3},$$

faite dans le tableau, sert pour l'étude analogue relative aux deux autres asymptotes parallèles aux côtés AC, BC. Il est à remarquer que ces trois asymptotes sont inflexionnelles.

La discussion met en outre en évidence trois points de rebroussement à distance finie sur les trois hauteurs du triangle.

VASNIER.

Bonne solution analytique de M. E. Barré, à Valenciennes.

---

614. — *En un point* A *d'une hyperbole équilatère on mène la normale, qui rencontre la courbe en un second point* A_1 ; *en* A_1 *on répète la même construction, on obtient le point* A_2, ..., *etc ; trouver les coordonnées du point* A_n. *Le point* A_n *peut-il coïncider avec le point* A ?

Rapportons l'hyperbole à ses deux asymptotes et désignons par $xy = a^2$ l'équation de cette

courbe et par α et β les coordonnées du point A ; la normale en ce point aura pour équation $\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{y-\beta}{\alpha}$, et, en appelant λ la valeur commune de ces rapports, chaque point de cette droite aura pour coordonnées $x = \alpha + \beta\lambda$, $y = \beta + \alpha\lambda$; en exprimant que ce point est sur l'hyperbole et supprimant la solution $\lambda = 0$, nous obtiendrons le λ du point A_1, $\lambda = -\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2}$; donc, si nous désignons par α_1 et β_1 les coordonnées du point A_1, nous pourrons écrire finalement $\alpha_1 = -\frac{\beta^3}{a^2}$, $\beta_1 = -\frac{\alpha^3}{a^2}$.

Nous obtiendrions de même, pour le point A_2, $\alpha_2 = -\frac{\beta_1^3}{a_2}$, $\beta_2 = -\frac{\alpha_1^3}{a^2}$; en fonction de α et β, les coordonnées de ce point sont $\alpha_2 = \frac{\alpha^{3^2}}{a^8}$, $\beta_2 = \frac{\beta^{3^2}}{a^8}$. Ce calcul se poursuit sans peine et conduit aux expressions générales des coordonnées du point A_n,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_{2n} &= \frac{\alpha^{3^{2n}}}{a^{3^{2n}-1}}, & \beta_{2n} &= \frac{\beta^{3^{2n}}}{a^{3^{2n}-1}}, \\ \alpha_{2n+1} &= -\frac{\beta^{3^{2n+1}}}{a^{3^{2n+1}-1}}, & \beta_{2n+1} &= -\frac{\alpha^{3^{2n+1}}}{a^{3^{2n+1}-1}}. \end{aligned}\right.$$

Il nous reste à chercher dans quels cas l'un ou l'autre de ces points peut coïncider avec le point A.

Pour exprimer que le point A_{2n} coïncide avec le point A, nous poserons $3^{2n} = h$ et nous aurons à chercher les solutions communes aux trois équations

$$\alpha^h = \alpha a^{h-1}, \qquad \beta^h = \beta a^{h-1}, \qquad \alpha\beta = a^2 ;$$

la troisième donne $\beta = \frac{a^2}{\alpha}$, et, en portant cette valeur dans la seconde équation, nous obtenons $\alpha^{h-1} = a^{h-1}$, équation identique à la première débarrassée de la racine $\alpha = 0$; cette équation admet deux racines réelles, puisque $h-1$ est pair ; ce sont les nombres $+a$ et $-a$, qui correspondent aux deux sommets réels ; les autres racines sont imaginaires et correspondent à des points imaginaires de l'hyperbole ; parmi ces points se trouvent les sommets imaginaires, car l'équation $\alpha^{h-1} = a^{h-1}$ admet aussi pour racines $+ai$ et $-ai$, $h-1$ étant un multiple de 4, ainsi qu'il est facile de le voir. Ces quatre solutions sont évidentes *a priori*. Enfin en remontant aux valeurs de α_{2n} et de β_{2n}, il est facile de voir que si l'on considère pour α et β les coordonnées de l'un des points à l'infini, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, par exemple, on a les mêmes valeurs pour α_{2n} et β_{2n}. On retrouve donc aussi les points à l'infini sur l'hyperbole, ce qui était encore évident *a priori*.

Pour exprimer que le point A_{2n+1} coïncide avec le point A, nous poserons $3^{2n+1} = k$, et nous aurons à chercher les solutions communes aux trois équations

$$\beta^k + \alpha a^{k-1} = 0, \qquad \alpha^k + \beta a^{k-1} = 0, \qquad \alpha\beta = a^2 ;$$

la troisième équation donne $\beta = \frac{a^2}{\alpha}$, et, en portant cette valeur dans les deux autres équations, nous obtenons deux fois la même équation, $\alpha^{k+1} + a^{k+1} = 0$. Il n'y a donc que des points imaginaires pour lesquels le point A_n revient au point A après un nombre impair d'opérations.

En résumé, il y a quatre points réels de la conique qui jouissent de la propriété indiquée et une infinité de points imaginaires dont les coordonnées sont de la forme $a\theta$ et $a\theta'$, θ et θ' désignant des nombres imaginaires de module *un*.

Bonnes solutions : MM. E. Barré, à Valenciennes ; J. Lhériaud (lycée de Toulouse) ; J. Merlin, à Versailles ; G. Rousier, soldat au 63e de ligne.

PHYSIQUE ET CHIMIE

549. — *Un pendule est formé de deux sphères homogènes de même rayon r et de même nature, réunies par une tige rigide qui passe par leurs centres. L'axe de suspension horizontal est perpendiculaire à la tige. La masse de cette tige et celle de l'axe de suspension sont négligeables vis-à-vis des masses des sphères. Une de ces sphères a son centre à une distance invariable b de l'axe de suspension, l'autre à une distance variable x au-dessous ou au-dessus de cet axe.*

Quelle doit être la valeur de x pour que les oscillations simples infiniment petites de ce pendule se fassent en un temps t?

Faire une application numérique en prenant pour la durée d'oscillation 3 secondes, pour la distance à l'axe de suspension du centre de la sphère fixe 1 mètre et pour rayon des sphères 1 décimètre, l'intensité de la pesanteur valant 981 C. G. S.

(*Bourses de licence, 1896.*)

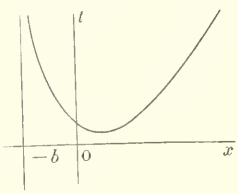
La durée d'une petite oscillation du pendule est donnée par la formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{I}{Mag}}.$$

Le moment d'inertie d'une sphère de masse m et de rayon r par rapport à un axe passant par son centre est égal à $\frac{2}{5}mr^2$; par conséquent le moment d'inertie de la sphère fixe par rapport à l'axe de supension du pendule est $m\left(b^2+\frac{2}{5}r^2\right)$ et celui de la sphère mobile $m\left(x^2+\frac{2}{5}r\right)$; on a d'autre part, en vertu d'une propriété connue du centre de gravité, $Ma = mb + mx$. Portons ces valeurs dans l'expression de t, il vient

$$t = \pi\sqrt{\frac{b^2+x^2+\frac{4}{5}r^2}{(b+x)g}}.$$

Discutons cette formule. On ne peut donner à x de valeurs négatives inférieures à $-b$; l'équilibre du pendule serait, en effet, instable. Si l'on donne à x des valeurs croissant à partir de $-b$, t diminue comme l'indique la courbe ci-contre et passe par un minimum quand x prend la valeur



$$x' = -b + \sqrt{2b^2+\frac{4}{5}r^2};$$

ce minimum est égal à

$$t' = \pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2b^2+\frac{4}{5}r^2}-2b}{g}}.$$

Puis quand x augmente depuis cette valeur jusqu'à l'infini, t croît indéfiniment.

Il résulte immédiatement de cette discussion qu'à une valeur déterminée de t correspondent deux valeurs de x, à la condition que t soit plus grand que t'. Ces deux valeurs sont données par la formule suivante, qu'on obtient en résolvant par rapport à x l'équation en t :

$$x = \frac{gt^2}{2\pi^2} \pm \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{g^2t^4 + 4\pi^2gbt^2 - 4\pi^4\left(b^2+\frac{4}{5}r^2\right)};$$

en cherchant la condition de réalité, on retrouve la valeur limite t'.

L'application numérique à cette dernière formule donne

$$x = \frac{8829 \pm 10434,5}{2\pi^2},$$

$$x_1 = 975^{cm},90, \qquad x_2 = -81^{cm},36.$$

---

550. — *Dans une dissolution de chlorure ferreux additionnée d'un excès d'acide chlorhydrique, on introduit* $0^{gr},5$ *d'un mélange salin que l'on sait ne renfermer que de l'azotate et du chlorure de potassium. Un gaz se dégage qui, mesuré sec et dans les conditions normales de température et de pression, occupe un volume de* 100 *centimètres cubes.*

Calculer en centièmes la composition du mélange d'azotate et de chlorure.

Quel est le poids minimum de fer qu'il faudrait dissoudre dans un excès d'acide chlorhydrique pour réaliser la réaction?

$$Az = 14, \qquad K = 39, \qquad Cl = 35,5, \qquad Fe = 56.$$

(*Bourses de licence, 1896.*)

La réaction est représentée par l'équation

$$x\left\{2AzO^6K + 6FeCl^2 + 8HCl = 3Fe^2Cl^6 + 2KCl + 2AzO + 4H^2O\right\}.$$

Le volume moléculaire étant de $22^{lit}\frac{1}{4}$, x est déterminé par l'équation

$$2x \times 22250 = 100, \qquad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{445}.$$

Le poids d'azotate contenu dans le mélange est

$$2x.AzO^6K = 0^{gr},454,$$

et, par conséquent, le poids de chlorure $0^{gr},046$,

ce qui fait, en centièmes,

Azotate.	90,8,
Chlorure	9,2.

Le poids de fer nécessaire à la réaction est

$$6xFe = 0^{gr},775.$$

Remarque. — Il était inutile de donner le poids atomique du chlore.

La solution de M. Roussel serait exacte sans une faute de calcul.

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Épure.

692. — On donne une sphère de centre ω, ω' ($x = 0$, $y = 14^{cm}$, $z = 10^{cm}$) ayant pour rayon 4^{cm}. En tournant autour de la verticale o ($x = 0$, $y = 6$), elle a pour enveloppe un tore T_1.

Soient S_1, S_2 les deux positions de la sphère ω tournant autour de la verticale o et tangentes extérieurement à la sphère primitive ω.

On fait tourner ces deux nouvelles sphères S_1, S_2 autour de la ligne de bout ω' ($x = 0$, $z = 10$); elles ont pour enveloppe un nouveau tore T_2.

Représenter le solide commun aux deux tores T_1 et T_2.

On calculera à un dixième de millimètre près les coordonnées des points de contact des deux surfaces, en prenant comme axe des z l'axe du tore T_1, comme axe des y la ligne de bout du centre o, o' de ce tore et comme axe des x la perpendiculaire au plan yoz menée par le même centre.

(21 juillet, de 7 h. à 11 h.)

QUESTIONS PROPOSÉES

693. — Par un point M d'une strophoïde droite, on peut mener deux tangentes, autres que la tangente en M. La droite Δ qui joint les points de contact P et Q de ces tangentes coupe la courbe en un troisième point R.

Trouver, quand le point M décrit la strophoïde :

1° L'enveloppe de Δ et celle de la droite MR;

2° Le lieu du centre de gravité et celui du point de concours des hauteurs du triangle MPQ;

3° Le lieu du centre et l'enveloppe du cercle circonscrit à ce triangle.

P. Puig, professeur au lycée de Bordeaux.

694. — Si p, q, r désignent des nombres réels et que l'équation

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 - 4r)x + q^2 = 0$$

ait une racine réelle, simple, positive, l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

a toutes ses racines imaginaires. H. R.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

622. — *On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point fixe P de coordonnées x_0, y_0. Par P on mène une droite quelconque rencontrant les axes aux points A et B. Appelant φ l'angle OAP, on demande de résoudre les questions suivantes :*

1° *Exprimer les longueurs des côtés du triangle OAB en fonction des paramètres x_0, y_0, φ.*

2° *Un point M étant déterminé par la rencontre des parallèles aux axes menées par A et B, trouver le lieu de ce point M quand φ varie de manière que la droite APB pivote autour du point fixe P.*

3° *On considère les cercles de centres $O_1(x_1, y_1)$, $O_2(x_2, y_2)$, $O_3(x_3, y_3)$, $O_4(x_4, y_4)$ inscrit et exinscrits au triangle OAB, et un point Q dont les coordonnées x et y satisfont aux relations*

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}, \qquad \frac{4}{y} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}.$$

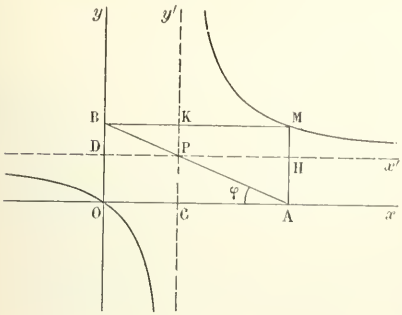
Déterminer le lieu du point Q pour les différentes positions de AB.

4° *Lieu du foyer de la parabole tangente aux axes de coordonnées respectivement en A et en B.*

(Cette dernière partie est susceptible d'une solution géométrique, mais on devra en tous cas donner une solution analytique.)

(Ecole des Mines de Saint-Etienne, 1896.)

1. L'équation de la droite AB est de la forme



$$y - y_0 + (x - x_0)\operatorname{tg}\varphi = 0$$

On en déduit

$$OA = \frac{y_0 + x_0 \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi},$$

$$OB = y_0 + x_0 \operatorname{tg}\varphi,$$

$$AB = \frac{y_0 + x_0 \operatorname{tg}\varphi}{\sin\varphi}.$$

2. On obtiendra l'équation du lieu du point M en éliminant φ entre les deux équations

$$x = \frac{y_0 + x_0 \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad y = y_0 + x_0 \operatorname{tg}\varphi,$$

ce qui donne

$$(x - x_0)(y - y_0) = x_0 y_0.$$

Le lieu est une hyperbole équilatère ayant pour centre le point P, pour asymptotes les parallèles menées par ce point aux axes de coordonnées et qui, de plus, passe par l'origine.

Ce résultat est facile à établir géométriquement. Dans les triangles semblables BDP, PCA on a

$$\frac{BD}{PC} = \frac{DP}{CA},$$

d'où

$$BD.CA = PC.PD$$

et par suite

$$MH.MK = PC.PD = C^{te}.$$

Le lieu du point M est donc une hyperbole ayant pour asymptotes Px' et Py' et passant par le point O ($OC.OD = PC.PD$).

3. Pour calculer les coordonnées des centres des quatre cercles inscrit et ex-inscrits nous chercherons les points équidistants des trois côtés du triangle OAB. Les distances d'un point (x, y) aux côtés de l'angle droit sont $|x|$ et $|y|$. La distance à l'hypoténuse AB est

$$|(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi| ;$$

on aura donc à résoudre les équations

$$|x| = |y| = |(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi|.$$

I. $x = y$ (O_1 et O_2); on aura

$$\pm x = x(\sin\varphi + \cos\varphi) - (x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi),$$

d'où

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{\sin\varphi + \cos\varphi \mp 1}{x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi},$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = 2\,\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi}.$$

II. $x = -y$ (O_3 et O_4); on aura

$$\pm x = x(\sin\varphi - \cos\varphi) - (x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi),$$

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} = \frac{\sin\varphi - \cos\varphi \mp 1}{x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi},$$

$$\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = -\left(\frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}\right) = 2\,\frac{\sin\varphi - \cos\varphi}{x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi}.$$

on a donc pour déterminer les coordonnées du point Q :

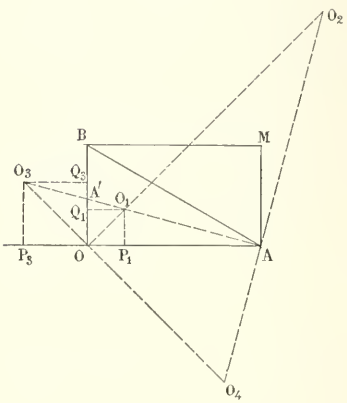
$$\frac{4}{x} = \frac{4 \sin \varphi}{x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi}, \qquad \frac{4}{y} = \frac{4 \cos \varphi}{x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi},$$

d'où

$$x = \frac{x_0 \operatorname{tg} \varphi + y_0}{\operatorname{tg} \varphi}, \qquad y = x_0 \operatorname{tg} \varphi + y_0.$$

Ce sont les coordonnées du point M ; le point Q coïncidant avec le point M, son lieu ne diffère pas du lieu précédent.

On peut encore établir ce résultat géométriquement. Les deux bissectrices de l'angle O forment avec les côtés de cet angle un faisceau harmonique, en sorte que O_1, O_3 sont conjugués harmoniques par rapport aux points A, A'.



En projetant sur OA, on obtient les points P_1, P_3 conjugués harmoniques par rapport aux points O et A, en sorte que l'on a

$$\frac{2}{OA} = \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}.$$

En projetant sur OB, on obtient les points Q_1 et Q_3 conjugués harmoniques par rapport aux points O et B.

$$\frac{2}{OB} = \frac{1}{OQ_1} + \frac{1}{OQ_3} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_3}.$$

On montrera de même que

$$\frac{2}{OA} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_4},$$

$$\frac{2}{OB} = \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_4}.$$

Par suite

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{4}{OA},$$

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4} = \frac{4}{OB}.$$

Les coordonnées x et y du point Q sont égales en grandeur et en signe aux segments OA et OB ; le point Q n'est pas autre chose que le point M.

4. Pour trouver le lieu du foyer de la parabole tangente aux axes de coordonnées aux points A et B, on peut remarquer que ces deux tangentes étant rectangulaires leur point de concours est situé sur la directrice, que la corde de contact AB passe par le foyer et que la droite OF est perpendiculaire sur cette corde. En sorte que lorsque la droite AB pivote autour du point P, le foyer F décrit le cercle de diamètre OP.

Pour traiter la question analytiquement, nous prendrons l'équation générale des coniques tangentes en A et B aux axes de coordonnées

$$[y - y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \varphi]^2 + 2\lambda xy = 0,$$

et nous déterminerons λ de façon que cette équation représente une parabole

$$\delta = AC - B^2 = \operatorname{tg}^2 \varphi - (\operatorname{tg} \varphi + \lambda)^2 = -\lambda(2 \operatorname{tg} \varphi + \lambda) = 0;$$

à la solution $\lambda = 0$ correspond une droite double (la droite AB) ; à $\lambda = -2 \operatorname{tg} \varphi$, une parabole

dont l'équation est

$$(y - x \operatorname{tg} \varphi)^2 - 2(y_0 + x_0 \operatorname{tg} \varphi)(y + x \operatorname{tg} \varphi) + (y_0 + x_0 \operatorname{tg} \varphi)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 - 2(x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi)(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi)^2 = 0.$$

L'axe de la parabole faisant avec Ox un angle égal à φ, l'équation de la directrice sera de la forme

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - h = 0,$$

et l'équation mise sous la forme focale

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (x \cos \varphi + y \sin \varphi - h)^2 = 0,$$

ou, en développant,

$$(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 - 2(\alpha - h \cos \varphi)x - 2(\beta - h \sin \varphi)y + \alpha^2 + \beta^2 - h^2 = 0.$$

En identifiant ces deux équations, nous obtenons les trois conditions

$$\alpha - h \cos \varphi = (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi) \sin \varphi,$$
$$\beta - h \sin \varphi = (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi) \cos \varphi,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 - h^2 = (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi)^2,$$

entre lesquelles il faudra éliminer φ et h.

Cherchons d'abord à calculer h en fonction de φ. En tirant α et β des deux premières et portant dans la troisième, nous obtenons la condition

$$-4h \cos \varphi \sin \varphi (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi) = 0,$$

d'où l'on déduit $h = 0$ (la directrice passe par l'origine). Il reste à éliminer φ entre les deux équations

$$\alpha = (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi) \sin \varphi,$$
$$\beta = (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi) \cos \varphi.$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{\alpha}{\sin \varphi} = \frac{\beta}{\cos \varphi} = x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi = \lambda.$$

En prenant les deux premiers rapports et les égalant à λ, il vient

$$\sin \varphi = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad \cos \varphi = \frac{\beta}{\lambda},$$

et portant dans la relation $\quad x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi = \lambda,$

il vient $\quad \alpha x_0 + \beta y_0 = \lambda^2;$

d'autre part, $\quad \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\lambda^2} = 1.$

Remplaçant λ^2 par $\alpha^2 + \beta^2$, on obtient l'équation du lieu

$$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha x_0 - \beta y_0 = 0.$$

C'est un cercle passant par l'origine et ayant pour centre le point $\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}$ milieu de OP. C'est donc le cercle décrit sur OP comme diamètre.

Autre solution. — **1.** Les axes sont indiqués. Désignons par α et β les valeurs algébriques des segments OA et OB. Pour calculer α et β, nous remarquons que l'équation de AB est $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$; donc en exprimant que cette droite passe au point P, nous aurons une première relation entre α et β, $\frac{x_0}{\alpha} + \frac{y_0}{\beta} - 1 = 0$; nous avons évidemment en outre, $\beta = \alpha \operatorname{tg} \varphi$. De ces équations, nous déduirons

sans peine α et β,

$$\alpha = \frac{x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi}{\sin\varphi}, \qquad \beta = \frac{x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi}{\cos\varphi},$$

puis, comme conséquence,

$$AB = \left| \frac{x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi} \right|.$$

La première question est résolue : les longueurs de OA et OB sont les valeurs absolues des nombres α et β.

2. Le point M a pour coordonnées α et β : le lieu de ce point a donc pour équation $\frac{x_0}{\alpha} + \frac{y_0}{\beta} - 1 = 0$, ou, en rendant cette équation entière et en y représentant les coordonnées courantes α et β par x et y,

$$xy - y_0 x - x_0 y = 0.$$

Ce lieu est donc une hyperbole équilatère passant à l'origine et ayant pour centre le point P.

3. Il y a deux espèces de cercles tangents à Ox, Oy et AB : ceux qui ont leurs centres sur la première bissectrice et ceux qui ont leurs centres sur la seconde. Chacun des premiers a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + \lambda^2 = 0,$$

λ désignant l'abscisse du centre. Pour avoir λ, nous exprimerons que le cercle est tangent à la droite AB, $\beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0$, c'est-à-dire que le centre est à une distance de cette droite égale au rayon ; ce calcul donne d'abord

$$\lambda^2(\alpha^2 + \beta^2) = (\lambda\beta + \lambda\alpha - \alpha\beta)^2,$$

puis, après simplification et suppression du facteur $\alpha\beta$,

$$2\lambda^2 - 2\lambda(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 0.$$

Il y a donc deux cercles de ce groupe tangents aux trois côtés du triangle ; leurs abscisses sont liées par la relation $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$.

Chacun des seconds cercles a pour équation $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2\lambda y + \lambda^2 = 0$, λ ayant même signification ; la condition de contact avec AB est

$$\lambda^2(\alpha^2 + \beta^2) = (\lambda\beta - \lambda\alpha - \alpha\beta)^2,$$

ou

$$2\lambda^2 - 2\lambda(\beta - \alpha) + \alpha\beta = 0.$$

Il y a aussi deux cercles de ce groupe tangents aux trois côtés du triangle, et leurs abscisses sont liées par la relation $\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta}$. L'abscisse du point Q est donc donnée par l'équation

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{4}{\alpha};$$

c'est $x = \alpha$. L'ordonnée du point Q est de même $y = \beta$. Par suite le point Q est identique au point M et le lieu de ce point est l'hyperbole équilatère rencontrée plus haut.

4. Le point O est sur la directrice de la parabole ; sa polaire AB passe donc au foyer, et l'on sait que ce point est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur AB. Le lieu du foyer est donc le cercle décrit sur OP comme diamètre. Il n'y a aucune difficulté à traiter cette question par le calcul.

L. LIOGIER, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne.

M. Liogier a aussi envoyé une excellente solution géométrique.

Ont résolu la même question : MM. Pierrat et Verchère, à Saint Etienne ; J.-A. Gauthier et A. de la Ruffie, pensionnat de Valbenoite.

623. — *Deux paraboles de grandeurs constantes tournent autour de leurs sommets respectifs, supposés fixes, de façon que par leurs quatre points de rencontre passe un cercle. Trouver :*

1° *Le lieu du centre de ce cercle ;*

2° *Le lieu du centre, l'enveloppe des axes et l'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères qui passent aux points de rencontre des deux paraboles.*

1. Prenons pour axe des x la droite qui joint les sommets des deux paraboles et pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu de ce segment. Désignons par A et A′ ces deux points, par a et $-a$ leurs abscisses; appelons p et q les paramètres des paraboles, et désignons enfin par

$$(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi = 0, \qquad (x-a)\sin\varphi - y\cos\varphi = 0$$

les équations de l'axe et de la tangente au sommet de la première parabole. Cette courbe aura pour équation

$$S \equiv [(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi]^2 - 2p[(x-a)\sin\varphi - y\cos\varphi] = 0;$$

de même, la seconde parabole a l'équation suivante :

$$S' \equiv [(x+a)\cos\varphi' + y\sin\varphi']^2 - 2q[(x+a)\sin\varphi' - y\cos\varphi'] = 0.$$

Il faut exprimer maintenant que dans le faisceau $S + \lambda S' = 0$, il se trouve un cercle, c'est-à-dire que, pour une même valeur de λ, les deux équations suivantes sont vérifiées :

$$\sin 2\varphi + \lambda \sin 2\varphi' = 0, \qquad \cos 2\varphi + \lambda\cos 2\varphi' = 0;$$

ceci donne $\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\varphi'$, puis $2\varphi' = 2\varphi + k\pi$, $\varphi' = \varphi + \frac{k\pi}{2}$.

Si nous prenons pour k un nombre pair, les deux paraboles ont leurs axes parallèles et ont deux points communs confondus à l'infini ; leurs quatre points de rencontre ne sont pas sur un cercle proprement dit. Nous devons donc prendre pour k un nombre impair, alors les axes sont rectangulaires et nous avons les deux solutions $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$, $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2} + \pi$. A la première, correspond l'équation

$$S' \equiv [(x+a)\sin\varphi - y\cos\varphi]^2 - 2q[(x+a)\cos\varphi + y\sin\varphi] = 0;$$

à la seconde, correspond l'équation

$$S' \equiv [(x+a)\sin\varphi - y\cos\varphi]^2 + 2q[(x+a)\cos\varphi + y\sin\varphi] = 0.$$

Nous passerons donc du premier cas au second en changeant q en $-q$, et nous pourrons nous borner à étudier le couple

$$S \equiv [(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi]^2 - 2p[(x-a)\sin\varphi - y\cos\varphi] = 0,$$
$$S' \equiv [(x+a)\sin\varphi - y\cos\varphi]^2 - 2q[(x+a)\cos\varphi + y\sin\varphi] = 0.$$

Posons $X \equiv x\cos\varphi + y\sin\varphi$, $Y \equiv x\sin\varphi - y\cos\varphi$; nous pourrons écrire

$$S \equiv X^2 - 2a\cos\varphi X - 2pY + a^2\cos^2\varphi + 2ap\sin\varphi = 0,$$
$$S' = Y^2 - 2qX + 2a\sin\varphi Y + a^2\sin^2\varphi - 2aq\cos\varphi = 0;$$

par suite le cercle passant aux quatre points de rencontre des deux paraboles a visiblement pour équation $S + S' = 0$ et peut se représenter par

$$X^2 + Y^2 - 2(a\cos\varphi + q)X + 2(a\sin\varphi - p)Y + a^2 + 2ap\sin\varphi - 2aq\cos\varphi = 0;$$

cette équation se met sous la forme

$$(X - a\cos\varphi - q)^2 + (Y + a\sin\varphi - p)^2 + 4ap\sin\varphi - 4aq\cos\varphi - p^2 - q^2 = 0.$$

Le centre est donc à l'intersection des deux droites

$$X - a\cos\varphi - q = 0, \qquad Y + a\sin\varphi - p = 0,$$

et nous aurons le lieu en éliminant φ entre ces deux équations. Or elles peuvent s'écrire

$$(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi - q = 0,$$
$$(x+a)\sin\varphi - y\cos\varphi - p = 0,$$

et donnent ainsi les valeurs de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$,

$$\frac{\cos\varphi}{q(x+a)-py} = \frac{\sin\varphi}{qy+p(x-a)} = \frac{1}{x^2+y^2-a^2};$$

par conséquent le lieu du centre du cercle s'obtiendra en exprimant que ces valeurs de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$ vérifient la relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$; nous obtenons de cette manière

$$(qx-py+aq)^2 + (qy+px-ap)^2 = (x^2+y^2-a^2)^2,$$

ou

$$(1) \qquad (x^2+y^2-a^2)^2 - (p^2+q^2)(x^2+y^2+a^2) + 2a[(p^2-q^2)x + 2pqy] = 0.$$

C'est une courbe du quatrième degré; une ovale de Descartes.

Il y a un autre lieu analogue que nous obtenons en changeant q en $-q$; c'est la courbe symétrique de la précédente par rapport à Ox.

2. L'hyperbole équilatère passant aux points de rencontre des deux paraboles a pour équation $S - S' = 0$; elle peut se représenter, avec nos notations, par

$$X^2 - Y^2 + 2(q - a\cos\varphi)X - 2(p + a\sin\varphi)Y + a^2\cos 2\varphi + 2ap\sin\varphi + 2aq\cos\varphi = 0,$$

et se met sous la forme

$$(X+q-a\cos\varphi)^2 - (Y+p+a\sin\varphi)^2 + 4ap\sin\varphi + 4aq\cos\varphi + p^2 - q^2 = 0.$$

Le centre est donné par les deux équations

$$X + q - a\cos\varphi = 0, \qquad Y + p + a\sin\varphi = 0,$$

et le lieu de ce point est fourni par un calcul semblable au précédent; nous trouvons ainsi la même équation, l'équation (1).

Chacune des droites $X + q - a\cos\varphi = 0$, $Y + p + a\sin\varphi = 0$ est un axe de cette hyperbole. Pour avoir l'enveloppe de la première, nous l'écrirons de cette façon :

$$(x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi = -q,$$

nous lui adjoignons sa dérivée par rapport à φ, et, pour éliminer φ, nous élevons les deux équations au carré et nous les ajoutons; nous avons ainsi le cercle

$$(2) \qquad (x-a)^2 + y^2 = q^2.$$

Le second axe enveloppe de même le cercle

$$(3) \qquad (x+a)^2 + y^2 = p^2.$$

Les asymptotes ont pour équations

$$X + Y + a\sin\varphi - a\cos\varphi + p + q = 0,$$
$$X - Y - a\cos\varphi - a\sin\varphi + q - p = 0,$$

ou

$$(x-y-a)\cos\varphi + (x+y+a)\sin\varphi = -p-q,$$
$$(x+y-a)\cos\varphi + (-x+y-a)\sin\varphi = p-q.$$

Nous aurons leurs enveloppes de la même façon que précédemment. Ce sont les deux cercles

$$(4) \qquad (x-y-a)^2 + (x+y+a)^2 = (p+q)^2,$$
$$(5) \qquad (x+y-a)^2 + (x-y+a)^2 = (p-q)^2.$$

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1896)

Algèbre (M. Combette.) (*Suite.*)

519. — Limites pour $x = 0$ des expressions suivantes :

$$\frac{\sin 5x - \operatorname{tg} 3x}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}, \quad \frac{\sin^3 5x - \operatorname{tg}^2 4x . \sin x}{\cos^2 x . \operatorname{tg} 3x . \sin^2 2x}, \quad \frac{5x^2 - \operatorname{tg} 4x . \sin 5x}{\operatorname{tg}^3 3x . \operatorname{cotg} 2x}, \quad \frac{2 \sin^3 x - \operatorname{tg}^3 5x}{\operatorname{tg}^3 4x + \sin 2x . \sin 3x . \operatorname{tg} 4x}.$$

520. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome soit divisible par sa dérivée.

521. — Démontrer que l'expression

$$\frac{(x^{n+1} - 1)(x^{n+2} - 1) \ldots (x^{n+p} - 1)}{(x - 1)(x^2 - 1) \ldots (x^p - 1)}$$

est un polynome entier en x. Trouver sa limite pour $x = 1$.

522. — $f(u, v)$ étant un polynome homogène en u et v, u et v des polynomes en x premiers entre eux, montrer que si l'équation $f(u, v) = 0$ admet une racine a au degré de multiplicité α, l'équation $f(u', v') = 0$ admet cette racine au degré $\alpha - 1$.

523. — Si un polynome $f(x)$, à coefficients commensurables, s'annule pour $x = \sqrt[3]{a}$, a étant un nombre commensurable tel que $\sqrt[3]{a}$ soit incommensurable, il est divisible par $x^3 - a$.

524. — Si une équation $f(x) = 0$ admet comme racine $\alpha_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, elle admet aussi pour racines $\alpha_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $\alpha_3 = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\alpha_4 = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

525. — Former l'équation qui admet pour racines les valeurs que prend $f'(x)$ quand on y remplace x successivement par les trois racines de l'équation

$$f(x) = x^3 + px + q = 0.$$

526. — Étudier les racines des équations suivantes :

$$x^5 + 3x^2 - x - 1 = 0 ; \qquad x^5 - 2x + p = 0 ;$$
$$x^5 - ax^2 + b = 0 ; \qquad (a > 0 \quad b > 0),$$
$$x^{2m+1} - px - q = 0 \qquad (p > 0 \quad q > 0).$$

Trigonométrie. (M. Combette.)

527. — Résoudre le système

$$\sin(2x - y) = \cos(2x + y),$$
$$\operatorname{tg}(2x - y) = \operatorname{cotg}(x + 3y).$$

528. — Trouver $\operatorname{tg} \frac{a}{5}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$. Démontrer que l'équation en $\operatorname{tg} \frac{a}{5}$ a ses cinq racines réelles et séparées par les racines de l'équation $1 - 10x^2 + 5x^4 = 0$.

529. — Transformer en produits les expressions suivantes :

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C) ;$$
$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C).$$

530. — Résoudre l'équation $a \sin(x - \alpha) = b \sin(x - \beta)$.

531. — Résoudre les inégalités :

$$2\sin x - 3\cos x < 1; \qquad 3\sin x + 5\cos x > 2; \qquad \frac{\sin^2 x - 3\sin x + 1}{2\sin^2 x - \sin x - 1} > 1;$$

$$\sqrt{a^2 - \sin^2 x} < 2a - \cos x; \qquad 3a - \sqrt{\cos^2 x - a^2} > \sin x; \qquad \frac{\sqrt{\sin^2 x - 2a^2}}{a + \cos x} > 1,$$

a désignant dans les trois dernières une constante positive.

532. — a étant un arc donné, trouver la limite du produit

$$\cos a . \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{a}{2^2} \cdots \cos\frac{a}{2^m}$$

quand m augmente indéfiniment.

533. — Résoudre un triangle connaissant S, A, B.

534. — Résoudre un triangle connaissant a, $b \pm c$ et A.

535. — Dans un quadrilatère ABCD, on donne $AB = a$, $BC = b$, l'angle B et les angles $ADB = \alpha$, $CDB = \beta$. Calculer les angles A et C.

Géométrie analytique. (M. Gouilly.)

Géométrie analytique à deux dimensions.

536. — Trouver l'angle sous lequel on voit d'un point A pris sur l'axe d'une parabole, une corde donnée MM'. Équation du faisceau des droites qui joignent le point A aux extrémités de cette corde

537. — Construire les courbes représentées par les équations

$$y = x + \frac{1}{x}; \qquad y = 2x + 3 + \frac{5}{x-2}; \qquad y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}; \qquad y = \frac{x^3 - 1}{x + 2};$$

$$y = x^2 + \frac{1}{x}; \qquad y = x^2 + 1 + \frac{1}{x-1}; \qquad y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 1};$$

$$y = 2x + 5 \pm \sqrt{x^2 - 4}; \qquad y = 2x + 5 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 7}; \qquad y = 2x + 3 \pm \sqrt{x^2 + 3x - 1}.$$

538. — Construire la courbe $y = (x-1)(x-2)(x-3)$. En déduire la courbe

$$y = \pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

539. — Construire la courbe $y = \sqrt{\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}}$. Applications numériques :

$$y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{x-2}}; \qquad y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x+3}}.$$

540. — Construire les courbes

$$y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}; \qquad y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x+1}; \qquad y = x\sqrt{\frac{x}{x-a}}; \qquad y = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$y = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}; \qquad y = x\sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}}; \qquad y = x^3 \pm \sqrt{x^6 - 1}.$$

541. — Lieu du foyer d'une parabole qui se déplace en restant tangente à deux droites rectangulaires.

542. — Lieu du sommet d'un angle donné circonscrit à une conique.

543. — Construire une hyperbole connaissant une asymptote et trois points. — Tangente en l'un de ces points.

544. — Propriétés communes aux coniques $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1\right)+2\lambda xy=0$. Condition pour que cette équation représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Lieu du centre ; ce lieu a-t-il toujours des points à l'infini ? — Déterminer les directions asymptotiques.

545. — Construire les courbes $\rho=\frac{a}{\cos\omega}$; $\rho=\frac{\sin\omega}{\cos\omega}$; $\rho=a\cos\omega+b\sin\omega$; $\rho=\frac{\cos\omega}{1-\sin\omega}$ (axes de symétrie).

546. — Asymptotes en coordonnées polaires. — Appliquer aux courbes $\rho=\frac{1}{1-\omega}$, $\rho=\frac{1}{1-\omega^2}$.

Géométrie analytique à trois dimensions.

547. — Coordonnées du centre de gravité d'un tétraèdre en fonction des coordonnées des sommets. Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées sont concourantes.

548. — Volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées des sommets.

549. — Les plans bissecteurs des angles dièdres d'un trièdre passent par une même droite.

550. — On donne deux droites passant par l'origine. — Former les équations des bissectrices de l'angle de ces deux droites.

551. — Distance de l'origine à la droite $x=az+p$, $y=bz+q$.

552. — Distance de l'axe des z à la droite $x=az+p$, $y=bz+q$.

553. — Lieu des points à égale distance de l'origine et du plan $z=h$. Cas où les distances sont dans un rapport constant.

554. — Surface engendrée par une parabole en tournant autour de la tangente au sommet.

555. — Etudier les surfaces représentées par les équations

$$x^2+xy-z^2=0,\qquad xy=z,\qquad x^2-zy+1=0,$$

$$ax^2+byz+cz=0,\qquad ayz+bzx+cxy+d=0,\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{p}.$$

556. — Etudier les surfaces représentées par les équations

$$z=x\pm\sqrt{(y-x)(y+x)}\,;\qquad z=2x+1\pm\sqrt{(x-y)(x+y)}\,;$$

$$z=mx\pm\sqrt{x^2-2xy}\,;\qquad z=2x+5\pm\sqrt{x^2-2xy}\,;$$

$$z=mx+ny\pm\sqrt{x^2-4}\,;\qquad y=mx+nz\pm\sqrt{x^2-xz}\,;$$

$$z=mx+ny\pm\sqrt{x^2-2xy+3y^2-4}\,;$$

$$y=x\pm\sqrt{z^2-2zx-3}\,;$$

$$z=mx+ny\pm\sqrt{x^2-2xy+y^2\pm4}\,;$$

$$z=mx+ny\pm\sqrt{ax^2+2bxy+cy^2+d}.$$

557. — Déterminer le cône asymptote pour chacune des surfaces

$$x^2+y^2-zx+x+y=0\,;$$

$$x^2+yz+zx+z=0\,;$$

$$z=y\pm\sqrt{xy+1}.$$

558. — On donne trois axes quelconques et sur chacun d'eux un point. Soient A, B, C. Equation générale des

quadriques qui passent par les quatre points OABC. Équation générale des quadriques qui passent par les quatre côtés du quadrilatère gauche OABCO.

559. — Équation générale des quadriques qui passent par deux droites données. On donne deux droites (A) et (B) parallèles à Ox et Oy et situées la première dans le plan zOx, la seconde dans le plan zOy. Équation générale des quadriques passant par l'origine et les deux droites (A) et (B).

560. — Génératrices rectilignes de la surface $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + yz = 0$.

561. — Étudier la surface $x^2 + y^2 - xz = 0$. Génératrices rectilignes. Sections circulaires.

562. — Lieu des points à égale distance de deux droites données.

QUESTIONS PROPOSÉES

695. — On considère deux cercles fixes C et C_1, et un cercle mobile Γ orthogonal à C et tel que l'un de ses centres de similitude avec C_1 décrive une droite fixe D.

1° Trouver le lieu du centre de ce cercle Γ.

2° Ce lieu est une conique. Séparer les droites D pour lesquelles cette conique est une ellipse de celles pour lesquelles c'est une hyperbole.

3° Lieu du centre de cette conique quand la droite D tourne autour d'un point fixe P. Séparer sur ce lieu les axes qui portent des centres d'ellipses de ceux qui portent des centres d'hyperboles.

4° Enveloppe des axes de la même conique, quand le point P est au centre de C_1. Trouver combien il passe d'axes réels par un point du plan. E. H.

696. — On considère deux droites fixes Ox et Oy, sur lesquelles on prend respectivement des points A et B tels que $OA + OB = l$, l étant une longueur donnée. On demande :

1° Le lieu du point de rencontre avec AB de l'axe radical des deux cercles décrits respectivement sur OA et OB comme diamètres;

2° Le lieu du second point de rencontre de ces deux cercles. — Cas particulier où l'angle xOy est droit.

G. Pouilliart.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE NOMBRE DES INÉGALITÉS DISTINCTES QUI DOIVENT ÈTRE VÉRIFIÉES PAR LES COEFFICIENTS D'UNE ÉQUATION ENTIÈRE DE DEGRÉ m ET A COEFFICIENTS RÉELS POUR QUE CETTE ÉQUATION AIT TOUTES SES RACINES RÉELLES ET DISTINCTES.

Si l'équation $f(x)$ est de degré pair $2m$, on peut supposer $f(x)$ décomposé en m facteurs du second degré à coefficients réels. Les coefficients entrant dans ces divers facteurs ne sont liés par aucune relation, sans quoi l'équation $f(x) = 0$ ne serait pas l'équation générale de degré m. Or chaque facteur doit avoir ses racines réelles, ce qui donne m relations entre les coefficients des facteurs, par suite m relations indépendantes entre ceux de $f(x)$.

Si $f(x)$ est de degré impair $2m+1$, on peut l'écrire $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, $x-a$ étant un facteur réel et $\varphi(x)$ un polynome de degré $2m$ à coefficients réels.

Il faut et il suffit que $\varphi(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles, ce qui exige m relations indépendantes entre les coefficients de $\varphi(x)$, par suite de $f(x)$.

C...

ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET SYNTHÉTIQUE

Par M. **H. Laurent** (*Fin*).

Coïncidence. — Deux figures seront dites égales, quand elles pourront être transformées l'une dans l'autre au moyen d'un même déplacement effectué sur chacun des points de l'une d'elles ; le déplacement effectué, on dira alors qu'elles coïncident. En général, deux figures coïncidentes sont celles qui sont formées des mêmes points.

Deux droites qui ont deux points communs coïncident.

En effet, si

$$\frac{x_1 - c_1}{l_1} = \frac{x_2 - c_2}{l_2} = \ldots,$$

$$\frac{x_1 - c'_1}{l'_1} = \frac{x_2 - c'_2}{l'_2} = \ldots,$$

sont satisfaites pour $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, ... et $x_1 = x''_1$, $x_2 = x''_2$, ...

on aura

$$\frac{x'_1 - c_1}{l_1} = \frac{x'_2 - c_2}{l_2} = \ldots,$$

$$\frac{x''_1 - c_1}{l_1} = \frac{x''_2 - c_2}{l_2} = \ldots;$$

ces équations déterminent $c_1, c_2, \ldots$ et les rapports $l_1 : l_2 : \ldots$ ce qui donne, en éliminant ces quantités, les équations de la droite *unique* passant par $x'_1, x'_2 \ldots$ et $x''_1, x''_2 \ldots$,

$$\frac{x_1 - x'_1}{x'_1 - x''_1} = \frac{x_2 - x'_2}{x'_2 - x''_2} = \ldots.$$

Toute équation du premier degré entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentera une surface que nous appellerons un *plan*.

Deux plans dans l'espace à n dimensions, qui ont n points communs, coïncident. Par n points donnés on peut faire passer un plan et un seul (il y a des exceptions).

En effet, l'équation

$$(1) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$$

représente, d'après ce que nous venons de dire, un plan, et si l'on écrit que cette équation est satisfaite pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, $\ldots$, $x_n = x_{ni}$, i variant de 1 à n, on a n équations telles que

$$(2) \qquad a_1x_{1i} + a_2x_{2i} \ldots + a_nx_{ni} + a_{n+1} = 0;$$

d'où l'on tire les a et en les portant dans (1), ou en éliminant les a entre (1) et (2) on a une équation du premier degré qui ne devient illusoire que si les points $x_{1i}, \ldots, x_{ni}$ appartiennent à une variété à moins de $n-1$ dimensions.

La théorie des formes quadratiques met hors de doute l'existence des substitutions orthogonales ; elle nous apprend qu'il existe au moins une, et même une infinité de substitutions orthogonales permettant de ramener

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2$$

à la forme Sy^2, où $S = a_1^2 + \ldots + a_n^2$; elle nous apprend aussi que le résultat (ou comme l'on dit le produit) de deux substitutions orthogonales est encore une substitution orthogonale ; il en résulte que deux expressions

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$
$$b_1y_1 + \ldots + b_ny_n$$

peuvent toujours être transformées l'une dans l'autre au moyen d'une substitution orthogonale si

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 = b_1^2 + \ldots + b_n^2;$$

d'où cette conséquence importante :

Les plans sont des figures égales.

En effet, soient les deux plans

$$a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0,$$
$$b_0 + b_1x_1 + \ldots\ldots\ldots = 0;$$

une substitution orthogonale ramènera leurs équations à avoir les mêmes termes du premier degré et une infinité de translations les rendront identiques.

Mais s'il est possible, en posant

$$y_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \cdots + \alpha_{in}x_n,$$

de changer

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n \qquad \text{en} \qquad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

c'est que l'on a identiquement

$$\Sigma b_i(\alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

ou

$$b_1\alpha_{11} + b_2\alpha_{21} + \cdots + b_n\alpha_{n1} = a_1,$$
$$b_1\alpha_{12} + b_2\alpha_{22} + \cdots + b_n\alpha_{n2} = a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc *si les points* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *et* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *sont tels que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2,$$

on pourra au moyen d'une substitution orthogonale faire coïncider ces deux points.

Enfin étant donnés deux points A *et* A′ *et deux autres points* B *et* B′, *tels que*

$$\text{distance AA}' = \text{distance BB}',$$

il est possible de déplacer l'ensemble des deux premiers de manière à faire coïncider à la fois A *et* B, A′ *et* B′.

Par suite, *deux droites sont deux figures égales.*

Soient, en effet,

$$\begin{array}{lll} a_1, \ldots, a_n, & \text{les coordonnées de} & \text{A}, \\ a'_1, \ldots, a'_n, & \quad\text{»} & \text{A}', \\ b_1, \ldots, b_n, & \quad\text{»} & \text{B}, \\ b'_1, \ldots, b'_n, & \quad\text{»} & \text{B}'; \end{array}$$

il faut prouver qu'il existe des quantités α_{ij}, α_i telles que

$$b_i = \alpha_i + \alpha_{i1} a_1 + \cdots + \alpha_{in} a_n,$$
$$b'_i = \alpha_i + \alpha_{i1} a'_1 + \cdots + \alpha_{in} a'_n,$$

ou qu'il existe des α_{ij} tels que

$$b_i - b'_i = \alpha_{i1}(a_1 - a'_1) + \cdots + \alpha_{in}(a_n - a'_n),$$

ce qui est possible puisque

$$\Sigma(b_i - b'_i)^2 = \Sigma(a_i - a'_i)^2,$$

les α_{ij} étant connus, on aura sans ambiguïté les α_i.

Le premier livre de Legendre. — Remarquons que nous n'avons encore fait aucune hypothèse étrangère à celles qui appartiennent à la théorie des nombres ; nous allons retrouver le premier livre de la géométrie de Legendre, à cela près que rien ne prouve que ce que nous avons appelé point, ligne,... soit ce que l'on appelle ainsi en géométrie concrète.

Dans l'espace à deux dimensions, la droite a une équation de la forme

$$ax + by + c = 0,$$

x et y désignant les coordonnées d'un quelconque de ses points, et, comme on peut écrire d'une infinité de manières son équation sous la forme

$$\frac{x - x_0}{b} = -\frac{y - y_0}{a},$$

b et $-a$ sont ses paramètres directeurs, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\dfrac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ sont ses cosinus directeurs.

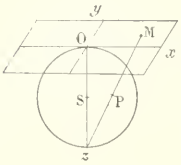
On peut assujettir une droite à deux conditions et il est inutile de montrer comment on peut former l'équation d'une droite passant par deux points, par un point et ayant une direction donnée.

Deux droites se rencontrent toujours quand elles n'ont pas la même direction, elles n'ont alors qu'un point commun ; deux droites de même direction ne se rencontrent pas ou coïncident. Si elles ne coïncident pas, elles sont dites *parallèles*.

Par un point, on ne peut mener qu'une droite de direction donnée et par suite par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée, c'est le *postulatum d'Euclide démontré en toute rigueur*. Mais je renouvelle l'observation déjà faite, que rien ne prouve l'identité de nos points, de nos droites avec ceux de la géométrie concrète. Cette observation est importante, car je montrerai plus loin qu'avec d'autres conventions le théorème d'Euclide est faux.

Appréciation des théories précédentes. — Passons maintenant pour un instant au concret. Soient Ox,

Oy deux axes rectangulaires, S le centre d'une sphère tangente à l'origine au plan des xy. Soit z le pôle opposé à O, M un point de coordonnées x, y dans le plan; zM rencontre la sphère en un point P, déterminé quand on se donne x et y. On peut appeler coordonnées d'un point P sur la sphère les coordonnées x et y du point M correspondant. Quand le point M décrit une droite dans le plan, le point P décrit un cercle sur la sphère. S'il nous plaît de changer notre vocabulaire, nous pouvons dire que le point P décrit une droite et transporter à la sphère les dénominations du plan; nous pouvons dire, par exemple, que deux arcs de cercle sont égaux, superposables quand les droites correspondantes le seront.



On peut d'ailleurs en appelant point l'ensemble des coordonnées x et y définies comme nous venons de le faire, démontrer toute la géométrie plane qui sera vraie sur la sphère.

Il y a plus, un être raisonnable pourrait fort bien être constitué de telle sorte que ses sens le rendraient victime d'illusions lui faisant réellement prendre des arcs de cercles inégaux pour des droites égales, et cet être à son insu fera de la géométrie plane sur la sphère, qu'il prendra pour un plan. Mais si ce paradoxe paraît trop grossier, passons à un autre ordre d'idées; je concède que les principes de la géométrie soient absolument exacts, excepté ceux qui reposent sur le postulatum d'Euclide; j'appelle x et y les perpendiculaires abaissées d'un point sur deux axes rectangulaires. Si j'appelle droite le lieu qui a une équation du premier degré, et si j'appelle figures égales celles qui peuvent être transformées l'une dans l'autre par ce que j'ai appelé un déplacement, ne voit-on pas que je puis créer de toutes pièces une géométrie euclidienne?

Or qu'est-ce en réalité un déplacement concret, ce que le vulgaire appelle un déplacement sans changement de forme? Avouons donc que si Euclide a créé la géométrie en la basant, à son insu, sur les propriétés des transformations orthogonales, c'est (comme l'a fort bien dit M. Poincaré) que cela lui a paru plus commode.

GÉOMÉTRIE

615. — *On sait qu'il y a quatre paraboles circonscrites à un triangle et tangentes à une droite* Δ. *Construire ces paraboles.*

Trouver l'enveloppe de Δ *lorsque deux de ces paraboles ont leurs axes rectangulaires.*

Nous nous bornerons à donner une solution géométrique de cette question.

Soient ABC le triangle donné et Δ la droite à laquelle les paraboles doivent être tangentes (*fig.* 1). Si on envisage chacune d'elles comme étant doublement tangente au couple formé par la droite Δ et la droite de l'infini, il est facile d'avoir les cordes des contacts. En effet, la droite AB, par exemple, rencontre les deux tangentes en des points C_0 et C'_0 (C'_0 est à l'infini) qui, avec le couple AB, déterminent sur le côté du triangle une involution dont un des points doubles est situé sur la corde des contacts de la parabole envisagée; or le point C_0 est le point central de cette involution; si donc on mène par ce point une tangente à un cercle passant en A et B, C_0T_0, et qu'on rabatte cette longueur sur AB, de part et d'autre de C_0, on aura les deux points doubles de l'involution, C_1 et C_2. Nous prendrons comme cercle passant par A et B, le cercle circonscrit au triangle ABC, afin que ce même cercle nous serve aux constructions analogues pour les deux autres côtés. Nous trouverons de même les points doubles, B_1 et B_2, A_1 et A_2, des involutions analogues portées par les autres côtés du triangle.

Il résulte alors de ce qui précède qu'il y a quatre cordes des contacts, les droites A_1B_1, A_1B_2,

A_2B_1, A_2B_2, et qu'elles passent nécessairement, deux par deux, aux points C_1 et C_2. Mais il est encore évident, d'après les propriétés harmoniques du quadrilatère complet, que les six points A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2 sont les couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet dont le triangle ABC est le triangle diagonal. Par conséquent il y a quatre paraboles passant aux trois points A, B, C et tangentes à la droite Δ; elles touchent la droite Δ et la droite de l'infini aux points où les droites $A_2B_2C_2$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_1$, $A_1B_1C_2$ les rencontrent. Chacune d'elles est donc bien déterminée et aisée à construire en tant que conique passant par trois points donnés et touchant une droite donnée en un point donné. On simplifiera encore la construction en tenant compte de ce fait que la conique est une parabole ayant son axe parallèle à l'une des quatre droites indiquées antérieurement. Il est inutile d'insister sur cette construction. On peut enfin remarquer, mais cela ne nous servira pas, que la droite Δ est la droite de Newton du quadrilatère complet que nous avons formé plus haut.

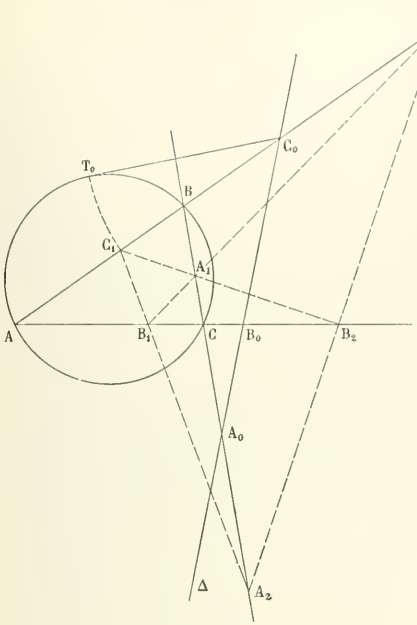


Fig. 1

Pour qu'il y ait deux de ces paraboles ayant leurs axes rectangulaires, il faut et il suffit que deux des quatre côtés du quadrilatère soient rectangulaires, par exemple $B_2A_2C_2$ et $B_2A_1C_1$; alors le point C_0 est équidistant des trois points C_1, C_2 et B_2, il a donc même puissance par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC et au cercle-point B_2; il en est donc de même pour le point A_0; donc la droite Δ est alors l'axe radical du cercle circonscrit au triangle ABC et du cercle-point B_2. Comme le point B_2 décrit la droite fixe AC, nous sommes alors ramené au problème suivant: *trouver l'enveloppe de l'axe radical d'un cercle fixe et d'un cercle-point dont le centre décrit une droite.*

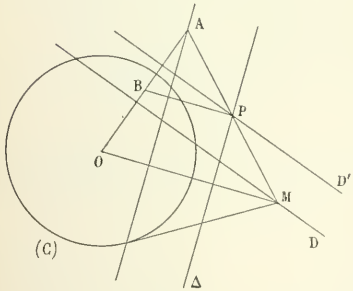


Fig. 2

Soient (C) et D (*fig.* 2) le cercle et la droite donnés, O le centre du cercle, A le pôle de la droite D et M un point mobile sur cette droite. Le point P, milieu de AM décrit une droite D′ parallèle à D; la polaire de M passe au point A; l'axe radical du cercle (C) et du cercle-point M, étant parallèle à cette polaire et équidistant d'elle et du point M, passe au point P. Soit Δ cette droite; la perpendiculaire à Δ en P est parallèle à OM et, par suite, passe au milieu B de OA. La droite Δ enveloppe donc une parabole ayant B pour foyer et la droite D′ pour tangente au sommet.

L'enveloppe totale des droites Δ envisagées dans l'énoncé se compose donc de trois paraboles analogues à celle que nous venons de trouver et relatives aux trois côtés du triangle donné ABC.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

616. — *Toutes les cubiques gauches passant par les sommets d'un tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires et par l'orthocentre de ce tétraèdre sont équilatères.*

La solution de cette question est implicitement contenue dans la note que M. Lapointe a publiée dans la *Revue* (n° d'octobre 1896). En voici d'ailleurs une démonstration différente :

Nous nous appuierons sur cette propriété que lorsqu'une cubique est circonscrite à un tétraèdre conjugué par rapport à une quadrique, elle est circonscrite à une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à cette quadrique.

Pour établir cette propriété, désignons par ABCD un tétraèdre conjugué par rapport à une quadrique Q et auquel une cubique donnée soit circonscrite; prenons ce tétraèdre pour tétraèdre de référence et représentons par $Ax^2+By^2+Cz^2+Dt^2=0$ l'équation de la quadrique et par

$$\begin{aligned}
\theta x &= a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda + a''',\\
\theta y &= b\lambda^3 + b'\lambda^2 + b''\lambda + b''',\\
\theta z &= c\lambda^3 + c'\lambda^2 + c''\lambda + c''',\\
\theta t &= d\lambda^3 + d'\lambda^2 + d''\lambda + d'''
\end{aligned}$$

les équations de la cubique en fonction d'un paramètre λ. Nous avons à exprimer que pour certaines valeurs du paramètre, $\lambda=\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ces dernières équations donnent les coordonnées des points A, B, C, D, c'est-à-dire que pour $\lambda=\alpha$, y, z, t sont nuls, que pour $\lambda=\beta$, x, z, t sont nuls, etc. Les valeurs de x, y, z, t s'écrivent donc ainsi

$$\begin{aligned}
\theta x &= a(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\lambda-\delta),\\
\theta y &= b(\lambda-\alpha)(\lambda-\gamma)(\lambda-\delta),\\
\theta z &= c(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\delta),\\
\theta t &= d(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma),
\end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$\sigma x = \frac{a}{\lambda-\alpha}, \qquad \sigma y = \frac{b}{\lambda-\beta}, \qquad \sigma z = \frac{c}{\lambda-\gamma}, \qquad \sigma t = \frac{d}{\lambda-\delta}.$$

Soit λ_0 un point quelconque de cette courbe, le plan polaire de ce point par rapport à la quadrique est

$$\frac{Aax}{\lambda_0-\alpha}+\frac{Bby}{\lambda_0-\beta}+\frac{Ccz}{\lambda_0-\gamma}+\frac{Ddt}{\lambda_0-\delta}=0;$$

ce plan coupe la cubique en trois points dont les paramètres sont les racines de l'équation

$$\frac{Aa^2}{(\lambda_0-\alpha)(\lambda-\alpha)}+\frac{Bb^2}{(\lambda_0-\beta)(\lambda-\beta)}+\frac{Cc^2}{(\lambda_0-\gamma)(\lambda-\gamma)}+\frac{Dd^2}{(\lambda_0-\delta)(\lambda-\delta)}=0.$$

Il s'agit de montrer que ces points sont deux à deux conjugués par rapport à la quadrique Q. A cet effet désignons par λ_1 et λ_2 les paramètres de deux de ces points; les relations suivantes sont alors vérifiées

$$\frac{Aa^2}{(\lambda_0-\alpha)(\lambda_1-\alpha)}+\frac{Bb^2}{(\lambda_0-\beta)(\lambda_1-\beta)}+\cdots=0,$$

$$\frac{Aa^2}{(\lambda_0-\alpha)(\lambda_2-\alpha)}+\frac{Bb^2}{(\lambda_0-\beta)(\lambda_2-\beta)}+\cdots=0;$$

multiplions la première par $\lambda_1-\lambda_0$, la seconde par $\lambda_2-\lambda_0$ et retranchons-les l'une de l'autre, nous aurons, toutes réductions faites,

$$\frac{Aa^2}{(\lambda_1-\alpha)(\lambda_2-\alpha)}+\frac{Bb^2}{(\lambda_1-\beta)(\lambda_2-\beta)}+\cdots=0,$$

et cette condition exprime que les deux points sont conjugués. Le théorème est donc établi.

Cela posé, supposons qu'une cubique soit circonscrite à un tétraèdre ayant ses arêtes opposées rectangulaires et qu'en outre elle passe par l'orthocentre, O, de ce tétraèdre. Il y a une sphère bien déterminée ayant son centre en O et par rapport à laquelle ce tétraèdre est conjugué. D'après le théorème précédent, le point O de la cubique est le sommet d'un autre tétraèdre inscrit dans la cubique et conjugué par rapport à la sphère; les trois autres sommets de ce tétraèdre sont les points à l'infini de la cubique; par conséquent les arêtes issues de O forment un trièdre de diamètres conjugués dans cette sphère; elles sont donc rectangulaires et la cubique est équilatère.

V. FERRET D'ÉPERLECQUES.

---

617. — *On considère une cubique gauche équilatère* V *et un triangle* ABC *inscrit dans* V; *puis on suppose que le plan du triangle* ABC *se déplace parallèlement à lui-même, et on demande :*

1° *Le lieu du point de concours des hauteurs du triangle* ABC;

2° *La surface engendrée par le cercle conjugué au triangle*;

3° *Cette surface est une sphère, et on demande le lieu de son centre quand la direction du plan du triangle varie.*

1. Soient ABC un triangle inscrit dans une cubique gauche équilatère et PQ la sécante double de cette cubique qui est perpendiculaire au plan ABC, P et Q désignant les deux points de rencontre de cette droite avec la cubique. Il y a une sphère Σ et une seule ayant pour centre le point P et telle que par rapport à cette sphère, le point Q soit le pôle du plan ABC. La cubique est circonscrite à un tétraèdre conjugué relativement à cette sphère, celui qu'on obtient en joignant le point P aux points à l'infini sur la courbe; donc, d'après ce qui a été vu dans la question **616**, elle est circonscrite à une infinité d'autres tétraèdres conjugués de Σ, à tout point de la cubique correspondant un tétraèdre de ce genre ayant l'un de ses sommets au point considéré; par suite, le tétraèdre QABC est conjugué de Σ; il s'ensuit qu'il est orthocentrique et a pour orthocentre le point P. La hauteur PQ de ce tétraèdre tombe dès lors au point de concours des hauteurs du triangle ABC et le lieu de ce point est la sécante double PQ perpendiculaire à la direction de plan choisie.

2. Le cercle conjugué du triangle ABC est la section de la sphère Σ par le plan de ce triangle; c'est donc, sur la sphère, la courbe de contact du cône circonscrit ayant son sommet en Q; par suite, ce cercle est aussi sur la sphère décrite sur PQ comme diamètre et son lieu est cette seconde sphère.

3. Le lieu du centre de cette sphère est le lieu des milieux des sécantes doubles de la cubique. C'est une surface du 3e ordre (voir *Revue*, numéro de novembre 1893).

V. FERRET D'ÉPERLECQUES.

PHYSIQUE

567. — *Un ballon complètement gonflé au départ, s'élève dans de l'air sec. Son poids est* q, *sans compter le poids du gaz qui le remplit. Au départ, la pression est* p_1, *la température* t_1 *et la force ascensionnelle* F. *A quelle hauteur le ballon montera-t-il?*

On supposera la variation de température de l'air proportionnelle à la variation d'altitude et d'un degré centigrade pour une variation d'altitude h. *On négligera la différence entre le volume intérieur et le volume extérieur du ballon, ainsi que la variation de la gravité.*

Application numérique :

$$q = 32^{kg}, \qquad F = 106^{kg}, \qquad t_1 = 14^{\circ}, \qquad h = 182^{m},$$

densité par rapport à l'eau de l'air normal . . . $a_0 = 0{,}001293$,

— — *du mercure normal* . $m_0 = 13{,}6$,

coefficient de dilatation des gaz . . . . . $\alpha = \frac{1}{273}$.

Désignons par V le volume du ballon, par d la densité du gaz qui le remplit, par z la hauteur cherchée, par t_2 et p_2 la température et la pression à l'altitude z, enfin par p_0 la pression normale.

Cherchons d'abord la pression p_2. L'expression de la force ascensionnelle au départ donne l'équation

$$Va_0 \frac{p_1}{p_0} \frac{1}{1+\alpha t_1}(1-d) = F + q,$$

et la condition d'équilibre à la pression p_2 s'exprime par

$$Va_0 \frac{p_2}{p_0} \frac{1}{1+\alpha t_2}(1-d) = q.$$

Divisons la seconde égalité par la première; il vient

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1} \frac{q}{F+q},$$

ou bien, comme $t_2 = t_1 - \frac{z}{h}$,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q}{F+q}\left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha t_1}\frac{z}{h}\right).$$

Pour exprimer d'autre part $\frac{p_2}{p_1}$ en fonction de z, il faut reprendre le problème du nivellement barométrique en y introduisant l'hypothèse $t_2 = t_1 - \frac{z}{h}$; on trouve facilement

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha t_1}\frac{z}{h}\right)^{\frac{a_0 h}{p_0 \alpha}}.$$

Égalons enfin ces deux valeurs de la pression; il vient

$$\left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha t_1}\frac{z}{h}\right)^{\frac{a_0 h}{p_0 \alpha} - 1} = \frac{q}{F+q}.$$

L'application numérique donne

$$\left(1 - \frac{z}{52234}\right)^{0{,}21555} = \frac{16}{69},$$

d'où

$$z = 12765^{m}.$$

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1897)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

I. Mathématiques élémentaires.

617. — On donne deux équations du deuxième degré

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0;$$

écrire 1° que les racines de la première sont comprises entre les racines de la seconde; 2° qu'une racine de la première est comprise entre les racines de la seconde.

618. — Condition pour que la fonction $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ n'ait ni maximum ni minimum.

619. — Maximum du volume d'une lentille bi-convexe, la surface étant formée de deux portions de sphère de même rayon et restant constante.

620. — Trouver sur la ligne des centres de deux sphères un point tel que la somme des zônes vues de ce point sur les deux sphères soit maximum ou minimum.

621. — Soit AB une corde d'un cercle parallèle à la tangente au point C ; on abaisse AA' et BB' perpendiculaire sur cette tangente. Comment faut-il placer la corde AB pour qu'en faisant tourner la figure autour de la tangente au point C le cylindre engendré par le rectangle ABA'B' ait une surface ou un volume maximum ou minimum ?

622. — Minimum de la surface totale d'un cône de révolution circonscrit à une sphère.

623. — On donne un cercle et un point A dans son plan. On joint le point A à un point M du cercle. Étudier les variations de la longueur AM.

624. — Trouver la plus courte distance entre deux points A et B en rencontrant soit une droite donnée, soit une circonférence donnée.

II. Algèbre

625. — Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$

626. — Résoudre les systèmes : $\begin{cases} bz - cy = \alpha, \\ cx - az = \beta, \\ ay - bx = \gamma, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=2, \\ y-2z+t=4, \\ z-t+x=3, \\ t+2x-2y=-1 \end{cases}$

627. — Démontrer la formule $1 - C_m^1 + C_m^2 - \ldots + (-1)^p C_m^p = (-1)^p C_{m-1}^p$.

628. — Calculer $(a+b+c+d+f)^4$.

629. — Étudier les séries qui ont pour termes généraux : nx^{n-1}, $\dfrac{(n-1)x^n}{n^4}$, $\dfrac{1}{n^2(\mathrm{L}n)^2}$, $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

$\dfrac{\sqrt{n}}{a+bn^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$, $\dfrac{\mathrm{L}n}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{n^2-1}{a+bn^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$, $\dfrac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n} \cdot \dfrac{1}{(2n+1)2^{2n-1}}$.

630. — Étudier les conditions de convergence de la série qui a pour terme général $e^{(2n+1)^2a+(2n+1)^2}$, n variant de $-\infty$ à $+\infty$.

631. — Étudier les séries : $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{3n-2} + \dfrac{1}{3n-1} - \dfrac{1}{3n} + \ldots$,

$1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n(n+2)} + \dfrac{1}{n(n+2)(n+4)} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+2)\ldots(n+2p)} + \ldots$, $1 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{5.6.7} + \ldots$,

$1 + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{4.5.6} + \dfrac{1}{7.8.9.10} + \ldots$, $\dfrac{1.2}{n(n+1)} + \dfrac{3.4}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \dfrac{(2p+1)(2p+2)}{(n+2p)(n+2p+1)} + \ldots$.

632. — Calculer à $\dfrac{1}{1000}$ près les sommes des séries :

$\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4^2} + \ldots + \dfrac{1}{(n+2)^n} + \ldots$, $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{1^2 \times 2^2} + \dfrac{1}{1^2 \times 2^2 \times 3^2} + \ldots + \dfrac{1}{(n!)^2} + \ldots$,

$1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^n} + \ldots$, $1 + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1.3} + \ldots + \dfrac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)} + \ldots$.

633. — Trouver les dérivées des fonctions : $\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$,

$\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{(\arccos x)^2\mathrm{L}(1+x^2) - \sqrt[3]{x}\sin x + x^3}{\operatorname{tg} x\sqrt{1-x^2}}$, $\dfrac{\mathrm{L}(1+x^2)\arcsin x + \sqrt[3]{x^3} - \cos x}{a^2\sqrt{x^2+1}}$,

$\dfrac{\cos x \arcsin x - \mathrm{L}\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^2} - \operatorname{tg} x}{x^3 - 2x + \sqrt{\sin^2 x + \cos x}}$, $\dfrac{\cos x(x^4+1)^2 - \operatorname{arc\,tg} x}{a^2\mathrm{L}(1+x) + \sqrt{\cos^3 x + 1}}$,

$\dfrac{\mathrm{L}(1+x)\operatorname{tg} x(x^2+x+1) - \sqrt{\operatorname{arc\,tg} x + \cos^2 x}}{(\arcsin x)^3\sqrt[4]{1+x-x^5}}$, $\sqrt{\dfrac{a^2\log x + \dfrac{x^2}{x^3+1}\sqrt{x+1}}{x^6 - x^4 + \operatorname{arc\,tg} x}}$.

634. — Dérivée de $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{u+v}{1-uv}$, u et v étant des fonctions de x.

635. — Dérivées successives des fonctions :

$$\frac{1}{\cos x - 1},\quad \frac{1}{\cos^2 x},\quad \frac{\operatorname{tg} x}{\mathrm{L}x},\quad \operatorname{tg}^5 x,\quad \frac{\mathrm{L}x}{\cos x},\quad \frac{a^x}{\mathrm{L}x},\quad \frac{a^x\mathrm{L}x}{\sqrt{x^2-1}},\quad \frac{\cos^2 x}{\operatorname{arc\,tg} x},$$

$e^{ax}f(x)$, $f(x)$ désignant un polynome.

Dérivée d'ordre n des fonctions : $\cos^2 x$, $\cos^p x$, $e^x . x^m$, e^{-x^2}, $\dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\dfrac{1}{y}$ (y étant fonction de x).

636. — Étudier les variations des fonctions :

$$x^3 e^{\frac{2x}{x^2-1}},\quad \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}},\quad 2^{\frac{x}{x^2-1}},\quad \frac{a^x}{x},\quad \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}},\quad \frac{x^m-1}{x^2-1},$$

$$xe^{\frac{1}{x}},\quad x^2 e^{1-\frac{1}{x}},\quad \log_x a,\quad \cos\sqrt{x},\quad (1+x)^{\frac{1}{x}},\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad \frac{\mathrm{L}x - x^2 + 1}{x},$$

$$\frac{\mathrm{L}x}{1+x-\mathrm{L}x},\quad \frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-5},\quad \frac{x^3-4x+3}{x^2-4x+3},\quad \frac{2x^3+3x^2-5}{x^2-5x+4},\quad 2\cos^3 x + \sin x,\quad \frac{2\cos x - 3\sin x}{\sin x + \cos x}.$$

637. — Minimum de $x^3 + 2xy^2 + y^3$ lorsque $xy = k^2$.

638. — Limites des fonctions : $\dfrac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$ pour $x = a$, $\left(1 + \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{m^2}\right)^m$ pour m infini.

$$\left(\cos\frac{a}{x}\right)^{x^2} \text{ pour } x \text{ infini},\qquad \left(1-\cos\frac{x}{n}\right)^n \text{ pour } n \text{ infini}.$$

639. — Condition pour que $\mathrm{A}e^{ax} + \mathrm{B}e^{bx} + \mathrm{C}e^{cx}$ soit identiquement nul.

640. — Si une fonction $f(x)$ admettant une dérivée d'ordre $n+1$, $f^{(n+1)}(x)$, s'annule pour n valeurs de x, a, b, c, ... l, on peut écrire $f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l)\dfrac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}$, x_0 étant compris entre le plus petit et le plus grand des nombres a, b, ... l.

641. — Développer en série les fonctions : $\mathrm{L}\sqrt{1+x}$, $\mathrm{L}\sqrt{1-x^2}$, $\mathrm{L}(x^2-3x+2)$, $\mathrm{L}(a^2-b^2-x^2)$, $\mathrm{L}\sqrt[3]{a^3-x^3}$,

$$\frac{1}{\mathrm{L}(1+x)},\quad \operatorname{arc\,tg} x,\quad \operatorname{arc\sin} x,\quad \operatorname{arc\cos} x,\quad \sin(ax+b),\quad \cos(ax+b),$$

$$\frac{1}{\sin(ax+b)},\quad \frac{1}{\cos x},\quad \operatorname{tg} x,\quad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\quad \frac{1}{a^x+1},\quad \cos(a^2-b^2x^2),\quad \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$(k^2-l^2x^2)^m,\quad \sqrt{4-3x^2},\quad \frac{1}{(1-x^2)^3},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{4-x^3}},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{a-x}},\quad \frac{1}{\sqrt{a+bx}}.$$

642. — Développer en série suivant les puissances de $x+1$ la fonction e^{x^2+2x}. Calculer la somme des termes jusqu'au rang $n+1$. Limite de l'erreur commise.

643. — Calculer les fonctions symétriques :

$\sum \dfrac{ab^2}{c}$ pour l'équation $x^6 - 4x^4 + 2x^3 - 1 = 0$,

$\sum \dfrac{ab^2}{c^3}$ pour $x^6 + x^5 - 3x^2 + 1 = 0$,

$\sum \dfrac{a^2}{bc^3}$ pour $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 = 0$,

$\sum \dfrac{abc}{d}$ pour $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$,

$\sum \dfrac{a^2b}{c}$ pour $x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 1 = 0$,

$\sum ab^2c^3d^4$ pour $x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 2x + 3 = 0$,

$\sum \dfrac{a^2b^3}{c^2}$ pour $x^5 - x^5 + x^3 - 2 = 0$,

$\sum a^2b^3c^4$ pour $x^4 + px^2 + qx + r = 0$,

$\sum ab^2c^4$ pour $ax^5 + bx^4 + cx^2 + dx + e = 0$.

644. — Former le produit des carrés des différences des racines de l'équation $x^4 - 3x - 1 = 0$. Le signe de ce produit peut-il apprendre quelque chose sur les racines de l'équation donnée ?

645. — On donne un polynome à coefficients entiers $f(x)$. On substitue cinq nombres entiers consécutifs -2, -1, 0, 1, 2; aucun résultat n'est divisible par 5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de racines entières.

646. — On donne les équations

(1) $x^3 + px + q = 0$ qui a une seule racine réelle,

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ qui a ses deux racines réelles ;

exprimer que la racine de l'équation (1) est comprise entre celles de (2).

647. — Nombre de racines distinctes d'une équation algébrique. Ecrire que l'équation $x^4 + 6px^2 + 4qx + r = 0$ a deux racines distinctes. — Calcul des racines.

648. — Conditions pour que les équations $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $x^4 + ax^2 + x - 1 = 0$, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ aient une racine double.

649. — Résoudre l'équation $x^4 - ax^3 + bx^2 - c = 0$ sachant qu'elle a une racine double et une racine triple.

650. — Résoudre l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ sachant qu'elle a une racine triple.

651. — Résoudre l'équation $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ sachant qu'elle a deux racines doubles.

652. — Résoudre ou discuter les équations :

$$x^{10} - 5x^5 + 1 = 0, \qquad x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0, \qquad x^{12} - 4x^8 + 6x^4 - 2 = 0,$$
$$x^8 - 7x + 4 = 0, \qquad x^3 - 7x^2 + 4x - 1 = 0, \qquad x^8 - x^6 + 2x^3 - 3 = 0,$$
$$2x^8 - 5x^5 + 3x^3 - 1 = 0, \qquad x^{10} - 12x^7 + 5x^4 + 1 = 0, \qquad x^5 + 3x^4 - 2x^2 + 2 = 0,$$
$$x^7 - 2x^3 + 5x - 1 = 0, \qquad x^{12} - x^6 + 1 = 0, \qquad x^{12} + 8x^8 + 8x^4 + 1 = 0,$$
$$x - \operatorname{tg} x = 0, \qquad e^x = ax + b, \qquad \left(\frac{5}{6}\right)^x + \frac{x}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} - \frac{1}{2} = 0,$$
$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \mathrm{L}\,\frac{1 + \sin x}{\cos x} - 1 = 0.$$

653. — Discuter la réalité des racines des équations :

$$x^{15} + px^7 + q = 0, \qquad (n-h)x^n - nx^{n-h} + h = 0, \qquad x^9 + \lambda x^6 + \mu x^3 + 1 = 0,$$
$$x^7 + ax^4 + bx + c = 0, \qquad ax^6 + bx^4 + cx^2 + d = 0, \qquad x^4 + bx^3 + cx + d = 0,$$
$$x^5 + px^3 + qx + r = 0, \qquad x^7 + ax^5 + bx^4 + c = 0, \qquad x^5 - a^2x^3 + b^2x^2 - c^2 = 0,$$
$$x^4 + ax^2 + x + 1 = 0, \qquad x^4 + px^3 + qx^2 + r = 0.$$

654. — Éliminer x entre les couples d'équations :

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0, \\ x^2 + ax + b = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^4 + px^2 + q = 0, \\ ax^2 + 2bx + c = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} ax^4 + bx^2 + c = 0, \\ px^2 + qx + r = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 + px + q = 0, \\ ax^2 + bx + e = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^5 + px^3 + q = 0, \\ x^2 + ax + b = 0. \end{cases}$$

III. Trigonométrie.

655. — On donne $\sin a$, combien y a-t-il de valeurs pour $\cos 5a$?

656. — On donne $\cos \frac{2a}{3}$, combien y a-t-il de valeurs pour $\sin 5a$?

657. — On donne $\sin \frac{a}{4}$, combien y a-t-il de valeurs pour $\cos 3a$?

658. — Calculer $\cos \frac{a}{6}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$, $\sin \frac{a}{5}$ en fonction de $\cos a$, $\operatorname{tg} 3a$ en fonction de $\sin a$.

659. — Rendre calculable par logarithmes la somme $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$.

660. — Calculer $\sin 88^\circ$ à $\frac{1}{100}$ près.

661. — Résoudre les équations $\operatorname{tg} x = \cos x$, $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$, $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$,
$\operatorname{tg} 4x + 2\operatorname{tg} 2x + 1 = 0$, $\cos 3x + \cos 2x - 2\cos x - 1 = 0$, $\cos^3 x + \sin x = 0$,
$\operatorname{tg}^2 x + \cos x - 2 = 0$, $\cos^4 x - 2\sin x - 2 = 0$.

662. — Calculer les éléments d'un triangle connaissant le côté a et les hauteurs h et h' issues de B et de C.

663. — Résoudre un triangle connaissant le périmètre et les angles. Calculer les côtés, la surface, les rayons des cercles inscrit et circonscrit

IV. Géométrie analytique à deux dimensions.

664 — Construire les courbes représentées par les équations :

$$x^7 + y^7 - 7a^4x^2y^2 = 0, \qquad x^4y^2 + x^4 - y^4 = 0, \qquad x^4y^2 - x^2 - y = 0,$$
$$x^3y^2 - xy + 1 = 0, \qquad x^7 - x^3y^2 + 2y^2 = 0, \qquad y^3 - 2xy^2 + x^2y + 5y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 4x + 1 = 0,$$
$$x^3y^2 - 8x^2 + y = 0, \qquad x^4 - y^4 - 4ax^2y = 0, \qquad xy^2 - 3x^2y + y - x = 0,$$
$$(x^2 - y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0, \qquad x^7y^4 + 4x^2y^2 + 4 = 0, \qquad y^4 - 2y^2 + x^4 - x^3 - x^2 + 1 = 0,$$
$$x^7 - (x - y)^2(x + 2y) = 0, \qquad x^4y - 2x^2y^2 + 1 = 0, \qquad x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0,$$
$$x^4 - 4x^3y + y^3 - x^2 = 0, \qquad x^6 - y^5 + 3xy = 0, \qquad x^5 - 2x^3 + y^3 - y = 0,$$
$$x^6 - x^2y^2 + y^3 = 0, \qquad x^5 - 5x^4y^2 + y^3 = 0, \qquad x^3 - y^3 + 3x^2 - 2xy = 0,$$
$$x^6y - 3x^2y^3 + x^2 - y^2 = 0, \qquad x^4 - x^2y^2 + y^4 - 2x = 0, \qquad x^7 - x^4y^4 + x^2 + 4y^2 = 0,$$
$$x^4y + 2x^2y^3 + 4x^4 - y^3 = 0, \qquad x^5 - y^4 + 2y^3 - x^2 = 0, \qquad x^2y^3 + 2xy^4 + 4x^2 + y^2 = 0,$$
$$x^7 - 4x^4 + y^4 + y = 0, \qquad x^2y^2 - x^3 - y^4 + 4x = 0, \qquad x^4 - 4x^2y + y^5 - 1 = 0,$$
$$x^4 + y^4 + xy^2 + x + 1 = 0, \qquad x^5 + x^4y^2 - y^4 + 1 = 0, \qquad x^5y + 2x^3y^3 - 4x^4 - 2y^2 + 1 = 0,$$
$$x^4y + 2xy^4 - y^2 + x^2 - 1 = 0, \qquad x^4y + xy^2 - 4xy + 2y - 3 = 0, \qquad x^4 + xy^3 - 2x^2 - 3y^2 + 2y = 0,$$
$$x^4 - y^4 + y^2x - 2y = 0, \qquad x^5 - y^5 + 4x^4 - y = 0, \qquad x^5 + 2x^2y^3 - 4x^2y + 1 = 0,$$
$$x^5 - 2y^4 - 2y + x = 0, \qquad 2x^3 + 3x^2y + y^4 + x^2 + y^2 = 0, \qquad x^3y + 2xy^4 - 4xy + 2y - x = 0,$$
$$5x^4 - x^2y^2 + 3y^3 + x^2 = 0,$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 - 1}, \\ y = \dfrac{t + 2}{(t - 1)(t - 2)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2 + t}{1 - t^2}, \\ y = \dfrac{2 - t}{(1 - t)^2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{Lt - t^2 - 1}{t}, \\ y = \dfrac{2t^2 + 1}{t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -a\left(\cos\varphi + L\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right), \\ y = 2a\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a\,\dfrac{\sin t\sin\dfrac{t+\alpha}{2}}{\cos\dfrac{t-\alpha}{2}}, \\ y = b\,\dfrac{\cos t\cos\dfrac{t+\alpha}{2}}{\cos\dfrac{t-\alpha}{2}} \end{cases}$$

665 — Etudier la concavité et les points d'inflexion des courbes représentées par les équations :

$$2x^4y^2 - xy^4 + y - x = 0, \qquad x^2y - y^2 - 1 = 0, \qquad x^4 - y^2 + 4y - x = 0,$$
$$x^3 - 2y^2 + x + 2y = 0, \qquad x^4 - 2x^4 + y^2 + 2x - y = 0, \qquad x^4 + 2y^4 + 3xy = 0,$$
$$x^2y - y^3 + 1 = 0, \qquad x^4 + x^2y + 2y^2 - 1 = 0, \qquad x^3 - y^2 + 1 = 0.$$

666 — Construire les courbes représentées par les équations

$$\rho = \frac{1 + 2\sin\omega}{1 - 2\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin\omega}{\omega}, \qquad \frac{1}{\rho} = \sin\omega + 2\cos\omega,$$
$$\rho = \frac{\omega - \pi}{\omega + \dfrac{\pi}{2}}, \qquad \frac{1}{\rho} = \cos 2\omega + \sin\omega + 1, \qquad \rho = \frac{\omega - \cos\omega}{\sin\omega},$$
$$\rho = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\operatorname{tg}\omega}, \qquad \frac{1}{\rho} = e^{m\omega} + e^{-m\omega}, \qquad \rho = \frac{1 - \sin\omega}{\cos\omega},$$
$$\rho = \frac{\sin\omega}{1 - 2\cos^2\omega}, \qquad \frac{1}{\rho} = \sin 2\omega - 2\cos\omega + 1, \qquad \rho = \frac{\sin^3\omega}{\omega - \alpha},$$
$$\rho^2 - 1 + \operatorname{tg}\omega = 0, \qquad \rho^2 - 3\rho\operatorname{tg}\omega + \operatorname{cotg}\omega = 0, \qquad \rho^2\sin\omega + 2\rho - \cos\omega = 0,$$
$$\rho^2\operatorname{tg}\omega - 4\rho + 2\sin\omega = 0, \qquad \rho^2 - 3\rho\operatorname{tg}\omega + \sin\omega = 0, \qquad \operatorname{tg}\omega + \sin\omega = \rho^2 + 4\rho,$$
$$\rho^2\cos\omega - 3\rho\operatorname{tg}\omega + 5 = 0, \qquad \rho^3 + 2\rho\sin\omega + 1 = 0, \qquad \rho^3 + 3\rho\operatorname{tg}\omega + 1 = 0,$$
$$\rho^3 + 2\rho\sin^2\omega + 1 = 0, \qquad \rho^3\cos\omega - 3\rho^2 + \sin\omega = 0, \qquad \rho^4\sin\omega - 2\rho\cos\omega + \operatorname{tg}\omega = 0, \qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{1 - 2t}{t^2 - 2}, \\ \sin\omega = \dfrac{t^2 - 4}{t^2 + 4}. \end{cases}$$
$$\rho^4\sin^2\omega - 3\rho + \cos\omega = 0, \qquad \rho^3\cos\omega + 3\rho - \sin\omega = 0, \qquad \rho^4\sin\omega - \rho^2\cos\omega + 2 = 0,$$
$$\rho^4 - \rho^2\operatorname{tg}\omega + \cos\omega = 0, \qquad \rho^4 - 4\rho\cos\omega + \operatorname{tg}\omega = 0, \qquad \rho^4 - 2\rho^2\operatorname{tg}\omega + 1 = 0,$$
$$\rho^4\cos\omega - 4\rho + \sin\omega = 0, \qquad \rho^4\cos\omega + 2\rho^2\sin\omega - 4 = 0, \qquad \rho^5 - 3\rho^2\operatorname{tg}\omega + \sin\omega = 0,$$
$$\cos\omega = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho + 1}}, \qquad \cos\omega + 2\sin\omega = \frac{\sqrt{\rho^4 - 1}}{\rho^2 + 1}, \qquad 2\cos^2\omega - \sin\omega = \rho^4 - 3\rho,$$

667. — Exprimer qu'une droite est asymptote d'une courbe algébrique.

668. — On coupe une courbe du troisième degré par des droites parallèles à une direction fixe. Lieu des milieux des cordes obtenues. Déterminer *a priori* les points de rencontre du lieu et de la courbe donnée.

669 — Equation du système des tangentes menées d'un point à la courbe $y = x - x^3$. Ecrire que deux de ces tangentes sont perpendiculaires.

670. — On considère la courbe $x^3 - a^2y^3 = 0$. Trouver les points d'intersection de cette courbe et d'une droite quelconque. Discussion. — Combien par un point peut-on mener de tangentes à la courbe ?

671. — Même question pour la courbe $x^4y^2 - a^6 = 0$.

672. — Trouver le coefficient angulaire de la tangente en un point de la courbe qui a pour équation

$$x^2 + y^2 = e^{2n \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}.$$

Interprétation géométrique du résultat.

673. — Un cercle mobile O′ est tangent à un cercle fixe O en un point fixe A. On mène une tangente commune. Lieu du point de contact avec le cercle O′.

674. — On considère deux circonférences O et O′ égales, tangentes. Par un point M mobile sur l'une on mène la parallèle à OO′. Lieu du point P de rencontre de cette droite et de la polaire de M par rapport à la seconde circonférence. — Construire le lieu.

675. — On donne l'équation générale du second degré représentant deux droites ; on coupe par une troisième droite, calculer l'aire du triangle formé par ces trois droites.

676. — Les équations $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$ représentent deux systèmes de deux droites, trouver les points d'intersection de ces droites.

677. — Position de l'origine par rapport à la conique

$$x^2 + xy - 3x - 6y + 1 = 0.$$

678. — Trouver l'hyperbole conjuguée de l'hyperbole

$$5x^2 + 2xy - 3y^2 + 2x - 3 = 0.$$

679. — On donne une ellipse d'équation $f(x, y) = 0$, et un point de coordonnées α, β. On prend ses symétriques par rapport aux axes, calculer les coordonnées de ces points.

680. — Par chaque point d'une hyperbole on mène une normale de longueur l : trouver le lieu des extrémités de cette normale.

681. — Étant donnée l'équation générale d'une conique $f(x, y) = 0$, on la rapporte à son sommet et à l'axe correspondant. L'équation prend la forme $y = 2px + qx^2$; calculer p et q.

682. — Soient deux courbes définies par les équations

$$x^4 - y^4 + x + 2y = 0, \qquad (C)$$
$$x^2 + 3xy - y^2 - 2x = 0. \qquad (C')$$

En un point de (C) on mène la tangente et on prend le pôle de cette tangente par rapport à la conique (C′). — Trouver le lieu de ce pôle quand la tangente se déplace.

683. — On donne un cercle et une ellipse ; lieu des milieux des segments interceptés par l'ellipse sur les tangentes au cercle.

684. — On donne une hyperbole $f(x, y) = 0$, et une droite $ux + vy + w = 0$; trouver l'aire du triangle formé par la droite et les asymptotes de l'hyperbole.

685. — On donne les coniques

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + F = 0,$$
$$2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

calculer les coordonnées des points d'intersection de la première conique avec les asymptotes de la seconde.

686. — On donne les deux courbes $x^4 + y^3 - 1 = 0$, $x^2 - 2xy + 4x - 2y = 0$. On considère un point M de la première et on prend sa polaire par rapport à la seconde. Enveloppe de cette polaire quand le point M décrit la première courbe.

687. — Trouver les sommets de la conique $x^2 - 3xy + y^2 - 2x + 4y = 0$.

688. — Trouver les foyers des coniques : $y^2 - 2px = 0$, $xy = a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$, les axes de coordonnées faisant l'angle θ.

689. — Trouver les foyers réels des coniques : (axes rectangulaires)

$$x^2 - 2xy + 3y = 0, \quad x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x - 2y - 1 = 0, \quad ax^2 + 2bxy + 2dx + 2ey = 0, \quad 2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x - 1 = 0,$$
$$x^2 + 2xy - y^2 + 4x = 0, \quad x^2 + y^2 + 2xy - x = 0, \quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$$

690. — Foyers de la conique $4x^2 - 8xy + 4y^2 + 2x + 3 = 0$, les axes de coordonnées faisant l'angle de 45°.

691. — Trouver les directrices réelles des coniques :

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 2x - 1 = 0, \quad Ax^2 + 2Bxy + 2Ey = 0, \quad 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + F = 0, \quad (\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0.$$

692. — Lieu des foyers des coniques $2x^2 - 4mxy + 2my - 3x = 0$.

693. — Soit l'hyperbole $x^2 - 2y^2 + 2xy - 4x = 0$; calculer l'aire du triangle formé par les asymptotes et une tangente en l'un des sommets.

694. — Soit l'hyperbole $x^2 - 2xy - 3y^2 + 4x - 2 = 0$; équation d'un cercle tangent aux asymptotes et à la courbe, les axes de coordonnées faisant un angle θ.

695. — Lieu des points d'où l'on voit une parabole sous un angle donné. Le lieu est une hyperbole dont un foyer coïncide avec le foyer de la parabole. Solution analytique et géométrique.

696. — Construire le foyer d'une parabole touchant deux droites rectangulaires données en des points donnés.

697. — La portion d'une tangente mobile à une conique comprise entre deux tangentes fixes est vue du foyer sous un angle constant.

698. — On donne une conique définie par cinq points A, B, C, D, E; on demande de construire le pôle de AB. Est-il nécessaire de construire les tangentes aux points A et B?

699. — On donne une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et une famille d'hyperboles équilatères $xy = \lambda$. Trouver le lieu des pieds des normales à ces hyperboles qui sont tangentes à l'ellipse.

700. — Équation générale des coniques ayant pour centre l'origine O et normales à une droite parallèle à Ox et à une droite parallèle à Oy. *A priori*, combien cette équation doit-elle renfermer de paramètres?

701. — On considère l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et un point (x', y') sur cette ellipse. — La conique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2 = 0$ peut-elle être une parabole? Combien passe-t-il de ces paraboles par un point du plan?

702. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy. On mène une sécante PQ telle que $\overline{AP} \times \overline{BQ} = k$. Combien y a-t-il de ces droites passant par un point du plan? — Condition de réalité. — La courbe séparatrice est une conique; la construire.

703. — Conditions pour que deux courbes soient normales. Application à deux coniques concentriques.

704. — Une parabole est-elle déterminée quand on l'assujettit à être tangente à un cercle et osculatrice à une conique? Combien faut-il de conditions pour la définir? Chercher son équation quand on donne la direction de l'axe.

705. — Lieu des centres des hyperboles équilatères conjuguées par rapport à un triangle.

706. — Équation générale des coniques ayant pour axes Ox et Oy et normales à une droite AB donnée dans le plan.

707. — Lieu géométrique des sommets des paraboles qui ont un foyer donné et qui passent par un point donné.

708. — Lieu géométrique des foyers des paraboles qui ont un sommet donné et qui passent par un point donné.

709. — Un segment de droite se déplace de telle sorte que ses extrémités glissent sur deux droites situées dans un même plan. Lieu d'un point invariablement lié à cette droite.

710. — On considère toutes les ellipses ayant un sommet du grand axe et une directrice donnés, du pied de la directrice on mène des tangentes à ces ellipses; lieu des points de contact.

711. — Lieu des centres des hyperboles équilatères bitangentes à un cercle fixe et passant par un point extérieur à ce cercle.

712. — Équation générale des paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle rectangle isocèle.

713. — Trouver l'équation d'un cercle passant par les points de rencontre d'une hyperbole avec une sécante quelconque et par le centre de cette courbe.

714. — Lieux du centre et des foyers d'une conique dont deux sommets n'appartenant pas au même axe sont deux points fixes.

715. — Diamètres conjugués parallèles dans deux coniques.

716. — On donne une parabole; par le sommet O on mène une sécante qui coupe la parabole en un point A. On prend la symétrique de cette droite par rapport à l'ordonnée du point A; cette droite rencontre la parabole en un autre point B. Trouver le lieu du point de concours des normales en A et B.

717. — Équation générale des hyperboles dont on connaît une asymptote, un point et le produit des axes.

718. — Un angle droit tourne autour de son sommet O situé sur une conique, montrer que la corde joignant les deux autres points de rencontre des côtés de l'angle avec la conique passe par un point fixe. Lieu de ce point quand le point O se déplace sur la conique.

719. — Lieu des sommets des paraboles dont on donne deux tangentes et un point.

720. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point A sur les tangentes à la parabole $y^2 - 2px = 0$. Démontrer que le point A est un point double du lieu et trouver les tangentes en ce point. Établir géométriquement que les directions asymptotiques sont $x(x^2 + y^2) = 0$.

721. — On considère une ellipse et une normale à cette ellipse. Trouver le lieu du centre de gravité du triangle formé par les pieds des trois autres normales abaissées d'un point mobile de la première sur l'ellipse.

722. — Les polaires d'un point fixe par rapport aux coniques qui passent par l'intersection de deux coniques données sont concourantes.

723. — On donne une hyperbole et un point fixe. Par ce point passe une sécante qui coupe l'hyperbole en A et B. Par A, B et le centre de l'hyperbole on fait passer un cercle. Lieu des projections du centre de ce cercle sur la seconde corde commune.

724. — Si un angle a son sommet sur une ellipse donnée et si ses côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués d'une hyperbole donnée, la corde joignant les points d'intersection avec l'ellipse passe par un point fixe. Lieu de ce point fixe quand le sommet de l'angle décrit l'ellipse.

725. — Construire une parabole connaissant l'axe, un point et le paramètre. Déterminer les points de rencontre de cette parabole avec une droite quelconque.

726. — On donne deux ellipses ayant leurs axes parallèles. On mène une tangente à l'une des ellipses, puis une tangente perpendiculaire à l'autre. Lieu de leur point de rencontre.

727. — Étudier la variation de l'aire d'un rectangle circonscrit à une hyperbole.

728. — On donne les asymptotes d'une hyperbole et le segment en longueur qu'elle détermine sur une droite donnée. Construire les éléments principaux de l'hyperbole.

729. — On donne une ellipse et une droite Δ passant par un sommet A. On considère une série d'ellipses concentriques et semblables à l'ellipse donnée et dont le sommet A décrit la droite Δ. Lieu des foyers. Enveloppe de ces ellipses.

730. — On demande l'équation d'une conique passant par les quatre sommets d'un parallélogramme et tangente à une droite donnée. Condition de réalité. Interprétation géométrique.

731. — Lieu des points tels que les tangentes issues de ces points à une ellipse soient dans un rapport donné.

732. — Calcul de l'aire limitée par un arc de parabole et sa corde.

733. — Étant donnée une parabole ayant pour équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

trouver le lieu des points tels qu'une des normales à la courbe issue de ce point détache entre l'axe et la courbe un segment de longueur constante.

734. — On donne dans une parabole une normale, son pied et la longueur comprise entre le pied et le point de rencontre avec l'axe. On donne de plus un point de la parabole. Cette courbe est-elle définie? Trouver son équation.

735. — Étant donnés deux axes rectangulaires, on demande l'équation d'une conique tangente aux deux axes, ayant deux diamètres conjugués de directions données et de longueurs données.

736. — Trouver dans une conique donnée par l'équation générale $f(x, y) = 0$, une corde de direction donnée m et de longueur égale à celle d'un demi-axe de la courbe.

737. — Lieu du milieu d'une corde de longueur constante dans une hyperbole.

738. — Calculer l'aire du triangle formé par deux tangentes de coefficients angulaires m et m' à la conique $Ax^2 + 2Bxy + \ldots + F = 0$ et par la corde des contacts.

739. — Déterminer deux tangentes parallèles à la conique $f(x, y) = 0$ qui soient à une distance d l'une de l'autre.

740. — Calculer l'aire d'un triangle équilatéral inscrit dans une ellipse donnée $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, l'un des côtés ayant un coefficient angulaire m.

741. — On donne une parabole et un point A intérieur par lequel on mène une corde BAC. Étudier les variations de la longueur BC quand la corde tourne autour du point A.

742. — Calculer les longueurs des tangentes menées d'un point (α, β) à l'ellipse $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$.

743. — On donne une ellipse par l'équation générale $f(x, y) = 0$ et la corde $ux + vy + w = 0$. Calculer les coordonnées des deux points C et D qui divisent cette corde en trois parties égales. Peut-on faire passer par les points C et D une ellipse concentrique à l'ellipse donnée ?

744. — Étant donnée une hyperbole rapportée à ses axes et un point A d'où l'on mène une tangente qui rencontre les asymptotes en B et C, calculer la longueur BC.

745. — Soit une ellipse rapportée à ses axes et une tangente définie par l'abscisse x_0 de son point de contact. Déterminer deux autres tangentes formant avec la première un triangle équilatéral.

746. — On donne une hyperbole et une ellipse, calculer les longueurs des cordes interceptées dans l'ellipse par les asymptotes de l'hyperbole.

747. — On donne deux points A et B rapportés à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy. Trouver l'équation de l'ellipse qui a pour demi-diamètres conjugués OA et OB.

748. — Écrire que deux coniques ont mêmes asymptotes, mêmes foyers. Combien de conditions *a priori* ?

749. — Étant donnée l'équation générale d'une ellipse, trouver les extrémités des diamètres conjugués égaux.

750. — Enveloppe des paraboles

$$(x - a)\cos\varphi + (y^2 - x)\sin\varphi = x + a,$$

quand φ varie. Construire la courbe obtenue.

751. — Enveloppe de la courbe $x = a \pm \sqrt{R^2 - y^2}$, a étant le paramètre variable.

752. — Enveloppe de la droite $u^3(x - a) + 3ux - 2y = 0$, u étant variable.

753. — On considère la courbe qui a pour équation en coordonnées polaires $\frac{1}{\rho} = e^{m\omega} + e^{-m\omega}$; trouver l'équation de la tangente à cette courbe au point d'angle polaire $\alpha + 2k\pi$. Démontrer que les tangentes relatives aux diverses valeurs de k enveloppent une conique.

754. — D'un point P on mène des tangentes à des coniques homofocales ; enveloppe des normales à ces coniques aux points de contact.

755. — Enveloppe de la droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ sachant qu'on a $a^p + b^p = k^p$.

756. — Étant donnée la conique $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}$, on demande l'enveloppe des cordes vues du foyer sous un angle θ.

757. — Trouver l'enveloppe des normales à la courbe $\rho = e^{\omega}$.

758. — Enveloppe des courbes représentées par l'équation $x^3 + \alpha^3 y + \alpha x = 0$.

759. — On considère la courbe $x^3 + y^2 - x - y = 0$ et la conique $2x^2 + 3y^2 - 1 = 0$; on prend la polaire d'un point variable de la première courbe par rapport à la conique. Enveloppe de cette polaire.

760. — Enveloppe d'un cercle de rayon donné dont le centre décrit une parabole.

761. — Une droite MA tourne autour d'un point M de l'axe Oy ; au point de rencontre A avec Ox on mène AB faisant avec AM un angle donné θ. Trouver l'enveloppe des ellipses de grandeur constante tangentes à AB, MA, Oy.

762. — On donne une parabole et un point M de sa directrice ; de ce point on mène les tangentes, on divise la corde des contacts en trois parties égales par les points P et Q. Trouver l'enveloppe de la droite MP.

763. — On donne une parabole et une tangente en un point M. On mène une parallèle à cette tangente à une distance d ; enveloppe de cette droite lorsque la tangente varie.

764. — Enveloppe des cordes d'une parabole de longueur constante.

765. — Enveloppe de la droite $\alpha^4 x + 2\alpha^3 y - 3 = 0$.

766. — On donne en coordonnées polaires l'équation d'une droite et celle d'une hyperbole, le pôle étant le centre de la courbe et l'axe polaire son axe transverse. Calculer les coordonnées du pôle de la droite par rapport à l'hyperbole.

767. — Écrire en coordonnées polaires l'équation d'une conique en prenant pour pôle le centre de la courbe et pour axe polaire l'un des axes. Équation d'une corde de longueur l faisant un angle α avec l'axe polaire.

768. — Équation en coordonnées polaires d'une ellipse, le pôle étant le centre de la courbe et l'axe polaire l'axe focal. On joint un point donné M à un foyer de l'ellipse, la droite MF coupe l'ellipse en A et B. Calculer la longueur AB.

769. — On donne une ellipse rapportée à son centre comme pôle et à son axe focal comme axe polaire ; soient ω_1 et ω_2 les angles polaires correspondant aux extrémités A et B d'une corde de l'ellipse ; calculer les coordonnées polaires du milieu de AB.

770. — On donne une ellipse rapportée à son centre O comme pôle et à son axe focal OA comme axe polaire ; par le sommet A on mène une corde AM définie par l'angle polaire du point M. Calculer la longueur de cette corde.

771. — Étant donnée la courbe $\rho = a(1 - \cos\omega)$, on demande l'angle des deux tangentes aux points situés sur une même droite passant par le pôle.

772. — Étant donnée la courbe $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\omega}$, trouver les coordonnées des points de contact des tangentes issues du point (ρ_1, ω_1) à cette courbe. Lieu du point (ρ_1, ω_1) tel que la corde des contacts des tangentes issues de ce point à la conique soit vue du foyer sous un angle constant.

773. — Équation de l'ensemble des tangentes menées à la courbe $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\omega}$ par le point (ρ_1, ω_1).

774. — Écrire l'équation d'une conique en coordonnées polaires, le pôle étant un sommet de la courbe et l'axe polaire l'axe correspondant. Mener par un point (ρ_0, ω_0) une droite coupant la conique suivant une corde de longueur donnée.

775. — Écrire l'équation d'une ellipse en coordonnées polaires, l'origine étant au sommet O, l'axe polaire la tangente en O. Calculer les coordonnées des autres sommets ; calculer la distance de cette conique à une droite ; écrire l'équation de la polaire d'un point.

V. Géométrie analytique à trois dimensions.

776. — Lieu du sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes rencontrent une conique. Cas où cette conique est une parabole.

777. — Équations de l'hélice. — Tangente en un point. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de l'axe du cylindre sur toutes les tangentes à toutes les hélices de même pas que l'on peut tracer sur ce cylindre.

778. — Étudier la courbe définie par les équations

$$x = \frac{1+t}{1-t}, \qquad y = \frac{2t}{1+t}, \qquad z = \frac{2t}{1+t^2};$$

degré, asymptotes.

779. — Trouver les axes de la section plane du cylindre $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ pour le plan $ux + vy + wz = 0$.

780. — Que représente l'équation $zf(x, y, z) + g(x, y, z) = 0$, f étant du deuxième degré et g du troisième. Lieu des milieux des cordes de cette surface parallèles à la direction $\alpha, \beta, 0$. Cas où la fonction g est du deuxième degré.

781. — Lieu des points dont le rapport des distances à Oz et à la droite $z = 0$, $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ est donné. Section du lieu par le plan xOy.

782. — Soit un tétraèdre ABCD, on le coupe par un plan A'B'C' parallèle à ABC, lieu du point de rencontre des plans B'C'A, C'A'B, A'B'C.

783. — On considère un cylindre droit à base circulaire ; par la tangente en un point de la base on mène des plans. Lieu des foyers des sections.

784. — Étudier la surface

$$z = \frac{ax^2 + 2hxy + cy^2}{x^2 + y^2}.$$

Lieu des projections d'un point de l'espace sur les génératrices.

785. — Lieu des milieux des cordes de la surface

$$z(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$$

qui ont pour paramètres directeurs $\alpha, \beta, 0$.

786. — Lieu géométrique d'une droite rencontrant la droite $z = 0$, $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ et Oz, et faisant avec Oz un angle constant.

787. — Condition pour que le plan $ux + vy + wz = 0$ coupe le cône $ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0$ suivant deux droites rectangulaires.

788. — Que représente l'équation $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = h(x^2 + y^2 + z^2)$? Équation de la méridienne.

789. — Peut-on trouver un cône qui coïncide avec son cône supplémentaire ?

790. — Trouver les axes de symétrie d'une quadrique. Appliquer à l'équation $B'xz + C'y + C''z = 0$.

791. — On donne deux sphères O et O' ; par un point A de la ligne des centres, on mène une droite qui rencontre les sphères respectivement en B et B'. Trouver le lieu du point de rencontre des droites OB et O'B'.

792. — Trouver les droites de la surface $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$. Étant donnée une de ces droites $x = a$, $y + z = 0$, trouver la section de la surface par un plan passant par cette droite. Prévoir le résultat. Lieu des centres de ces coniques.

793. — On donne trois axes rectangulaires ; une droite qui reste parallèle au plan xOy est assujettie à rencontrer Oz et une conique située dans le plan $ux + vy + wz + p = 0$ qui se projette sur le plan des xy suivant une circonférence. Équation de la surface engendrée. Plan tangent en un point.

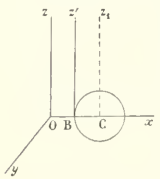
794. — On coupe la surface $ax^2+by^2+cz^2=t$ par le plan $\alpha x+\beta y+\gamma z+\lambda=0$. On demande l'angle des directions asymptotiques de la section.

795. — Lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux droites fixes est constante.

796. — Écrire qu'une surface est asymptote à un plan donné. *A priori* combien de conditions?

797. — Lieu de la droite intersection de deux plans perpendiculaires passant chacun par une droite fixe.

798. — On donne une circonférence C dans le plan xOz, on considère le cylindre de révolution dont la base est la circonférence de centre O et de rayon OB située dans le plan xOy. On fend le plan xOz suivant la verticale Bz', on applique alors la circonférence C sur le cylindre de telle façon que le point C étant en B, la verticale Cz_1 coïncide avec Bz'. On demande de trouver les nouvelles équations du cercle C ainsi transporté. Équation du conoïde engendré par une horizontale s'appuyant sur cette courbe et sur Oz. Intersection du tore engendré par la circonférence C tournant autour de Oz et du conoïde.



799. — Équation générale des sphères ayant un axe radical commun avec trois sphères données.

800. — On considère deux cercles dans l'espace. Peut-on trouver une normale commune à ces deux cercles?

801. — On donne la courbe $x=\sin z$, $y=0$; on la fait tourner autour de Oz; équation de la surface engendrée. Trouver la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèle à la direction (l, m, n). Trace du cylindre sur le plan des xy.

802. — On considère le cylindre qui a pour directrice une ellipse située dans le plan des xy

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad z=0,$$

et dont les génératrices ont pour paramètres directeurs α, β, γ. Trouver l'aire de la section déterminée par le plan $ux+vy+wz+p=0$.

803. — On donne une conique dans le plan des xy et un point (x_0, y_0, z_0) qui est sommet d'un cône ayant la conique pour directrice; on coupe le cône par un plan; trouver l'aire de la section.

804. — On donne une droite $\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}$ et un point (x', y', z'). On le fait tourner d'un angle θ autour de la droite. Quelles sont ses nouvelles coordonnées?

805. — On donne un cône de révolution de hauteur h et de rayon R. On le coupe par un plan perpendiculaire à un plan méridien et rencontrant l'une des génératrices de ce plan au tiers de sa longueur à partir du sommet, et l'autre aux deux tiers. On demande l'aire de la section

806. — Écrire l'équation d'un cône de révolution tangent aux trois plans de coordonnées supposés rectangulaires, son axe étant dans le trièdre $Oxyz$. Calculer le rayon de la section du cône par un plan donné perpendiculaire à l'axe.

807. — Équation du cône de révolution inscrit dans le trièdre formé par les trois plans $x+2y-3z=0$, $2x-y-z=0$, $4x+2y+3z=0$.

808. — On donne un cylindre $S_1x^2+S_2y^2+D=0$ et un cône, dans quelles conditions peut-on mener un plan tangent commun à ces deux surfaces?

809. — On donne une parabole quelconque dans le plan xOy. Former l'équation du cylindre ayant pour directrice cette parabole et dont les génératrices ont une direction donnée α, β, γ. On coupe ce cylindre par le plan $ux+vy+wz+p=0$, calculer l'équation de la section dans son plan.

810. — Déterminer la nature des quadriques représentées par les équations :

$$z^2-2xy=0, \qquad xy-kz=0, \qquad (x+y+z)^2-2mxy=0,$$

$$(x-y)^2+2z^2=x+y+1 \quad \text{(sections circulaires)}, \qquad 5x^2-6xy-y^2+2xz+2x-4z=0,$$

$$(2x-1+y)^2-(4z-y+x)^2+(x-2z-1)^2=(2z-4x+3)^2, \qquad 2x^2+y^2-2\lambda yz+4x-3z+1=0, \quad \text{(lieu des centres)},$$

$$2z^2-y^2+xy-yz+2zx=4, \qquad (x-y)(z+y-2x)=z-x+1,$$

$$3(x^2+y^2+z^2-k^2)=(x+y+z)^2, \qquad x^2-y^2+z^2+2xz=a \quad \text{(axe)},$$

$$(2x+y)^2-(z+x)^2+y^2+2y=0, \qquad (az-bx)(cz-by)-z^2=0,$$

$$(x-z)^2+(y+z-1)^2-(2x+1)^2+(y-3x-2)^2=0, \qquad (x+y+z)^2-2mxy-2pyz=0,$$

$$\frac{z^2}{a}+\frac{3zx}{c}+3y=c \quad \text{(sections circulaires)}, \qquad x^2+Ay^2+2Byz+4x+1=0 \quad \text{(peut-elle être de révolution)}?$$

$$x^2+2y^2-3z^2+4yz-2xy+4x-1=0, \qquad x^2+2y^2+3z^2-4yz-8xy+2x-2z+1=0,$$

$$4x^2+4y^2-z^2-2xy+4x-z=0 \quad \text{(sections circulaires)}, \qquad x^2-y^2+2yz+4xy+2x+4y=0,$$

$$P^2+Q^2+R^2+S^2=0, \quad \text{(P, Q, R, S étant des fonctions linéaires)}, \qquad a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2bcyz-2cazx-2abxy=x+y+z,$$

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx=0 \quad \text{(axes)}, \qquad a^2x^2+b^2y^2+2c^2yz-2d^2zx+2ey+f=0,$$

$$Ax^2+A'z^2+2Byz+2Cx+D=0, \qquad (x-y)^2+2(y-z+1)^2+4(z-x+2)^2-4x^2+2y-1=0,$$

$$(Ax-By)^2+2(By-Cz)^2-3(Cz-Ax+D)^2-4Fy=0, \qquad (Ax+By+C)^2+(Dy+Ez+F)^2+(Gz+Hx+Kz)^2-L=0,$$

$$ax^2+a'y^2+2byz+2cx+2c''z=0, \qquad z=\alpha x+\beta y+\gamma\pm\sqrt{xy+ax+by+c},$$

$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2zx)+c(z^2+2xy)=1.$$

811. — On donne trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz et un point A sur Ox, un point B sur Oy et un point C sur Oz. Trouver l'équation de l'ellipsoïde qui admet pour diamètres conjugués AO, AB et AC.

812. — Soit $ux + vy + wz = 0$ une des directions de plans cycliques de la quadrique $f(x, y, z) = 0$. Trouver l'autre direction.

813. — Plans principaux des quadriques

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$
$$Ax^2 + 2Byz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

814. — Trouver les génératrices de la quadrique $xy - z^2 - 2z = 0$. En déduire le lieu des points de cette surface par où passent deux génératrices rectangulaires.

815. — Démontrer que l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2 + h(x + y + z + a) = 0$$

représente une surface de révolution. Équation de l'axe. Intersection de l'axe et de la surface. Cas où $a = \frac{3h}{16}$.

816. — Lieu des centres des quadriques

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pzx + 2qyz - 2ax - 2by + 2cz = 0$$

quand p et q varient. Cas où cette équation représente des cônes.

817. — Lieu des centres des sections de la surface $xy = z$ par des plans parallèles au plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Cas où $\gamma = 0$.

818. — Lieu des projections d'un point sur les génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0$.

819. — Équation générale des quadriques qui ont pour plans cycliques les plans des xz et des yz.

820. — Trouver l'axe de la quadrique $xy = x + y + z$.

821. — Trois points donnés sur une droite décrivent trois plans donnés ; on demande le lieu d'un quatrième point de cette droite.

822. — Lieu des milieux des cordes d'une quadrique issue d'un point.

823. — Condition pour qu'un plan soit tangent à la surface $x^2 - y^2 + z^2 + 2xz = 40\,000$.

824. — Une quadrique est-elle déterminée quand on en donne une conique, trois points et un plan tangent ? Déterminer les points où les quadriques répondant à la question touchent le plan donné. Nature de ces quadriques.

825. — On donne dans une quadrique le centre, une génératrice, deux points et un plan tangent, on demande de trouver les génératrices de la surface situées dans le plan tangent.

826. — Lieu du point d'intersection des génératrices passant par les extrémités de deux diamètres conjugués de l'ellipse de gorge d'un hyperboloïde.

827. — On considère un système de trois axes rectangulaires $Oxyz$ et deux droites s'appuyant sur Ox et parallèles au plan yOz. Intersection de l'hyperboloïde de révolution engendré par l'une des droites tournant autour de Oz et du paraboloïde engendré par les parallèles au plan des xy s'appuyant sur les deux droites.

828. — Lieu des sommets des cônes passant par une ellipse et dont un axe passe par un point du plan de l'ellipse. Peut-on prévoir que le lieu est une courbe ?

829. — On donne une quadrique $f(x, y, z) = 0$. Trouver une direction de cordes (α, β, γ) telle que le plan diamétral conjugué soit parallèle à celui que l'on obtient dans l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

830. — On donne une génératrice d'un cylindre parabolique. Combien faut-il de points pour déterminer la surface ? On donne trois points, construire la surface.

831. — Lieu des sommets des cônes passant par une parabole et dont les plans cycliques sont perpendiculaires.

832. — On donne dans un même plan deux ellipses qui ont leurs axes parallèles. Trouver le lieu des sommets des cônes égaux ayant ces ellipses pour bases.

833. — Lieu des centres des sphères de rayon nul bitangentes à un ellipsoïde donné.

834. — Lieu des axes des quadriques de révolution passant par une conique donnée et touchant un plan donné.

835. — Lieu des pieds des perpendiculaires à l'axe et aux génératrices du paraboloïde hyperbolique $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0$.

836. — Peut-on circonscrire à un ellipsoïde quelconque un cylindre de révolution ? Cas où l'ellipsoïde est lui-même de révolution.

837. — On donne un ellipsoïde ; par un sommet A on mène des cordes qui le coupent en un autre point sous un angle α. Lieu de ces cordes.

838. — On considère une ellipse dans le plan des xy, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $z=0$, et les cylindres ayant cette ellipse pour base et faisant un angle donné avec le plan des xy. Lieu de leurs génératrices principales.

839. — Lieu des ombilics de la quadrique $ayz+bzx+cxy=1$, a, b, c étant reliés par la relation $a^2+b^2+c^2=1$.

840. — On coupe le cylindre parabolique $(ax+by+cz+d)^2+a'x+b'y+c'z+d'=0$ par le plan $a''x+b''y+c''z+d''=0$; on demande le paramètre de la parabole section.

841. — Lieu des sommets des paraboloïdes hyperboliques équilatères circonscrits à un hyperboloïde.

842. — On donne un hyperboloïde à deux nappes par son cône asymptote et un plan tangent. Déterminer les sommets.

843. — Diamètres conjugués communs à deux quadriques concentriques.

844. — On donne une ellipse et un diamètre AA'. Sur AA' comme diamètre on décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à celui de l'ellipse. Lieu de ces cercles.

845. — On donne un hyperboloïde à deux nappes et son cône asymptote. Par un point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ de la surface, on mène un plan tangent à l'hyperboloïde, on demande le volume du cône asymptote compris entre le sommet et le plan tangent.

846. — On donne un cône ayant pour sommet l'origine et un point $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Équation d'un cône bitangent au premier et de sommet M.

847. Section circulaire du cylindre du second degré dont les génératrices sont parallèles à la direction $x=y=z$.

848. — On donne la surface $xy=2z$. On demande le lieu des foyers des sections faites dans cette surface par des plans parallèles à Oy.

849. — Équations de deux quadriques ayant Oz pour axe commun. Trouver la projection de l'intersection sur le plan des xy.

850. — Lieu des sommets des paraboloïdes admettant deux plans directeurs donnés et une génératrice donnée.

851. — On donne deux quadriques homothétiques

$$\varphi(x, y, z)+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$$
$$\varphi(x, y, z)+2C_1x+2C_1'y+2C_1''z+D_1=0,$$

la droite qui joint les centres coupe la première en A, la deuxième en A_1, calculer la distance AA_1.

852. — On donne deux quadriques. Montrer qu'il existe des points où elles se coupent à angle droit.

853. — Lieu des sommets des paraboloïdes de révolution circonscrits à un ellipsoïde.

854. — Soit le cône $Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy=0$; équation du cylindre qui a pour directrice la section de ce cône par le plan $ux+vy+wz+p=0$, et dont les génératrices ont la direction (α, β, γ). Calculer l'aire de la seconde conique d'intersection du cône et du cylindre.

855. — On donne deux quadriques homothétiques. Peut-on leur circonscrire un même cône ?

856. — Lieu des normales abaissées d'un point sur toutes les surfaces homofocales $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0$. Lieu des courbes de contact des cylindres circonscrits à ces surfaces, la direction des génératrices étant donnée.

857. — On donne une quadrique et un point M. Lieu des droites passant par le point M et telles que le segment intercepté par la surface sur ces droites soit de longueur donnée.

858. — Lieu des sommets des paraboloïdes passant par une ellipse donnée et ayant leurs axes parallèles à une direction fixe.

859. — Lieu des points qui sont à une distance donnée d'un ellipsoïde rapporté à ses axes.

860. — Intersection d'une quadrique et d'un cône ayant son sommet sur la quadrique.

861. — Intersection de deux paraboloïdes qui ont une génératrice commune et un plan directeur commun.

862. — Équation générale des quadriques passant par Oz, tangentes à l'origine au plan xOz, et admettant le plan yOz comme plan asymptote. *A priori* combien a-t-on de paramètres ? On donne une seconde surface remplissant les mêmes conditions, écrire que les deux surfaces se raccordent suivant Oz. Comment se coupent ces surfaces ?

863. — Qu'arrive-t-il si trois quadriques ont une courbe plane commune ?

864. — Lieu des sommets des paraboloïdes de révolution qui passent par une ellipse donnée.

865. — Lieu de la perpendiculaire commune aux génératrices d'un hyperboloïde à une nappe qui passent par les extrémités d'un diamètre de l'ellipse de gorge.

866. — Parmi les quadriques passant par un quadrilatère gauche, combien y en a-t-il qui sont tangentes à un plan ?

867. — A combien de conditions est assujettie une quadrique quand on donne deux génératrices de même système ?

Peut-on donner en outre un cône circonscrit à la quadrique ? Quelle relation existe entre le cône circonscrit et une génératrice ? Étant donnés le cône circonscrit et deux génératrices tangentes au cône, la quadrique est-elle déterminée ?

868. — Combien peut-on mener de plans tangents communs à une quadrique et à un cône ?

869. — On donne dans une quadrique une section plane, le centre et un point, équation de la quadrique ainsi définie.

870. — On donne dans une quadrique deux coniques et un point. Trouver les génératrices passant par le point.

871. — Enveloppe du plan $ux + vy + wz = \sqrt{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}$.

872. — Enveloppe du plan passant par les extrémités de trois diamètres conjugués égaux d'un ellipsoïde.

873. — Étant donnée une quadrique définie par son équation générale $f(x, y, z) = 0$, écrire : 1° que le plan $ux + vy + wz + p = 0$ est plan principal, plan cyclique, plan directeur ; 2° que le point (a, b, c) est ombilic, sommet ; 3° que la droite $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ est axe, diamètre conjugué de sections circulaires, axe de révolution.

874. — Trouver l'équation de l'ensemble des plans tangents menés à la quadrique $f(x, y, z) = 0$ par la droite $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$.

875. — Écrire que l'équation générale du deuxième degré représente : 1° deux plans parallèles ; 2° deux plans perpendiculaires ; 3° un cylindre de révolution ; 4° un cylindre elliptique réel ; 5° deux plans faisant un angle de 45° ; 5° un cylindre hyperbolique dont les plans asymptotes sont rectangulaires.

876. — Trouver l'équation générale : 1° des ellipsoïdes de révolution ; 2° des hyperboloïdes de révolution à une ou à deux nappes ; 3° des paraboloïdes de révolution ; 4° des cônes et des cylindres de révolution.

877. — Sachant que l'équation générale du deuxième degré $f(x, y, z) = 0$ représente un ellipsoïde trouver 1° une équation ayant pour racines les aires des sections principales ; 2° le volume du cône circonscrit de sommet (α, β, γ), le cône étant limité à la courbe de contact.

878. — Sachant que l'équation générale du deuxième degré $f(x, y, z) = 0$ représente un hyperboloïde à deux nappes, calculer le volume du cône asymptote limité soit au plan tangent en un sommet, soit au plan tangent qui fait 45° avec l'axe réel.

879. — Sachant que l'équation générale du deuxième degré représente un paraboloïde elliptique, on demande : 1° le sommet ; 2° le point où l'axe coupe un plan donné ; 3° les distances des foyers des sections principales au sommet ; 4° les ombilics ; 5° les plans parallèles aux plans cycliques qui passent par le sommet ; 6° l'aire de la section par un plan perpendiculaire à l'axe à une distance d du sommet ; 7° l'équation d'un plan tangent perpendiculaire à un plan principal et faisant un angle donné avec l'axe ; 8° l'aire de la section par un plan perpendiculaire à l'axe et passant par le foyer d'une section principale.

880. — Sachant que l'équation générale du deuxième degré $f(x, y, z) = 0$ représente un paraboloïde hyperbolique, on demande l'équation des plans passant par l'axe et parallèles aux plans directeurs.

881. — Sachant que l'équation générale du deuxième degré $f(x, y, z) = 0$ représente un cylindre elliptique réel, on demande : 1° le lieu des foyers des sections droites ; 2° l'aire de la section plane par un plan passant par un axe d'une section droite et faisant 45° avec cette section droite ; 3° le rayon des sections circulaires ; 4° le volume compris entre deux plans parallèles ; 5° les axes d'une section droite ; 6° les plans cycliques réels ; 7° l'équation d'un plan passant par les génératrices de deux sommets n'appartenant pas au même axe d'une section droite ; 8° la condition pour que ce cylindre admette un plan tangent parallèle à un plan donné $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

882. — Sachant que l'équation générale du deuxième degré $f(x, y, z) = 0$ représente un cylindre hyperbolique, on demande : 1° l'équation de l'ensemble des plans tangents aux deux sommets d'une section droite ; 2° les génératrices principales réelles ; 3° le lieu des directrices des sections droites ; 4° les plans asymptotes ; 5° l'angle des plans asymptotes ; 6° le plan principal qui contient des génératrices réelles.

883. — Sachant que l'équation générale du deuxième degré $f(x, y, z) = 0$ représente un cylindre parabolique, on demande : 1° le plan principal ; 2° le paramètre ; 3° le lieu des foyers des sections droites ; 4° les plans tangents faisant 45° avec le plan principal ; 5° l'équation d'un plan tangent situé à une distance d de la ligne des sommets des sections droites, 6° le sommet de la section par un plan $ux + vy + wz + p = 0$; 7° le plan perpendiculaire au plan principal, coupant le cylindre suivant une parabole de paramètre p ; 8° le plan perpendiculaire au plan principal passant par la droite des foyers des sections droites ; 9° l'équation d'un plan perpendiculaire au plan principal parallèle aux génératrices a une distance d de la génératrice principale et extérieur au cylindre ; 10° l'équation d'un plan coupant le plan principal suivant une perpendiculaire aux génératrices et coupant le cylindre suivant une parabole de paramètre donné ; 11° l'équation d'un plan passant par la génératrice principale et faisant avec le plan principal un angle donné.

884. — Sachant que l'équation générale du deuxième degré représente deux plans sécants, trouver l'angle de ces deux plans et l'angle de leurs traces sur le plan $ux + vy + wz + p = 0$.

885. — La même équation représentant deux plans parallèles, trouver la distance de ces deux plans.

QUESTIONS PROPOSÉES

697. — D'un point P extérieur à une parabole donnée, on mène les trois normales de pieds A, B, C, et on désigne par I_1, I_2, I_3, I_4 les centres des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle ABC.

1° Où doit se trouver le point P pour qu'il coïncide avec l'un des points I ? Dans ces conditions, trouver le lieu des trois autres points I.

2° On se donne l'un des points I, le point I_1, pour fixer les idées ; montrer qu'il y a deux points P correspondants, P_1 et P_2. Réalité de ces points.

3° Aux deux points P_1, P_2 correspondent alors deux systèmes de points I : soient I_1, I_2, I_3, I_4 ; I'_1, I'_2, I'_3, I'_4. Sur quelle courbe doit se trouver le point I_1 pour que les cercles circonscrits aux deux triangles $I_2I_3I_4$, $I'_2I'_3I'_4$ soient orthogonaux ?

4° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu des points d'intersection de ces deux cercles, ainsi que le lieu du milieu de la droite P_1P_2.

G. Lapointe.

698. — Une droite Δ coupe une cissoïde droite en trois points M, P, Q.

1° Trouver l'enveloppe de Δ lorsque les normales en ces points sont concourantes et le lieu de leur point de concours.

2° Les tangentes aux trois points M, P, Q rencontrent de nouveau la courbe en trois points M′, P′ et Q′ qui sont en ligne droite. Trouver l'enveloppe de cette droite Δ' et le lieu du point de concours de Δ et Δ'.

P. Puig, professeur au lycée de Bordeaux.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

601. — *Sur le grand axe d'une ellipse de centre* O *on prend un point* I *tel que* $OI = \frac{a^2\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2}$, $2a$ *et* $2b$ *désignant les longueurs des axes de l'ellipse. Par le point* I *on mène une corde variable,* AB, *dont on prend le pôle,* C, *par rapport à l'ellipse. Le lieu de l'orthocentre du triangle* ABC *est une ellipse semblable à l'ellipse donnée et passant par l'un de ses foyers.*

Soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ et $a\cos\varphi'$, $b\sin\varphi'$ les coordonnées des deux points A et B ; désignons, en outre, par h l'abscisse du point I, $h = \frac{a^2\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2}$. Nous aurons, en exprimant que les trois points A, B et I sont en ligne droite, la relation

$$a\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} = h\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}.$$

D'autre part, les deux hauteurs du triangle ABC qui sont issues des points A et B, ont pour équations

$$(x - a\cos\varphi)\frac{\sin\varphi'}{b} - (y - b\sin\varphi)\frac{\cos\varphi'}{a} = 0,$$

$$(x - a\cos\varphi')\frac{\sin\varphi}{b} - (y - b\sin\varphi')\frac{\cos\varphi}{a} = 0,$$

et si on combine ces deux équations par addition et soustraction, on obtient, pour déterminer le point de concours des hauteurs, les deux équations suivantes

$$\frac{x}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}-\frac{y}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}+\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}=0,$$

$$\frac{x}{b}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}+\frac{y}{a}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}=0.$$

Remplaçons dans la première $\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}$ par sa valeur, $\frac{a}{h}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}$, tirée de la relation établie au début, puis supprimons le facteur $\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}$; remplaçons aussi dans la seconde $\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}$ par sa valeur, $\frac{h}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}$, tirée de la même relation; nous aurons finalement, pour déterminer le point de concours des hauteurs,

$$\left(\frac{x}{b}+\frac{b^2-a^2}{bh}\right)\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}-\frac{y}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}=0,$$

$$\frac{y}{a}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}+\left(\frac{x}{b}-\frac{a^2+b^2}{a^2b}h\right)\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}=0.$$

Entre ces deux équations, $\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}$ et $\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}$ s'éliminent immédiatement et cette opération donne l'équation du lieu du point de concours des hauteurs,

$$(1)\qquad \left(\frac{x}{b}-\frac{c^2}{bh}\right)\left(\frac{x}{b}-\frac{(a^2+b^2)h}{a^2b}\right)+\frac{y^2}{a^2}=0.$$

On voit de suite que ce lieu est une ellipse homothétique à l'ellipse proposée, ayant pour axe de symétrie Ox, et pour sommets situés sur cet axe les points d'abscisses $\frac{c^2}{h}$ et $\frac{(a^2+b^2)h}{a^2}$; le second de ces points est le foyer de droite.

Très bonnes solutions différentes de MM. E.-N. Barisien et J. Lhériaud (lycée de Toulouse).

---

602. — *Trouver l'équation générale des coniques tangentes à une droite* D *en un point* A, *à une droite* D′ *parallèle à* D *et à une droite* Δ *perpendiculaire à* D *et* D′.

Trouver pour chacune de ces coniques l'équation de la seconde tangente, Δ′, *parallèle à* Δ, *et l'équation de la corde des contacts avec les droites* D *et* Δ.

On demande ensuite le lieu du point de rencontre de la droite Δ′ *avec la corde des contacts, et aussi le lieu du point de contact de la conique variable avec* Δ.

On demande en outre le lieu des foyers de cette conique et de construire ce lieu.

Prenons pour axe des x la droite D et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite au point A; désignons par a l'abscisse de la droite Δ et par b l'ordonnée de la droite D′. L'équation de la conique indiquée est alors

$$2\mu y(x-a)+(y-\lambda x)^2=0,$$

$y-\lambda x=0$ étant l'équation de la corde des contacts relative aux droites D et Δ, et λ et μ étant liés par une relation qui exprime que cette conique est tangente à la droite D′. Cette relation s'obtient en écrivant que les deux valeurs de x qui correspondent à $y=b$ sont confondues; on trouve ainsi $b\mu=2b\lambda-2a\lambda^2$; par conséquent l'équation générale des coniques envisagées est

$$(1)\qquad 4(b\lambda-a\lambda^2)y(x-a)+b(y-\lambda x)^2=0,$$

λ désignant le coefficient angulaire de la corde des contacts qui est à considérer.

Pour avoir la seconde tangente parallèle à Δ, il faut chercher les valeurs de x pour lesquelles les deux valeurs de y sont confondues; nous trouvons ainsi $x = a$ et $\lambda x + b - a\lambda = 0$; la première valeur de x correspond à la tangente donnée Δ, la seconde, à la tangente cherchée Δ'. Quant à la valeur de y qui correspond au point de contact, elle s'obtient en annulant la dérivée par rapport à y et en simplifiant cette expression à l'aide de la relation $\lambda x + b - a\lambda = 0$; on trouve ainsi $y = b - a\lambda$.

Le lieu du point de rencontre de Δ' avec la corde des contacts relative aux droites D et Δ s'obtient en éliminant λ entre les deux équations

$$y - \lambda x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda x + b - a\lambda = 0;$$

ce calcul fournit l'équation

$$(2) \qquad xy + bx - ay = 0,$$

qui représente une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les droites $x = a$, $y = -b$ et passant à l'origine.

Le lieu du point de contact de la droite Δ' avec la conique s'obtient en éliminant λ entre les deux équations

$$\lambda x + b - a\lambda = 0, \qquad y = b - a\lambda;$$

ce calcul fournit l'équation

$$(3) \qquad xy - bx - ay = 0,$$

qui représente une hyperbole symétrique de la précédente par rapport à Ox. Ce résultat était à prévoir, car on sait que les deux droites qui joignent un point d'une conique aux points de contact des deux tangentes perpendiculaires à la tangente au point considéré sont également inclinées sur cette dernière.

Appelons α et β, α' et β' les coordonnées des deux foyers; en écrivant que les produits des distances des deux foyers aux trois droites D, Δ, D' sont égaux, nous aurons les deux relations

$$\beta\beta' = (a - \alpha)(a - \alpha') = (b - \beta)(b - \beta');$$

d'ailleurs les deux rayons vecteurs qui joignent l'origine A aux foyers sont également inclinés sur la tangente Ax; nous avons donc la nouvelle relation $\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{\beta'}{\alpha'}$,

ou

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{-\beta} = \theta.$$

Nous n'avons plus qu'à remplacer dans les deux premières équations α' par $\theta\alpha$, β' par $-\theta\beta$, puis à éliminer θ entre les résultats ainsi obtenus pour avoir le lieu des foyers. Nous trouvons de cette manière

$$(\beta - b)(\alpha^2 + \beta^2) - 2a\alpha\beta + a(a\beta + b\alpha) = 0,$$

ou

$$(4) \qquad (y - b)(x^2 + y^2) - 2axy + a(ay + bx) = 0$$

Cette courbe est du troisième degré; elle passe à l'origine, y admet pour tangente la droite $ay + bx = 0$; elle a une seule direction asymptotique réelle, l'axe des x, et l'asymptote correspondante a pour équation $y = b$, c'est la droite D'.

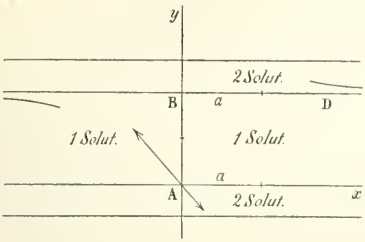
Nous remarquons en outre que l'équation (4) est du second degré en x; nous pouvons donc discuter cette équation en prenant y comme variable indépendante et x comme inconnue. L'équation ainsi envisagée s'écrit

$$(y - b)x^2 - a(2y - b)x + y^2(y - b) + a^2y = 0;$$

elle a ses racines réelles et de signes contraires quand le produit $y(y - b)(y^2 - by + a^2)$ est négatif; si nous supposons, ce qui est toujours permis, a et b positifs, et si nous nous plaçons d'abord dans le cas où b est moindre que $2a$, ceci n'a lieu que lorsque y est compris entre 0 et b.

Dans tout autre intervalle, les deux valeurs de x sont imaginaires ou réelles et de même

signe. Formons la condition de réalité; c'est



$$a^2(2y-b)^2 - 4y(y-b)(y^2-by+a^2) \geqslant 0,$$

ou, en posant $\quad 2y - b = u,$

$$4a^2u^2 - (u^2-b^2)(u^2-b^2+4a^2) \geqslant 0,$$

ou enfin

$$(u^2-b^2)^2 - 4a^2b^2 \leqslant 0.$$

Les racines du premier membre sont

$$u = \pm\sqrt{b^2+2ab},$$

celles du premier membre de la condition exprimée à l'aide de y,

$$y = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2+2ab},$$

et il est facile de voir que la condition de réalité n'est remplie que lorsque y varie entre ces deux nombres. L'un de ces nombres est négatif, l'autre, positif et plus grand que b; ils sont équidistants de $\frac{b}{2}$. En outre la somme des racines est positive dans tout intervalle autre que $\left(\frac{b}{2}, b\right)$; donc dans les deux intervalles où les racines sont réelles et de même signe, elles sont positives. La courbe touche les droites extrêmes

$$y = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2+2ab};$$

elle coupe l'axe des x et son asymptote en deux points d'abscisses égales à a et rencontre la tangente au point A en un point différent de l'origine si b n'est pas égal à a. Tous les résultats de cette discussion sont consignés sur le tableau ci-dessus. La courbe s'en déduit immédiatement (*fig.* 1).

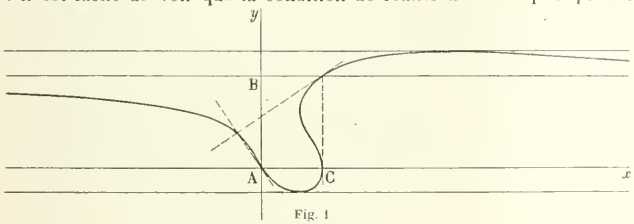


Fig. 1

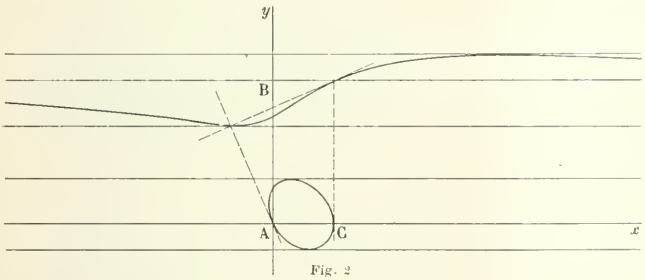


Fig. 2

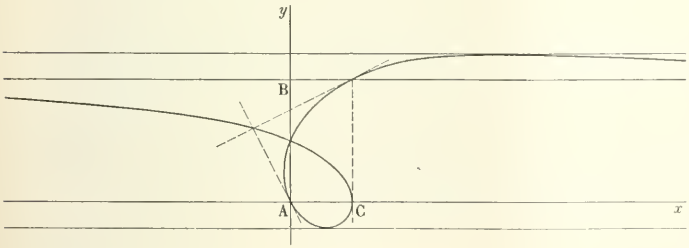


Fig. 3

Si b est plus grand que $2a$, il y a une portion isolée et fermée qui passe au point A et une courbe en S asymptote à la droite $y = b$ (*fig.* 2).

Si $b = 2a$, la courbe présente un point double avec tangentes rectangulaires au point $x = 0$, $y = a$, c'est-à-dire au milieu de AB. C'est une strophoïde (*fig.* 3).

R. HAUSER, à Clermont-Ferrand.

Remarques de M. Messent : La tangente au point C est parallèle à l'axe des y. Les tangentes à l'origine et au point (a, b) sont rectangulaires et se coupent sur la courbe.

Bonne solution : M. G. Rouzier, soldat au 63e. — Solution satisfaisante : M. F. Pégonier, au collège de Cette.

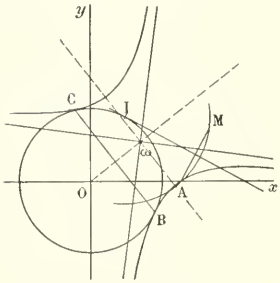
---

610. — *On considère un cercle fixe de rayon* R *et un point fixe*, A, *à une distance a du centre de ce cercle. Trouver :*

1° *L'enveloppe d'un cercle mobile passant par* A *et ayant son centre sur le cercle fixe;*

2° *Le lieu des foyers des hyperboles équilatères bitangentes au cercle fixe et passant par* A. *Dire ce que devient ce lieu quand* $a = R\sqrt{2}$, *et le construire dans ce cas.*

Prenons pour axe des x le diamètre du cercle qui passe au point A et pour axe des y le diamètre perpendiculaire. Désignons par a l'abscisse du point A et par



$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

l'équation du cercle donné.

1. Appelons α et β les coordonnées du centre du cercle mobile; ce cercle a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (a - \alpha)^2 + \beta^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2a\alpha - a^2 = 0,$$

et les paramètres α et β sont liés par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0.$$

L'équation de l'enveloppe s'obtient en égalant les rapports des dérivées partielles par rapport à α et β, des deux équations ainsi trouvées, puis en éliminant α et β entre cette équation nouvelle et les deux précédentes. On trouve ainsi, en tenant en outre compte de la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2,$$

$$\frac{\alpha}{a - x} = \frac{\beta}{-y} = \frac{R}{\sqrt{(a - x)^2 + y^2}},$$

et il n'y a plus qu'à porter ces valeurs dans l'équation du cercle pour obtenir l'équation de l'enveloppe,

$$x^2 + y^2 - a^2 + 2R\sqrt{(a - x)^2 + y^2} = 0.$$

Une simple élévation au carré permet de rendre cette équation rationnelle et donne définitivement

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 - a^2)^2 - 4R^2[(a - x)^2 + y^2] = 0.$$

Il est facile de voir que cette équation représente un limaçon de Pascal ayant son point double au point A. En effet, portons les axes au point A, c'est-à-dire changeons x en $x + a$, l'équation devient

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0;$$

par conséquent, en coordonnées polaires, le nouvel axe des x étant l'axe polaire, nous avons de suite

$$\rho = -2a \cos \omega \pm 2R,$$

qui est l'équation la plus simple du limaçon.

Ce résultat est évident géométriquement. En effet, soit I le centre de l'un des cercles du système; ce cercle a déjà en commun le point A avec tout autre cercle du système et, en particulier, avec le cercle infiniment voisin; le second point commun aux deux cercles est donc le point M symétrique de A par rapport à la ligne des centres, qui est ici la tangente au cercle donné au point I. L'enveloppe cherchée est le lieu du point M; on voit alors que c'est l'homothétique par rapport au point A, dans le rapport 2, de la podaire du cercle donné par rapport à ce même point A. Cette constatation justifie pleinement le résultat obtenu.

2. En désignant par $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ l'équation de la corde des contacts avec le cercle d'une conique bitangente au cercle, et quelconque d'ailleurs, on peut écrire ainsi l'équation de cette conique

$$x^2 + y^2 - R^2 - e^2(x \cos \varphi + y \sin \varphi - p)^2 = 0;$$

e désigne l'excentricité; dans le cas d'une hyperbole équilatère, $e = \sqrt{2}$; par suite l'équation devient

$$x^2 + y^2 - R^2 - 2(x \cos \varphi + y \sin \varphi - p)^2 = 0.$$

Si nous exprimons que cette courbe passe au point A $(a, 0)$, nous obtenons

$$a^2 - R^2 = 2(a \cos \varphi - p)^2.$$

Cette équation nous montre que l'hyperbole équilatère n'est réelle que si $a > R$; alors, en posant $a^2 - R^2 = b^2$, nous trouvons $p = a \cos \varphi - \frac{b}{\sqrt{2}}$, et l'équation de l'hyperbole indiquée est finalement

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - R^2 - 2\left[(x - a) \cos \varphi + y \sin \varphi + \frac{b}{\sqrt{2}}\right]^2 = 0.$$

Cette conique a un axe passant par le point O; l'angle φ est donc la seconde coordonnée polaire de tous les points de cet axe; nous le désignerons maintenant par ω. Posons, pour un point quelconque de cet axe, $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$; nous aurons les ρ des sommets correspondants en exprimant que ces nombres vérifient l'équation (2). Ce calcul nous donne

$$\rho^2 - R^2 - 2\left(\rho - a \cos \omega + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0,$$

ou

$$\rho^2 - 4\rho\left(a \cos \omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right) + R^2 + 2\left(a \cos \omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0,$$

et finalement

$$\rho = 2\left(a \cos \omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right) \pm \sqrt{2\left(a \cos \omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 - R^2}.$$

Cette équation représente le lieu des sommets situés sur cet axe.

La quantité $\sqrt{2\left(a \cos \omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 - R^2}$ représente la longueur du demi-axe, transverse ou non, situé sur la droite dont nous nous occupons.

L'équation

$$\rho = 2\left(a \cos \omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

représente le lieu du centre; nous voyons en passant que ce lieu est un limaçon de Pascal.

La demi-distance focale est $\sqrt{2}\sqrt{2\left(a \cos \omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 - R^2}$. Le lieu des foyers situés sur l'axe qui passe au point O est donc

$$\rho = 2\left(a \cos \omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right) \pm \sqrt{2}\sqrt{2\left(a \cos \omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 - R^2}.$$

Cette équation, rendue rationnelle, se simplifie et s'écrit

$$(3)\qquad \rho^2 - 4\rho\left(a\cos\omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right) + 2R^2 = 0.$$

Sous cette forme, on voit de suite qu'elle représente une ovale de Descartes. En coordonnées rectangulaires, on a

$$(4)\qquad (x^2 + y^2 - 4ax + 2R^2)^2 - 8b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Pour avoir le lieu des foyers situés sur l'autre axe, il faut porter, à partir du centre, sur une direction parallèle à la corde des contacts, une longueur égale à $i\sqrt{2}\sqrt{2\left(a\cos\omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 - R^2}$. On trouve ainsi deux points qui sont à une distance de l'origine donnée par

$$\delta^2 = 4\left(a\cos\omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(a\cos\omega - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2R^2 = 2R^2.$$

Le lieu de ces points est donc immédiat : c'est le cercle

$$(5)\qquad x^2 + y^2 - 2R^2 = 0.$$

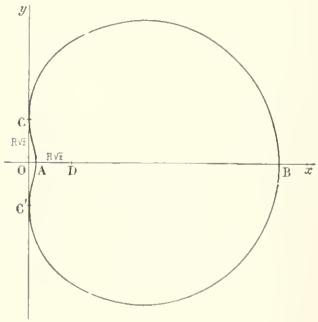
Ce résultat découle d'une propriété de l'hyperbole équilatère relative aux cercles focaux du second système, très aisée à établir et que nous laissons au lecteur le soin de trouver ; d'ailleurs les calculs précédents établissent eux-mêmes cette propriété.

On trouverait aisément le lieu des sommets situés sur le second axe.

Supposons maintenant $a = R\sqrt{2}$. L'équation (4) devient dans ce cas

$$(x^2 + y^2 - 4R\sqrt{2}\,x + 2R^2)^2 - 8R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Il est facile de construire la courbe qu'elle représente, soit en discutant cette équation regardée comme étant bicarrée en y, soit en revenant aux coordonnées polaires. Mais il suffit d'aborder la discussion de l'équation précédente pour s'apercevoir que le point situé sur Ox $(R\sqrt{2}, 0)$ est un point double. Si alors on porte les axes en ce point, l'équation devient



$$(x^2 + y^2)^2 - 4R\sqrt{2}\,(x + R\sqrt{2})(x^2 + y^2) - 8R^2y^2 = 0,$$

et, en transformant en coordonnées polaires,

$$(\rho - 2R\sqrt{2}\cos\omega)^2 - 16R^2 = 0.$$

La nouvelle équation peut donc s'écrire

$$\rho = 2R\sqrt{2}\cos\omega \pm 4R,$$

et, sous cette forme, on reconnaît un limaçon de Pascal ayant son point double à l'origine actuelle ; ici le point double est isolé. Ce résultat facilite la construction de la courbe, puisqu'il ramène à une courbe dont les diverses formes sont connues. Dans le cas actuel, la discussion de la première équation bicarrée dont nous avons parlé est facile et conduit sans peine à la forme du lieu. Nous nous bornons à donner cette forme.

P. SICARD (lycée de Marseille).

Bonne solution : M. J. GAUTHIER (pensionnat de Valbenoîte) ; de la première partie seulement : M. XAMBEU (collège Chaptal).

---

624. — *On donne une parabole fixe et on considère une hyperbole équilatère ayant ses axes parallèles aux directions principales de la parabole, passant au sommet de cette parabole et la touchant en un autre*

point. On demande le lieu du centre de cette hyperbole, le lieu des sommets et le lieu du centre du cercle passant par les trois points communs.

Nous prendrons pour axes de coordonnées les axes habituels de la parabole et nous représenterons par $y^2 - 2px = 0$ l'équation de cette courbe. L'hyperbole ayant ses axes parallèles aux axes de coordonnées et passant à l'origine, aura pour équation

$$x^2 - y^2 - 2\lambda x + 2\mu y = 0,$$

λ et μ désignant les coordonnées du centre de cette conique.

Formons alors l'équation aux ordonnées des points de rencontre de la parabole avec l'hyperbole; nous aurons, en supprimant le facteur y qui correspond au point de rencontre situé à l'origine des coordonnées,

$$y^3 - 4p(p+\lambda)y + 8p^2\mu = 0.$$

Nous exprimerons que l'hyperbole et la parabole se touchent en écrivant que cette équation a une racine double; cela nous donnera une relation entre λ et μ, et, par suite, le lieu du centre de l'hyperbole équilatère,

$$27p\mu^2 - 4(p+\lambda)^3 = 0.$$

Avec les notations habituelles, ce lieu a donc pour équation

$$(1) \qquad 27py^2 - 4(x+p)^3 = 0;$$

c'est une parabole semi-cubique, une développée de parabole ordinaire.

Les axes de l'hyperbole équilatère ont pour équations $x - \lambda = 0$, $y - \mu = 0$. Nous aurons le lieu des sommets situés sur le premier axe en éliminant λ et μ entre l'équation de la conique, la relation trouvée entre ces paramètres et l'équation $x - \lambda = 0$. Ce calcul, facile à effectuer, conduit à l'équation

$$(2) \qquad 16y^2(x+p)^3 - 27p(x^2+y^2)^2 = 0.$$

Le lieu des sommets situés sur le second axe s'obtient aussi aisément; c'est la courbe du sixième degré ayant pour équation

$$(3) \qquad (x^2+y^2+2px)^3 - 54py^2x^3 = 0.$$

Les points de rencontre des deux coniques sont sur un cercle dont l'équation se forme immédiatement en multipliant par 2 l'équation de la parabole et l'ajoutant à celle de l'hyperbole équilatère; on trouve ainsi

$$x^2 + y^2 - 2(\lambda + 2p)x + 2\mu y = 0.$$

Les coordonnées du centre de ce cercle sont données par les deux équations $x = \lambda + 2p$, $y = -\mu$, et le lieu de ce point s'obtient en éliminant λ et μ entre ces deux équations et la relation qui existe entre eux. On trouve ainsi une parabole semi-cubique égale à la première

$$(4) \qquad 27py^2 - 4(x-p)^3 = 0.$$

Construisons maintenant les courbes (2) et (3).

Pour construire la première, nous changerons tous les signes de l'équation (2) et nous l'ordonnerons par rapport aux puissances décroissantes de y; nous aurons ainsi à discuter l'équation bicarrée

$$27py^4 + [54px^2 - 16(x+p)^3]y^2 + 27px^4 = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$[27px^2 - 8(x+p)^3]^2 - \overline{27}^2 p^2x^4 \geqslant 0,$$

ou

$$16(x+p)^3(x-2p)^2(4x+p) \geqslant 0;$$

elle exige que x soit en dehors de l'intervalle $\left(-p, \frac{-p}{4}\right)$. Le produit des deux valeurs de y^2 étant positif, il faut en outre que la somme soit positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$8(x+p)^3 - 27px^2 > 0;$$

or l'équation $8(x+p)^3 - 27px^2 = 0$ n'a qu'une racine réelle comprise entre $-p$ et $-\frac{p}{4}$; par conséquent les valeurs de y^2 ne sont réelles et positives que lorsque x est plus grand que $\frac{-p}{4}$. Pour $x = -\frac{p}{4}$, elles sont égales; pour $x = 0$, l'une d'elles est nulle; pour $x = 2p$, elles redeviennent égales et le point correspondant est un point double; enfin pour $x = \infty$, elles sont infinies. D'ailleurs il est évident sur l'équation que les branches infinies sont des branches paraboliques parallèles aux axes, et que l'origine est un point de rebroussement avec Ox pour tangente. La courbe est dès lors aisée à tracer (*fig.* 1).

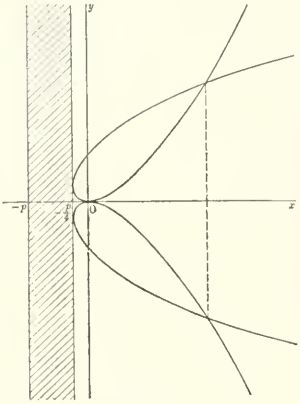


Fig. 1

Pour construire la deuxième courbe, nous remarquons d'abord que l'équation (3) met en évidence les deux faits suivants : la courbe ne peut être réelle que si x est positif, ou bien si elle est intérieure au cercle $x^2 + y^2 + 2px = 0$; si donc x est négatif, il est nécessairement compris entre $-2p$ et 0. Posons alors $z = x^2 + y^2 + 2px$; l'équation deviendra

$$z^3 - 54px^3z + 54px^3(x^2 + 2px) = 0;$$

la condition de réalité des trois racines de cette équation est

$$-4.\overline{54}^3 p^3x^9 + 27.\overline{54}^2 p^2x^6(x^2+2px)^2 < 0,$$

ou

$$27.\overline{54}^2 p^2x^8[(x+2p)^2 - 8px] < 0,$$

ou enfin

$$27.\overline{54}^2 p^2x^8(x-2p)^2 < 0;$$

cette condition n'est jamais remplie; donc l'équation en z n'a qu'une racine réelle et, par suite, l'équation en y^2 n'a qu'une racine réelle; cette racine sera positive si $z > x^2 + 2px$, c'est-à-dire si ce nombre substitué à z dans le premier membre de l'équation en z donne le signe moins; cela exige que $x^2 + 2px$ soit négatif. Par conséquent, la courbe n'existe qu'à l'intérieur du cercle signalé et se compose de deux arcs symétriques par rapport à Ox. Le point

$$x = -2p, \qquad y = 0$$

est un point de rebroussement, et la tangente en ce point est Ox; l'origine est un point triple, les tangentes en ce point sont confondues avec Oy et la courbe, d'après notre discussion, n'a qu'une branche réelle passant en ce point. On peut maintenant la tracer sans peine (*fig.* 2).

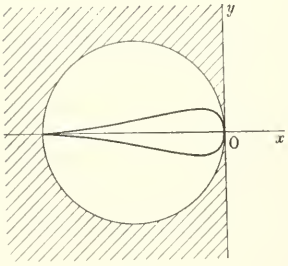


Fig. 2

Ont envoyé de bonnes solutions, mais n'ont pas construit les courbes ou ont commis quelques erreurs dans cette partie de la solution : MM. E.-N. Barisien; J.-A. Gauthier (pensionnat de Valbenoîte); C. Verchère (à Saint-Etienne).

PHYSIQUE ET CHIMIE

586. — *Sous une pression x, un baromètre cylindrique de hauteur* L, *sur cuve à niveau constant, se trouve entièrement plein de mercure ; l'observateur y fait passer de l'air sec qui occupe une longueur l.*

Ce baromètre est ensuite comparé à un baromètre normal à la température à laquelle ont été faites les premières observations; on trouve que la pression étant H *l'air occupe une longueur* l'.

Quelle était la pression initiale x ?

(*École Centrale, 1896, 2e session.*)

$$L = 770^{mm}, \qquad l = 40^{mm}, \qquad l' = 50^{mm}, \qquad H = 752^{mm}.$$

Dans la première partie de l'observation, l'air sec occupe le volume l sous la pression due à une colonne de mercure de hauteur $x - L + l$. Dans la seconde, il occupe, sous la pression $H - L + l'$, le volume l'. D'après la loi de Mariotte, on a

$$l(x - L + l) = l'(H - L + l'),$$

d'où

$$x = L - l + \frac{l'}{l}(H - L + l').$$

Application numérique : $x = 770^{mm}$.

C. VERCHÈRE (Saint-Étienne).

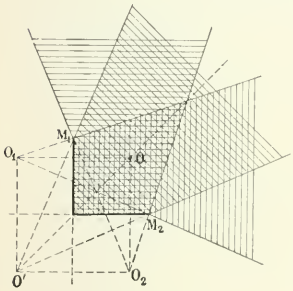
Solution exacte : E. Barré, à Valenciennes.

---

587. — *On donne deux miroirs plans* M_1, M_2 *égaux et perpendiculaires entre eux. On demande de figurer dans le plan du tableau le champ de cet appareil pour un œil placé en* O *sur la bissectrice.*

(*École Centrale, 1896, 2e session.*)

Soient O_1, O_2 et O' les images du point O dans les miroirs. Le champ correspondant à une réflexion sur M_1 est limité par les miroirs et par les droites O_1M_1 et O_1M_2 (hachures verticales); le champ correspondant à une réflexion sur M_2 est limité par les miroirs et par les droites O_2M_2 et O_2M_1 (hachures horizontales); enfin le champ correspondant à deux réflexions successives est limité par les miroirs et par les droites $O'M_1$ et $O'M_2$ (hachures inclinées), la première réflexion se faisant sur l'un ou l'autre miroir suivant que le point lumineux est d'un côté ou de l'autre de la bissectrice OO'. On aperçoit une, deux ou trois images d'un même point suivant que la région où il se trouve est couverte par un, deux ou trois systèmes de hachures.



QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1896), *Suite.*

Géométrie (M. Lévy).

563. — Lieu des points d'un plan dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante.

564. — On considère un cercle O et un angle droit BAC tournant autour de son sommet A. Lieu du milieu M de la corde BC.

565. — On considère un polygone régulier de n côtés et un point ω à l'intérieur de ce polygone. Montrer que la somme des distances du point ω aux côtés de ce polygone est constante.

566. — Construire un polygone ayant un périmètre donné et semblable à un polygone donné.

567. — Construire les expressions $x = \sqrt[5]{a^5 + b^5}$, $x = \sqrt[4]{a^2b^2 + c^4}$.

568. — On donne un triangle ABC ; mener une parallèle DE à la base BC telle que la surface du trapèze BCDE soit moyenne proportionnelle entre la surface du triangle ABC et celle du triangle ADE.

569. — La somme des distances des sommets d'un parallélépipède à un plan est égale à huit fois la distance du centre du parallélépipède au même plan.

570. — Lieu des points de l'espace dont la différence des carrés des distances à deux points donnés est constante. — Etant donnés deux points A et B, trouver sur une droite Δ un point tel que la différence des carrés des distances aux deux points A et B soit donnée.

571. — Lieu des points d'un plan dont la somme des carrés des distances à deux points A et B pris hors du plan est constante.

572. — Lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur constante, s'appuyant sur deux droites rectangulaires.

573. — Le carré d'un diamètre d'une ellipse est égal au carré du petit axe, plus le carré de la différence des rayons vecteurs qui joignent les foyers à l'une de ses extrémités.

574. — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à deux ellipses homofocales.

575. — Construire une conique connaissant : 1° trois points et un foyer ; 2° un foyer et trois tangentes ; 3° un foyer, une tangente et deux points ; 4° la longueur de l'axe focal, le centre et deux tangentes ; 5° un sommet, un foyer et une tangente.

576. — Lieu des foyers des paraboles passant par un point donné et ayant pour directrice une droite donnée. — Lieu des sommets.

577. — Construire une parabole connaissant :

1° le foyer et deux points de la courbe ;
2° la directrice, un point et une tangente ;
3° deux tangentes et la tangente au sommet.

578. — On considère une parabole. Par le foyer on mène une perpendiculaire à l'axe et on porte de part et d'autre deux longueurs égales FP, FP'. On projette les points P et P' sur une tangente en Q et Q'. Démontrer que l'aire du trapèze PP'QQ' est constante.

579. — Soient PM, PM' les tangentes menées à une parabole par un point extérieur P. On joint le foyer F au point P et aux points de contact M et M'. Montrer que FP est moyenne proportionnelle entre FM et FM'.

Géométrie descriptive (M. Lévy).

580. — Intersection d'une droite avec un plan déterminé par la ligne de terre et un point.

581. — Distance d'un point à un plan défini par trois points.

582. — Plus courte distance de deux arêtes opposées d'un tétraèdre.

583. — Amener deux droites invariablement liées 1° à avoir leurs projections horizontales (ou verticales) parallèles ; 2° à être horizontales ou de front.

584. — Amener deux plans définis, l'un par trois points, l'autre par ses traces, à être simultanément verticaux.

QUESTIONS PROPOSÉES

699. — Étant données deux paraboles P et P_1 ayant même axe et même sommet, trouver et construire le lieu du point de rencontre d'une tangente T à la parabole P avec une tangente à la parabole P_1 qui soit perpendiculaire à T.

E.-N. Barisien.

700. — Trouver l'enveloppe des polaires de l'orthocentre d'un triangle donné par rapport aux paraboles circonscrites à ce triangle.

On considère en outre le cercle circonscrit au triangle formé par l'axe, la tangente au sommet de l'une de ces paraboles et la polaire de l'orthocentre du triangle considéré. Lieu du centre et enveloppe de ce cercle.

A. Pouillart.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

8e Année N° 2. Novembre 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LES AXES DE SYMÉTRIE DES COURBES ALGÉBRIQUES

Le nouveau programme d'admission à l'École Polytechnique contient, comme indication particulière à propos des théories générales relatives aux courbes planes, la recherche des axes de symétrie que ces courbes peuvent avoir. L'épithète *algébriques* est évidemment sous-entendue et nous nous placerons uniquement dans ce cas. L'objet de cette note est d'exposer sommairement une méthode qui permette de trouver les axes de symétrie d'une courbe représentée par une équation entière $f(x, y) = 0$, ou bien d'affirmer qu'une telle courbe n'a pas d'axe.

A cet effet, je désignerai par α et β les paramètres directeurs d'un axe, par x et y les coordonnées d'un point quelconque de cet axe. Alors tout autre point de cette droite aura pour coordonnées $x+\alpha\lambda$, $y+\beta\lambda$, et tout point d'une perpendiculaire à l'axe élevée en ce point courant (λ), aura pour coordonnées

$$x+\alpha\lambda+\beta\rho, \qquad y+\beta\lambda-\alpha\rho,$$

en supposant toutefois les axes de coordonnées rectangulaires, ce que j'admettrai pour simplifier les calculs. Je désigne maintenant par X et Y les expressions $x+\alpha\lambda$, $y+\beta\lambda$, et je cherche les points de rencontre avec la courbe de la perpendiculaire à l'axe dont il a été fait mention ; j'aurai les ρ de ces points en développant et résolvant l'équation suivante :

$$f(X+\beta\rho, \quad Y-\alpha\rho) = 0,$$

ou

$$f(\beta\rho+X, \quad -\alpha\rho+Y, \quad 0\rho+1) = 0.$$

Cette équation s'écrit

$$\rho^n f(\beta, -\alpha, 0) + \rho^{n-1}[Xf'_x(\beta, -\alpha, 0) + Yf'_y(\beta, -\alpha, 0) + f'_z(\beta, -\alpha, 0)] + \frac{\rho^{n-2}}{1.2}(Xf'_x + \cdots)^2 + \cdots = 0.$$

J'exprimerai alors que la droite envisagée est un axe, en écrivant que les racines de cette équation en ρ sont deux à deux égales et de signes contraires. Pour cela, j'annulerai les coefficients de l'équation en ρ de deux en deux ; je pourrai agir ainsi de deux façons, soit en commençant au coefficient de ρ^{n-1}, soit en commençant au coefficient de ρ^n. Chacune des équations ainsi obtenues devra avoir lieu quel que soit λ ; j'aurai de cette façon plusieurs équations qui ne contiendront que le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$; elles devront avoir une ou plusieurs racines communes, et il n'y aura qu'à essayer ces racines communes. Pour faire l'essai relatif à l'une d'elles, je porterai cette valeur dans toutes les autres équations, qui contiennent, elles, x et y et je verrai si elles contiennent en facteur une même fonction linéaire de x et de y ; si cela n'est pas, il n'y a pas d'axe ; si cela est, la droite représentée par cette fonction linéaire égalée à 0 est un axe.

J'annule d'abord les coefficients de ρ^{n-1}, ρ^{n-3}, ..., pour toutes les valeurs de λ. J'obtiens les groupes successifs d'équations que voici :

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha f'_x(\beta, -\alpha, 0) + \beta f'_y(\beta, -\alpha, 0) = 0, \\ x f'_x(\beta, -\alpha, 0) + y f'_y(\beta, -\alpha, 0) + f'_z(\beta, -\alpha, 0) = 0; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha^3 f'''_{x^3}(\beta, -\alpha, 0) + \beta^3 f'''_{y^3}(\beta, -\alpha, 0) + 3\alpha^2\beta f'''_{x^2y}(\beta, -\alpha, 0) + 3\alpha\beta^2 f'''_{xy^2}(\beta, -\alpha, 0) = 0, \\ 3\alpha^2 x f'''_{x^3}(\beta, -\alpha, 0) + 3\beta^2 y f'''_{y^3}(\beta, -\alpha, 0) + 3\alpha^2 y f'''_{x^2y}(\beta, -\alpha, 0) \\ \qquad + 6\alpha\beta x f'''_{x^2y}(\beta, -\alpha, 0) + 3\beta^2 x f'''_{xy^2}(\beta, -\alpha, 0) + 6\alpha\beta y f'''_{xy^2}(\beta, -\alpha, 0) \\ \qquad + 3\alpha^2 f'''_{x^2z}(\beta, -\alpha, 0) + 3\beta^2 f'''_{y^2z}(\beta, -\alpha, 0) + 6\alpha\beta f'''_{xyz}(\beta, -\alpha, 0) = 0, \end{cases}$$

. . . . . .

. . . . . .

J'aurai à voir si les premières équations des groupes (1), (2), ..., ont une racine commune en $\frac{\beta}{\alpha}$; si cela n'est pas, il est inutile d'aller plus loin; si cela est, je porte cette valeur de $\frac{\beta}{\alpha}$ dans les secondes équations des groupes (1), (2), ..., et je dois trouver ainsi la même droite. Cela ne suffit pas encore : j'aurai ensuite à vérifier que cette droite fait partie de toutes les autres courbes représentées par les équations (1) et (2) et correspondant à cette même valeur de $\frac{\beta}{\alpha}$.

J'annule ensuite les coefficients de ρ^n, ρ^{n-2}, ..., pour toutes les valeurs de λ et j'obtiens les groupes successifs d'équations que voici :

$$(1')\quad f(\beta, -\alpha, 0) = 0;$$

$$(2')\quad \begin{cases} \alpha^2 f''_{x^2}(\beta, -\alpha, 0) + \beta^2 f''_{y^2}(\beta, -\alpha, 0) + 2\alpha\beta f''_{xy}(\beta, -\alpha, 0) = 0, \\ \alpha x f''_{x^2}(\beta, -\alpha, 0) + \beta y f''_{y^2}(\beta, -\alpha, 0) + (\alpha y + \beta x) f''_{xy}(\beta, -\alpha, 0) \\ \qquad + \alpha f''_{xz}(\beta, -\alpha, 0) + \beta f''_{yz}(\beta, -\alpha, 0) = 0, \\ x^2 f_{x^2}(\beta, -\alpha, 0) + y^2 f_{y^2}(\beta, -\alpha, 0) + 2xy f''_{xy}(\beta, -\alpha, 0) \\ \qquad + 2x f''_{xz}(\beta, -\alpha, 0) + 2y f''_{yz}(\beta, -\alpha, 0) + f''_{z^2}(\beta, -\alpha, 0) = 0; \end{cases}$$

. . . . . etc.

J'ai à voir maintenant si les premières équations des groupes (1'), (2'), ... ont une racine commune en $\frac{\beta}{\alpha}$; si cela n'est pas, il est inutile d'aller plus loin; si cela est, je porte cette valeur de $\frac{\beta}{\alpha}$ dans les secondes équations des groupes (1'), (2'), ..., et je dois trouver ainsi la même droite. Cela ne suffit pas encore, et je dois vérifier ensuite que cette droite fait partie de toutes les autres courbes représentées par les équations (1'), (2'), ..., et correspondant à cette même valeur de $\frac{\beta}{\alpha}$.

Quelques exemples vont éclaircir la méthode et en préciser l'application. Je choisis, comme premier exemple, une conique quelconque

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

l'équation en ρ est ici

$$(A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2)\rho^2 + [(A\beta - B\alpha)X + (B\beta - C\alpha)Y + D\beta - E\alpha]\rho + AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0.$$

En annulant le terme en ρ, quel que soit λ, j'ai les deux équations

$$B(\beta^2 - \alpha^2) + (A - C)\alpha\beta = 0,$$
$$\beta f'_x - \alpha f'_y = 0;$$

je trouve ainsi les deux directions principales et les axes principaux de la conique. Cette méthode est évidemment l'une des plus simples et des plus rapides qui soient connues.

Si j'annule le coefficient de ρ^2 et le terme constant, je trouve les quatre équations

$$A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2 = 0,$$
$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 0,$$
$$\alpha f'_x + \beta f'_y = 0,$$
$$f(x, y) = 0.$$

Les deux premières équations ne sont compatibles que si $A + C = 0$; elles sont alors identiques et donnent pour α et β les paramètres des directions asymptotiques. Pour chacun de ces couples de valeurs, la troisième équation donne l'asymptote correspondante, et la quatrième équation exige que la conique se dédouble en ses asymptotes. Il n'y a donc de solutions de ce genre que si la conique se réduit à deux droites rectangulaires et alors chacune de ces droites est un axe de symétrie.

Comme second exemple, je prendrai la cubique

$$3xy^2 - x^3 - R(x^2 + y^2) = 0;$$

l'équation en ρ est alors

$$(3\alpha^2\beta - \beta^3)\rho^3 + [3\alpha^2 X - 6\alpha\beta Y - 3\beta^2 X - R(\alpha^2 + \beta^2)]\rho^2$$
$$+ [3\beta Y^2 - 6\alpha XY - 3\beta X^2 - 2R(\beta X - \alpha Y)]\rho + 3XY^2 - X^3 - R(X^2 + Y^2) = 0.$$

J'annule d'abord le terme en ρ^2 et le terme constant, pour toutes les valeurs de λ, et j'obtiens les six équations

$$\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 = 0,$$
$$3\alpha^2 x - 6\alpha\beta y - 3\beta^2 x - R(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$
$$\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 = 0,$$
$$3\beta^2 x + 6\alpha\beta y - 3\alpha^2 x - R(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$
$$3\alpha y^2 + 6\beta xy - 3\alpha x^2 - 2R(\alpha x + \beta y) = 0,$$
$$3xy^2 - x^3 - R(x^2 + y^2) = 0.$$

Il est inutile d'étudier ce système, car la dernière équation représente la cubique et celle-ci ne se décompose pas.

J'annule alors de la même façon le coefficient de ρ^3 et celui de ρ; j'ai ainsi

$$3\alpha^2\beta - \beta^3 = 0,$$
$$3\alpha^2\beta - \beta^3 = 0,$$
$$(\beta^2 - \alpha^2)y - 2\alpha\beta x = 0,$$
$$3\beta y^2 - 6\alpha xy - 3\beta x^2 - 2R(\beta x - \alpha y) = 0.$$

Les deux premières équations sont identiques et admettent les solutions $\alpha = 1$, $\beta = 0$; $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$; $\alpha = 1$, $\beta = -\sqrt{3}$. Pour la première solution, la troisième équation se réduit à $y = 0$ et la quatrième à $3xy - Ry = 0$; donc la droite $y = 0$ est un axe; c'était évident *a priori*. Pour la seconde solution, la troisième équation se réduit à $y - x\sqrt{3} = 0$ et la quatrième, à

$$3\sqrt{3}(y^2 - x^2) - 6xy + 2R(y - x\sqrt{3}) = 0;$$

elle contient en facteur $y - x\sqrt{3}$; donc la droite $y - x\sqrt{3} = 0$ est un axe de symétrie. Il en est de même de $y + x\sqrt{3} = 0$, qui correspond à la troisième solution.

E. H.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

625. — *On considère un quadrilatère et une conique* S *inscrite dans le triangle* ABC *formé par les trois diagonales du quadrilatère ; on considère en outre une conique* S_1 *inscrite dans le quadrilatère.*

1° *Trouver, quand* S_1 *varie, le lieu des ombilics relatifs à* S *et à* S_1. *Montrer que l'enveloppe des droites qui ont même pôle par rapport à* S *et à* S_1 *est une courbe de troisième classe* Γ *inscrite dans le triangle* ABC.

2° *Soient* a, b, c *les points de contact de* Γ *avec les côtés* BC, CA, AB *et* a_1, b_1, c_1 *les points de contact des tangentes à* Γ *autres que les côtés du triangle et issues des points* A, B, C. *Montrer que les droites* aa_1, bb_1, cc_1 *sont tangentes à* Γ *et passent par un même point* M.

3° *Faire voir que les triangles* ABC *et* abc *sont homologiques, et trouver le lieu du centre d'homologie et l'enveloppe de l'axe d'homologie quand* S *varie en restant inscrite dans le triangle* ABC *et que le point* M *décrit une droite fixe.*

4° *Énoncer les propriétés corrélatives.*

1. Prenons pour triangle de référence le triangle ABC et soit

$$S \equiv \alpha vw + \beta wu + \gamma uv = 0$$

l'équation tangentielle de la conique S.

Une conique quelconque S_1 inscrite dans le quadrilatère a pour équation tangentielle

$$S_1 \equiv m_1 u^2 + m_2 v^2 + m_3 w^2 = 0,$$

avec la condition

$$(1) \qquad a^2 m_1 + b^2 m_2 + c^2 m_3 = 0,$$

a, b, c désignant les coordonnées d'un côté quelconque du quadrilatère.

Soient x, y, z les coordonnées d'un ombilic relatif à S et S_1; pour une valeur convenable de λ nous aurons l'identité

$$S + \lambda S_1 \equiv (ux + vy + wz)(ux_1 + vy_1 + wz_1),$$

d'où nous tirons

$$\begin{aligned} xx_1 &= m_1, & yz_1 + zy_1 &= \lambda\alpha, \\ yy_1 &= m_2, & zx_1 + xz_1 &= \lambda\beta, \\ zz_1 &= m_3, & xy_1 + yx_1 &= \lambda\gamma. \end{aligned}$$

En éliminant x_1, y_1, z_1, m_1, m_2, m_3, λ entre ces équations et la relation (1) nous obtiendrons le lieu du point (x, y, z).

Un calcul très simple donne l'équation

$$a^2x^2(\beta y + \gamma z - \alpha x) + b^2y^2(\gamma z + \alpha x - \beta y) + c^2z^2(\alpha x + \beta y - \gamma z) = 0.$$

Soient maintenant u, v, w les coordonnées d'une polaire double de S et de S_1; pour une valeur convenable de λ nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial u} + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial u} &\equiv \beta w + \gamma v + 2\lambda m_1 u = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial v} + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial v} &\equiv \gamma u + \alpha w + 2\lambda m_2 v = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial w} + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial w} &\equiv \alpha v + \beta u + 2\lambda m_3 w = 0. \end{aligned}$$

Eliminons m_1, m_2, m_3, λ entre ces trois équations et la relation (1), nous obtenons

$$\Gamma \equiv a^2vw(\beta w + \gamma v) + b^2wu(\gamma u + \alpha w) + c^2uv(\alpha v + \beta u) = 0.$$

C'est l'équation tangentielle de l'enveloppe; elle représente une courbe de troisième classe inscrite dans le triangle ABC.

2. Les points de contact a, b, c de cette courbe avec les côtés BC, CA, AB ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned} c^2\beta v + b^2\gamma w &= 0, \\ a^2\gamma w + c^2\alpha u &= 0, \\ b^2\alpha u + a^2\beta v &= 0. \end{aligned}$$

La droite Aa_1, troisième tangente issue du point A à la courbe Γ a pour coordonnées $(0, \beta, -\gamma)$; la droite Bb_1 a pour coordonnées $(-\alpha, 0, \gamma)$ et enfin Cc_1 a pour coordonnées $(\alpha, -\beta, 0)$.

Les points de contact a_1, b_1, c_1 ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned} \alpha u(b^2\gamma^2 + c^2\beta^2) - a^2\beta\gamma^2 v - a^2\beta^2\gamma w &= 0, \\ \beta v(c^2\alpha^2 + a^2\gamma^2) - b^2\gamma\alpha^2 w - b^2\gamma^2\alpha u &= 0, \\ \gamma w(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2) - c^2\alpha\beta^2 u - c^2\alpha^2\beta v &= 0. \end{aligned}$$

Par suite les droites aa_1, bb_1, cc_1 ont pour coordonnées

$$\frac{a^2}{\alpha}(c^2\beta^2 - b^2\gamma^2), \qquad -\frac{b^2}{\beta}(c^2\beta^2 + b^2\gamma^2), \qquad \frac{c^2}{\gamma}(c^2\beta^2 + b^2\gamma^2),$$
$$\frac{a^2}{\alpha}(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2), \qquad \frac{b^2}{\beta}(a^2\gamma^2 - c^2\alpha^2), \qquad -\frac{c^2}{\gamma}(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2),$$
$$-\frac{a^2}{\alpha}(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2), \qquad \frac{b^2}{\beta}(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2), \qquad \frac{c^2}{\gamma}(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2).$$

On vérifie aisément que ces trois droites sont tangentes à la courbe Γ et qu'elles passent par le point M qui a pour équation

$$\frac{\alpha^3}{a^2}u(c^2\beta^2 + b^2\gamma^2) + \frac{\beta^3}{b^2}v(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2) + \frac{\gamma^3}{c^2}w(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) = 0.$$

3. Les droites bc et BC se coupent en un point P, les droites ca, CA au point Q, enfin les droites ab, AB au point R.

Les points P, Q, R sont sur la droite qui a pour coordonnées $\frac{a^2}{\alpha}$, $\frac{b^2}{\beta}$, $\frac{c^2}{\gamma}$; par suite les triangles abc et ABC sont homologiques.

Le centre d'homologie a pour équation

$$\frac{\alpha}{a^2}u + \frac{\beta}{b^2}v + \frac{\gamma}{c^2}w = 0.$$

Lorsque le point M décrit la droite (u_1, v_1, w_1) α, β, γ sont liés par la relation

$$(2) \qquad \frac{\alpha^3}{a^2}u_1(c^2\beta^2 + b^2\gamma^2) + \frac{\beta^3}{b^2}v_1(a^2\gamma^2 + c^2\alpha^2) + \frac{\gamma^3}{c^2}w_1(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) = 0.$$

Le lieu du centre d'homologie s'obtient en éliminant α, β, γ entre l'équation (2) et les suivantes

$$\frac{a^2x}{\alpha} = \frac{b^2y}{\beta} = \frac{c^2z}{\gamma},$$

ce qui donne

$$a^2u_1x^3(b^2y^2 + c^2z^2) + b^2v_1y^3(c^2z^2 + a^2x^2) + c^2w_1z^3(a^2x^2 + b^2y^2) = 0.$$

Cette équation représente une courbe du cinquième ordre admettant pour points doubles les points A, B, C.

Enfin l'équation tangentielle de l'enveloppe de l'axe d'homologie s'obtient en éliminant α, β, γ entre les équations

$$\frac{\alpha u}{a^2} = \frac{\beta v}{b^2} = \frac{\gamma w}{c^2}$$

et l'équation (2).

On trouve ainsi l'équation

$$a^2u_1vw(b^2w^2 + c^2v^2) + b^2v_1wu(c^2u^2 + a^2w^2) + c^2w_1uv(a^2v^2 + b^2u^2) = 0$$

qui représente une courbe de quatrième classe inscrite dans le triangle ABC.

4. L'énoncé des propriétés corrélatives ne présente aucune difficulté.

L. SAYOUS.

Bonne solution par M. E. Barré.

---

626. — *Étant données une ellipse et deux directions fixes* Δ, Δ', *par un point variable de l'ellipse*, M, *on mène des parallèles à* Δ *et* Δ' *qui rencontrent l'ellipse en* P *et* Q. *Montrer que le lieu du point de rencontre des tangentes à l'ellipse en* P *et* Q *est une ellipse homothétique et concentrique à l'ellipse donnée. Résultat semblable pour l'enveloppe de la droite* PQ. *Généraliser.*

Supposons l'ellipse rapportée à ses axes, et soient $b^2X^2 + a^2Y^2 - a^2b^2 = 0$ son équation, x_0, y_0

les coordonnées du point M dans une de ses positions; x, y, celles du point R, pôle de PQ et, enfin, m, m' les coefficients angulaires des directions Δ, Δ'.

La droite PQ a pour équation

$$b^2xX + a^2yY - a^2b^2 = 0.$$

Transportons l'origine des coordonnées en M. Les équations de l'ellipse et de PQ deviennent

$$b^2X^2 + a^2Y^2 + 2b^2x_0X + 2a^2y_0Y = 0, \qquad b^2xX + a^2yY + b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0.$$

On en déduit, par une combinaison homogène en X, Y, l'équation de l'ensemble des droites MP, MQ,

$$(b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2)(b^2X^2 + a^2Y^2) - 2(b^2xX + a^2yY)(b^2x_0X + a^2y_0Y) = 0,$$

d'où les deux équations de condition

$$m + m' = \frac{2b^2(x_0y + y_0x)}{b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2}, \qquad mm' = \frac{b^2(-b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2)}{a^2(b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2)}.$$

Ces équations linéaires en x_0, y_0 donnent

$$x_0 = \frac{a^2b^2[(a^2mm' - b^2)x - (m + m')a^2y]}{(b^2x^2 + a^2y^2)(b^2 + a^2mm')}, \qquad y_0 = \frac{-a^2b^2[(a^2mm' - b^2)y + (m + m')b^2x]}{(b^2x^2 + a^2y^2)(b^2 + a^2mm')}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$, et supprimant le facteur $b^2x^2 + a^2y^2$ qui entre dans le lieu, et dont l'interprétation géométrique est facile (lorsque le point M est à l'infini sur les asymptotes de l'ellipse, les tangentes en P, Q sont les asymptotes elles-mêmes), on obtient le lieu cherché

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2\,\frac{(a^2mm' - b^2)^2 + a^2b^2(m + m')^2}{(b^2 + a^2mm')^2} = 0,$$

ou

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2\,\frac{(a^2m^2 + b^2)(a^2m'^2 + b^2)}{(b^2 + a^2mm')^2} = 0.$$

C'est une ellipse homothétique et concentrique à l'ellipse donnée.

Généralisation. — Les droites MP, MQ passent par deux points fixes A, B de la droite de l'infini sur laquelle l'ellipse donnée et l'ellipse lieu de R sont bitangentes.

Si la conique est quelconque, et si MP, MQ passent respectivement par deux points A, B à distance finie, le lieu se compose d'une conique bitangente à la conique donnée, la corde des contacts étant AB.

VASNIER.

M. E.-N. Barisien a envoyé une bonne solution de cette question.

Solution géométrique. — Il est facile de voir que l'enveloppe de la droite PQ est une conique; en effet, par tout point de l'ellipse proposée, il passe deux droites PQ, car on peut supposer que ce point est l'extrémité soit d'une parallèle à Δ, soit d'une parallèle à Δ'.

Si l'on suppose maintenant que le point considéré vienne coïncider avec l'un des points à l'infini de l'ellipse, les deux parallèles menées par ce point à Δ et Δ' coïncident avec la droite de l'infini et les deux cordes de l'ellipse, analogues à PQ, et passant en ce point, sont confondues avec la tangente en ce point, c'est-à-dire avec l'asymptote. Il en résulte que l'enveloppe est une conique doublement tangente à l'ellipse donnée en ces points à l'infini, c'est-à-dire homothétique et concentrique à l'ellipse proposée.

La polaire réciproque de cette enveloppe est donc aussi homothétique et concentrique à l'ellipse proposée.

Excellente solution basée sur la méthode des projections de M. G.-A. Pouilliart (Nevers); de même pour M. E. Barré (Valenciennes).

PHYSIQUE

607. — *On fait passer lentement un courant d'air atmosphérique successivement dans un tube long et étroit entouré de glace fondante, puis dans un tube rempli de ponce sulfurique. L'augmentation de poids*

du premier est p, celle du second p'. On demande de déterminer la force élastique f de la vapeur d'eau dans l'air. La force élastique maxima à 0°, F_0, est supposée connue ainsi que la pression atmosphérique H.

Quelle serait la signification de la condition $p = 0$ *ou* $p' = 0$?

Appelons t et V la température et le volume extérieurs de l'air qui a traversé les tubes, V_0 son volume à 0°, d la densité de la vapeur d'eau, a le poids spécifique de l'air normal.

Les deux tubes réunis retiennent toute la vapeur d'eau :

$$p + p' = Vda\,\frac{f}{760}\,\frac{1}{1+\alpha t}.$$

Le second retient la vapeur saturante à 0° :

$$p' = V_0 da\,\frac{F_0}{760}.$$

Enfin la loi de Mariotte, appliquée à l'air sec, donne

$$\frac{V(H-f)}{1+\alpha t} = V_0(H - F_0).$$

En éliminant V, t et V_0 entre ces équations, on trouve

$$f = \frac{(p+p')HF_0}{pF_0 + p'H}.$$

Pour $p = 0$, on trouve $f = F_0$; en réalité, f serait, dans ce cas, égal ou inférieur à F_0, mais les équations ne peuvent nous donner que la limite puisque nous avons supposé que l'air entrant dans le second tube était saturé à 0°.

Pour $p' = 0$, on trouve $f = H$. L'eau ne pourrait être, en effet, retenue en totalité dans le premier tube que si l'air était exclusivement composé de vapeur d'eau.

Assez bonne solution de M. G. Rousier, soldat au 63e de ligne.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

667. — *On donne dans le plan vertical de projection un cercle de rayon égal à* 60mm, *dont le centre* C *est situé à droite de la ligne* YY′ *qui divise la feuille en deux parties égales parallèlement aux grands côtés, à une distance* CD *de cette ligne égale à* 80mm, *et à* 327mm *du bord inférieur de la feuille. Ce cercle, en tournant autour de* YY′, *engendre un tore plein.*

Une sphère pleine, de rayon égal à 90mm, *touche le plan du cercle précédent en un point* O′ *situé au-dessous de* CD, *à* 50mm *du point* C, *et à* 40mm *à droite de* YY′. *La projection horizontale* O *du centre de la sphère est à* 180mm *au-dessous de* O′ *sur une parallèle à* YY′.

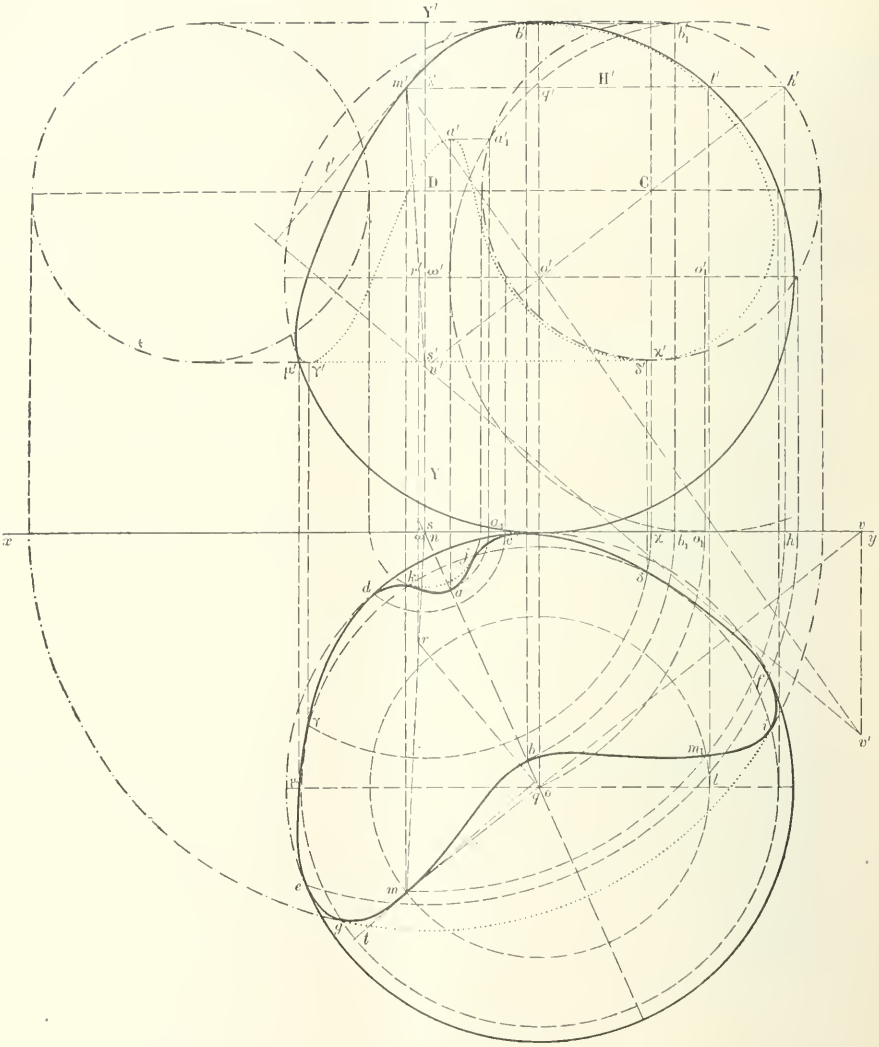
On construira l'intersection du tore et de la sphère, et l'on représentera par ses projections ce qui reste de la sphère en supprimant la partie comprise dans le tore, les parties vues étant en traits noirs pleins, et les parties cachées en pointillé.

On indiquera en traits pleins rouges les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point, ainsi que les points remarquables. On tracera en rouge également les parties des deux surfaces en dehors de l'intersection.

(*École Polytechnique, 1897.*)

Nous emploierons comme surfaces auxiliaires des plans horizontaux, ou des plans verticaux passant par l'axe YY′ du tore.

Soit H′ un plan horizontal quelconque; il coupe la sphère suivant le cercle horizontal de centre (q, q') et de rayon $(ql, q'l')$ et il détermine dans le tore deux parallèles projetés horizontalement en vraie grandeur. L'un de ces parallèles est $(\lambda h, \lambda' h')$ dont la projection horizontale rencontre la projection horizontale du cercle de la sphère


Y'
H'
D
C
Y
x
y
v
v'

en deux points m et m_1 symétriques l'un de l'autre par rapport à ωo, ce qui donne deux points de l'intersection dont l'un est (m, m'). Le second parallèle du tore donnerait deux autres points. Nous en concluons que la projection horizontale de l'intersection admet ωo comme axe de symétrie. Construisons la tangente à l'intersection au point (m, m'); la normale à la sphère en ce point est $(mo, m'o')$ et celle au tore est $(mn, m'n')$, le point n' ayant été obtenu par la normale au tore au point (h, h'). La trace verticale du plan de ces normales est $n'v'$ et sa trace sur le plan horizontal de O est ro; d'où les deux projections, mt perpendiculaire à ro et $m't'$ perpendiculaire à $n'v'$, de la tangente en (m, m').

Comme points remarquables, déterminons d'abord ceux situés sur les contours apparents horizontaux des deux surfaces; il suffit de prendre comme plans auxiliaires les plans de ces contours apparents. Celui qui passe par le centre (o, o') de la sphère donne quatre points sur le contour apparent horizontal de la sphère et projetés horizontalement en c, d, f, e. Le plan horizontal passant par le centre du tore donne les quatre points sur le contour apparent horizontal du tore et qui sont projetés en g, i, j, k.

Pour obtenir les points sur le contour apparent vertical du tore, nous remarquons que le plan de front passant par l'axe du tore est tangent à la sphère et par suite ne donne aucun point de l'intersection; il reste les deux plans horizontaux des parallèles extrêmes dont l'un seulement, le plus bas, donne deux points (γ, γ') et (δ, δ'). Aux points γ et δ de la projection horizontale, la courbe est tangente à la projection horizontale $o\mu$ du cercle de la sphère qui donne ces points.

Il reste maintenant à déterminer les points a et b sur l'axe de symétrie de la projection horizontale; pour cela considérons le plan vertical qui contient cet axe. Il coupe la sphère suivant un grand cercle et le tore suivant la courbe méridienne; si nous rabattons ce plan sur le plan vertical de projection, le centre du grand cercle est rabattu en (o_1, o'_1) et les points correspondants de l'intersection sont rabattus en a'_1 et b'_1. Revenant à la position primitive, ces points sont alors (a, a') et (b, b'); en ces points, la tangente est horizontale parce que les plans tangents en ces points se coupent suivant des perpendiculaires au plan méridien du tore. Par suite $a'a'_1$ et $b'b'_1$ sont les parallèles limites de la projection verticale de l'intersection.

Etablissons maintenant les parties vues et cachées. En projection horizontale, les deux arcs de et cf du contour apparent horizontal de la sphère sont enlevés comme intérieurs au tore, alors les arcs de courbe $d\gamma e$ et $c\delta f$ formant contour extérieur du solide restant sont vus; quant au reste de la courbe qui est sur l'hémisphère supérieur il est vu. Enfin nous avons conservé les arcs gi et kj du contour apparent du tore, comme limitant le fond de l'entaille faite dans la sphère par le tore.

En projection verticale tout est caché sauf l'arc qui forme le contour extérieur du solide. N. C.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1897)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*Suite.*)

V. Géométrie descriptive.

886. — Abaisser d'un point (c, c') une perpendiculaire sur une droite de profil $(ab, a'b')$.

887. — On donne trois droites par leurs projections; construire une droite les rencontrant et telle que les points de rencontre la partagent dans un rapport donné.

888. — On donne une droite par ses projections, trouver l'angle formé par ses deux plans projetants.

889. — Par une droite rencontrant la ligne de terre, mener un plan tel que l'angle de ses traces ait pour bissectrice la droite donnée.

890. — On donne un quadrilatère ABCD dans le plan horizontal et les projections de deux points S et M. Mener par le point M un plan qui coupe l'angle polyèdre SABCD suivant un parallélogramme.

891. — Mener une parallèle à un plan donné s'appuyant sur deux droites données et telle que la longueur comprise entre les deux droites soit égale à une longueur donnée.

892. — Construire une sphère passant par trois points et tangente à un plan ou à une droite.

893. — On donne une horizontale, une droite de front et un point. Mener par le point un plan faisant avec chacune des deux droites un angle donné.

894. — On donne un plan par ses traces sur les plans de projection; mener par le point d'intersection de ce plan avec la ligne de terre une droite faisant avec les traces des angles donnés.

895. — Construire une sphère tangente au plan horizontal, passant par un point, et tangente à une droite donnée en un point donné.

896. — On donne une droite de front (D, D') et une droite quelconque (Δ, Δ'). Mener par celle-ci un plan faisant avec (D, D') un angle donné.

897. — Enrouler une droite sur un cône droit à base circulaire.

898. — On donne une ellipse qui est la base d'un cylindre dont on connaît encore deux points, on demande de trouver la direction des génératrices.

899. — On donne une droite par ses projections (D, D'); c'est la ligne de plus grande pente d'un plan. Une conique dans ce plan qui se projette horizontalement suivant un cercle est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan donné. On demande le contour apparent du cylindre.

900. — On donne une droite (A, A') et un cercle O dans un plan horizontal H'. Ce cercle est la directrice d'un cône ayant pour sommet le point (s, s'). Trouver le contour apparent du cylindre qui a pour section droite l'intersection du cône et du plan qui a la droite (A, A') pour ligne de plus grande pente.

901. — On donne un cône par sa base dans le plan horizontal et son sommet, et une droite de front. Peut-on construire un cône de révolution ayant cette droite pour axe et touchant le cône sur une génératrice donnée? Trouver le point de contact des deux cônes.

902. — On donne deux segments, l'un de front (oa, $o'a'$), l'autre horizontal (ob, $o'b'$). Ce sont des demi-diamètres conjugués d'une ellipse qui est la directrice d'un cône dont on donne le sommet. On demande les contours apparents de ce cône.

903. — On considère un cylindre dont la directrice est un cercle dans le plan horizontal. Trouver sur le cylindre le point le plus rapproché de la ligne de terre.

904. — On donne un cercle dans le plan du tableau et une corde ab de ce cercle. On mène par ab un plan faisant un angle de 30° avec le plan donné, et dans ce nouveau plan on construit le cercle ayant pour diamètre ab. Trouver le contour apparent du cône passant par les deux cercles.

905 — Normales communes à un cône et à un cylindre ayant pour directrice commune un cercle horizontal.

906. — Trouver la plus courte distance entre un cylindre de révolution dont l'axe est de front et une droite quelconque.

907. — Section d'un cylindre de révolution, défini par les projections de son axe et par son rayon, par le plan bissecteur du second dièdre.

908. — On donne un cercle dans le plan horizontal et un point (s, s'). On considère le cône supplémentaire du cône donné et la projection verticale d'un point de ce cône. Trouver sa projection horizontale et le plan tangent. Contour apparent du cône supplémentaire.

909. — On donne deux droites qui se coupent, dans le plan de ces deux droites une conique est donnée par sa projection horizontale. C'est la base d'un cylindre dont on donne les génératrices. Ombre de ce cylindre sur le second plan bissecteur.

910. — Couper deux cônes ayant leurs bases dans le plan horizontal par des plans donnant des hyperboles homothétiques.

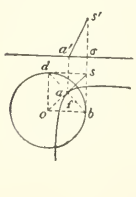
911. — On donne dans le plan horizontal une hyperbole équilatère dont une asymptote est parallèle à la ligne de terre et une parabole; ces deux courbes sont les bases de deux cylindres de front; intersection des deux surfaces.

912. — On donne un cylindre ayant pour base une hyperbole dans un plan de front; les génératrices sont horizontales. Un cône a pour base une ellipse située dans le plan de l'hyperbole; son sommet (s, s') est sur la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le centre de l'hyperbole. Intersection des deux surfaces.

913. — Intersection du cône engendré par une droite tournant autour d'une droite de front et d'un cylindre dont la base est dans le plan horizontal, la direction des génératrices étant quelconque.

914. — On donne deux coniques tangentes dans un plan horizontal et deux points par leurs projections; ce sont les sommets de deux cônes ayant respectivement pour bases les coniques données. On demande l'intersection des deux cônes.

915. — On donne dans le plan horizontal deux circonférences tangentes intérieurement; on demande l'intersection des deux cônes ayant pour bases ces circonférences, les sommets étant sur une même verticale et symétriques par rapport au plan horizontal.



916. — Soit O le centre d'un cercle situé dans le plan horizontal, Ob le rayon de front, Od le rayon de bout. On construit un carré sur Ob et Od, soit s le quatrième sommet, a le point de rencontre des diagonales, et f le milieu de ab. On considère le cône de sommet (s, s')($s'\sigma = Ob$) ayant pour directrice le cercle O et le cylindre qui a pour base la parabole de sommet a, de foyer f, et pour génératrice la droite as, $a's'$. Intersection des deux surfaces.

917. — Intersection d'un cône et d'un cylindre qui se raccordent le long d'une génératrice commune.

918. — Dans un plan déterminé par deux droites on considère une conique dont on connaît la projection verticale. Cette conique est la base commune de deux cônes de sommets donnés. Intersection de ces deux cônes.

919. — Intersection de deux cônes qui ont pour directrice commune une parabole dans le plan horizontal.

920. — On donne une ligne de terre et un cercle situé dans le plan horizontal coupant la ligne de terre en *a* et *b*. On considère un diamètre *cd* du cercle. Faire tourner le cercle autour de *cd* jusqu'à ce qu'il devienne tangent au plan vertical.

921. — On donne un cercle horizontal, un diamètre *ab* et un losange *abcd* construit sur *ab*. On considère les deux cônes engendrés par *ab* et *ac* tournant autour de *bc* et le tore engendré par le cercle tournant autour de *cd*. Intersection du tore et du double cône. Tangente au point *a*.

922. — Mener à une surface gauche de révolution à axe vertical un plan tangent dont le point de contact soit sur un méridien donné.

923. — Mener à une sphère un plan tangent passant par un point et faisant un angle donné avec le plan horizontal.

924. — Intersection d'une sphère et d'un cône de révolution ; le sommet du cône est un point de la sphère ; l'axe passe par le point le plus haut de la sphère et l'angle au sommet est 45°.

925. — On donne un cylindre de révolution à axe vertical et une ellipse dans le plan de front de l'axe, tangente aux deux droites de contour apparent vertical du cylindre ; on fait tourner l'ellipse autour de son grand axe. Intersection des deux surfaces.

926. — Mener à un hyperboloïde à axe vertical un plan tangent faisant avec le plan horizontal un angle donné et passant par un point donné.

927. — On donne une surface de révolution définie par son axe (A, A') et une courbe génératrice (C, C'). On demande la trace horizontale du cylindre circonscrit à cette surface et dont la direction des génératrices est donnée.

928. — On considère la surface engendrée par une droite (Δ, Δ') tournant autour d'une droite (A, A'). On donne un point *a'* sur la projection verticale A' de l'axe ; c'est la projection verticale d'un point de la surface dont on demande la projection horizontale.

929. — Mener à un cône de révolution défini par son axe, son sommet et son angle au sommet des plans tangents par un point.

930. — On donne une verticale et une droite de bout, puis une droite passant par un point de la verticale ; on la fait tourner autour de la verticale et de la droite de bout. Intersection des deux surfaces.

931. — Mener à une sphère un plan tangent passant par un point et faisant un angle donné avec le plan horizontal.

932. — On considère une surface gauche de révolution engendrée par une droite tournant autour de la ligne de terre. Trouver la projection verticale d'un point connaissant sa projection horizontale. Plan tangent.

933 — Trouver les contours apparents d'un cylindre de révolution connaissant trois génératrices.

934. — On donne une sphère tangente au plan horizontal et deux droites rectangulaires dans ce plan. Construire le sommet d'un cône circonscrit à la sphère et coupant le plan suivant une parabole tangente aux droites données.

935. — Construire un cylindre de révolution tangent à deux plans et passant par un point.

936. — On donne une sphère, une droite, un point sur cette droite. Construire un cône de révolution ayant pour sommet le point, pour axe la droite et tangent à la sphère.

937. — Soit un cercle situé dans le plan horizontal de projection et une verticale ayant son pied en (*o*, o') sur le cercle. On considère la conique d'un plan de bout projetée horizontalement suivant le cercle. Trouver les contours apparents de la surface engendrée par la conique en tournant autour de la verticale (*o*, o').

938. — On donne un plan de bout et un axe vertical. Dans le plan de bout est une parabole dont la projection horizontale a pour foyer le pied de l'axe. Contours apparents de la surface de révolution engendrée par la parabole tournant autour de l'axe.

939. — Contours apparents d'une surface de révolution engendrée par un cercle horizontal tournant autour d'un axe quelconque.

940. — On donne une surface gauche de révolution d'axe vertical, la projection verticale *m'* d'un point, la projection horizontale Δ d'une droite, et sur cette projection un point *s*. Y a-t-il un cône de révolution dont l'axe soit projeté suivant Δ, le sommet en *s* et tangent à l'hyperboloïde au point projeté en *m'*.

941. — On donne deux droites qui ne se coupent pas ; ce sont les génératrices d'un paraboloïde ayant pour plan directeur le plan horizontal. On demande la section de la surface par un plan de bout. Asymptotes.

942. — On donne trois droites parallèles au plan horizontal, et l'on prend un point (*s*, *s'*) sur l'une d'elles. Ce point est le sommet d'un cône ayant pour base une parabole donnée horizontale. On demande l'intersection du cône et du paraboloïde défini par les trois droites.

943. — Trouver le pôle d'un plan et le plan polaire d'un point par rapport à une surface gauche de révolution à axe vertical.

944. — Intersection d'une surface gauche de révolution dont l'axe est vertical et d'un cône qui a pour directrice le cercle de gorge.

945. — Deux droites définissent un paraboloïde à plan directeur horizontal. Trace horizontale d'un cône circonscrit de sommet donné.

946. — On définit un hyperboloïde par un cercle horizontal, une génératrice verticale et une génératrice de même système. Construire une génératrice du second système. Trouver le centre de la surface.

947. — Intersection d'une surface gauche de révolution engendrée par la droite de front (Δ, Δ') tournant autour de la verticale Oz et du paraboloïde engendré par les horizontales s'appuyant sur (Δ, Δ') et sur une seconde droite de front.

948. — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal défini par les deux droites (A, A') et (B, B') et un cône dont la base est une circonférence située dans un plan horizontal et rencontrant la génératrice (A, A'). Le sommet de ce cône est sur (A, A'), sa projection verticale étant au point de rencontre de A' et B'. Intersection des deux surfaces. Tangente en un point. Asymptotes. Tangentes au point double.

949. — On considère un hyperboloïde de révolution à axe vertical, deux génératrices de même système et une droite quelconque dont la projection horizontale passe par le point d'intersection des projections horizontales des deux génératrices considérées. Trouver l'intersection du premier hyperboloïde avec l'hyperboloïde défini par les trois droites précédentes.

950. — On considère l'hyperboloïde de révolution engendré par une hyperbole équilatère H en tournant autour de son axe non transverse, et le cône de révolution ayant pour sommet un point A de l'une des asymptotes, pour axe la perpendiculaire abaissée de A sur l'axe de l'hyperboloïde et admettant pour génératrice l'asymptote de H passant par A. Intersection des deux surfaces.

951. — On donne dans le plan du tableau une ellipse, une droite définie par sa projection et sa trace sur le plan du tableau et par l'angle qu'elle fait avec ce plan. Trouver l'intersection de la droite et de l'ellipsoïde engendré par l'ellipse en tournant autour d'un de ses axes.

952. — On donne par leurs projections trois droites qui ne se rencontrent pas; trouver un point du contour apparent horizontal de l'hyperboloïde défini par ces trois droites.

953. — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical; on demande son intersection avec un cône de révolution dont le sommet est sur le paraboloïde et dont l'axe rencontre celui du paraboloïde, une génératrice du contour apparent vertical étant parallèle à l'axe du paraboloïde.

954. — Un cône a pour base un cercle donné dans le plan horizontal et pour sommet un point donné dans le plan vertical. Lieu des projections du centre de la base sur les génératrices du cône. Construire un point et la tangente.

955. — On donne un hyperboloïde de révolution défini par son axe vertical et une génératrice G. On donne la projection verticale d'un point M de la surface, trouver la projection horizontale. Soit G_1 la génératrice passant par le point M qui est de système différent de G. On considère un cône ayant pour sommet le point M, passant par G_1 et ayant pour base dans le plan symétrique par rapport au plan du cercle de gorge du plan horizontal du point M une circonférence dont le centre est le pied de l'axe. Intersection des deux surfaces.

956. — Un cône a pour base un cercle dans le plan vertical et pour sommet un point dans le plan horizontal. Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de la base sur les plans tangents au cône. Tangente en un point du lieu.

957. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cylindre qui a pour directrice le cercle de gorge de la surface.

958. — Trace horizontale du cône circonscrit à une surface gauche de révolution à axe vertical.

959. — On donne un hyperboloïde de révolution d'axe vertical. o est la projection horizontale du centre du cercle de gorge, m est la trace horizontale de la génératrice de front mn. On considère le cylindre qui a pour génératrice mn et pour base le cercle décrit sur om comme diamètre. Intersection des deux surfaces.

960. — On considère le cône engendré par une droite de front (Δ, Δ') tournant autour d'un axe vertical a et le paraboloïde défini par les horizontales s'appuyant sur (Δ, Δ') et sur une verticale b située dans le même plan de profil que a. Intersection de ces deux quadriques. Tangentes. Asymptotes.

961. — On donne les projections de deux droites non concourantes : elles sont les génératrices d'un paraboloïde hyperbolique qui a le plan horizontal pour plan directeur. Trouver les génératrices horizontales faisant avec l'une des droites un angle donné.

962. — Un hyperboloïde de révolution est engendré par une droite (Δ, Δ') tournant autour d'un axe vertical; un cylindre de révolution passe par (Δ, Δ'), son axe rencontre l'axe de l'hyperboloïde. Intersection.

963. — On donne une verticale et une droite de front; on considère l'hyperboloïde engendré par la droite de front tournant autour de la verticale. Trouver la trace du cône circonscrit de sommet donné sur le plan du cercle de gorge.

964. — Ombre propre et ombre portée d'un hémisphère creux tangent au plan horizontal, le plan de base étant horizontal.

965. — Ombre portée par une droite sur un paraboloïde hyperbolique à plan directeur de front.

966. — Ombre portée d'une sphère sur une autre sphère.

967. — Ombre portée d'une sphère sur un cône de révolution à axe vertical.

968. — Ombre portée par une sphère sur les plans de projection, les rayons lumineux étant parallèles. On considère un plan horizontal qui coupe la sphère et le cylindre lumineux circonscrit suivant deux courbes, démontrer que ces courbes sont bitangentes, en déduire une construction des foyers de l'ellipse ombre sur le plan horizontal.

969. — Ombre propre et ombre portée d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et limité à deux plans symétriques par rapport au centre.

970. — On donne une ligne de front et un plan de front. Une circonférence située dans ce plan de front engendre une surface de révolution en tournant autour de la droite de front. On demande l'ombre portée sur le plan horizontal par cette surface supposée éclairée par un point lumineux.

971. — Ombre propre et ombre portée d'un paraboloïde de révolution à axe vertical éclairé par des rayons parallèles.

972. — Ombre d'une sphère sur un hyperboloïde de révolution à une nappe. Tangente en un point de la courbe séparatrice.

VI. — Statique.

973. — On donne un paraboloïde $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$; à l'intérieur de ce paraboloïde on place une barre rigide pesante. Position d'équilibre.

974. — On considère un point pesant assujetti à rester sur la surface $xyz = a^3$. Il est attiré par un point O proportionnellement à la distance. Peut-il y avoir équilibre ?

975. — On donne un tétraèdre ; aux quatre sommets sont appliquées quatre forces normales aux faces opposées et proportionnelles à la hauteur. Réduire ce système à une force et un couple.

976. — Un point d'une ellipse est attiré par les deux foyers avec des intensités proportionnelles aux distances du point à ces foyers. Trouver la position d'équilibre.

977. — Position d'équilibre d'une barre pesante reposant sur deux plans inclinés.

978. — On donne une poulie mobile infiniment petite suspendue à un câble dont les extrémités A et B sont fixes. Elle porte un poids p; on donne la longueur $AB = l$. Condition d'équilibre.

979. — On donne une circonférence située dans un plan vertical et un point A sur la verticale du centre. Un fil passe en A sur une poulie infiniment petite et dans un anneau qui peut glisser sur la circonférence. Aux extrémités du fil agissent deux poids. Chercher la position d'équilibre.

980. — Par les milieux des côtés d'un polygone plan convexe, on mène des forces perpendiculaires et égales aux côtés correspondants et dirigées vers l'intérieur du polygone. Réduire ces forces.

981. — On donne deux triangles $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$. On joint successivement les points A_1, A_2, A_3 aux points B_1, B_2, B_3. Les droites obtenues A_1B_1, A_2B_2, ... représentent en grandeur et direction des forces appliquées à un corps solide; on demande de réduire ces forces. Elles se réduisent à une force unique dont la valeur est $9G_1G_2$, G_1 et G_2 étant les centres de gravité des deux triangles.

982. — On considère n points A, B, C, ... et le centre des moyennes distances G. On joint le point G aux n points donné et on applique en chacun de ces points des forces proportionnelles à GA, GB, ... Démontrer que ces forces se font équilibre.

983. — Trouver la position d'équilibre d'un disque elliptique soutenu par deux points fixes situés sur une ligne horizontale et mobile seulement dans le plan du tableau.

984. — Si quatre droites sont génératrices d'un même hyperboloïde, on peut toujours déterminer sur elles quatre segments représentant un système de forces en équilibre.

985. — Un point assujetti à se déplacer sur une droite est attiré par deux points proportionnellement au carré de la distance. Y a-t-il une position d'équilibre ?

986. — Démontrer que les équations d'équilibre en coordonnées obliques ont même forme qu'en coordonnées rectangulaires.

QUESTIONS PROPOSÉES

701. — On considère une cissoïde droite et une strophoïde droite ayant même asymptote, telles en outre que le point de rebroussement de la première coïncide avec le point double de la seconde. Par ce point on mène une sécante quelconque, OAB, qui rencontre les deux courbes respectivement en A et B. On demande de trouver et de construire le lieu du point de rencontre des tangentes aux deux courbes en A et B.

E.-N. Barisien.

702. — On considère un triangle ABC et un point P. Une transversale Δ coupe les côtés BC, CA, AB du triangle ABC, en A′, B′, C′. Les droites PA′, PB′, PC′, coupent AB, BC, CA en A″, B″, C″.

1° Si les points A″, B″, C″ sont en ligne droite, le point P décrit une conique (Γ). Quelles positions doit occuper la droite Δ pour que (Γ) soit une hyperbole équilatère ?

2° Si on assujettit la conique (Γ) à passer par un point du plan, M, la droite (Δ) enveloppe une conique (Γ′). Lieu des points M pour lesquels les coniques (Γ′) sont des paraboles.

E. Limes (lycée Louis-le-Grand).

703. — Un bassin alimenté par un robinet à débit constant, mais percé d'un orifice à sa partie inférieure, met un certain temps à se remplir. Que devient ce temps si l'on double à la fois le débit du robinet et la section de l'orifice ?

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

623. — *Deux paraboles de grandeurs constantes tournent autour de leurs sommets respectifs, supposés fixes, de façon que par leurs quatre points de rencontre passe un cercle. Trouver :*

1° *Le lieu du centre de ce cercle ;*

2° *Le lieu du centre, l'enveloppe des axes et l'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères qui passent aux points de rencontre des deux paraboles.*

Solution géométrique. — **1.** Soient (P_1), (P_2) les deux paraboles données, p_1 et p_2 leurs paramètres.

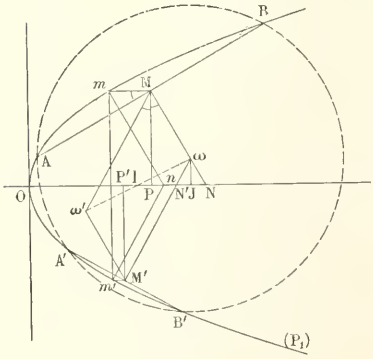


Fig. 1.

Pour que par les quatre points d'intersection de (P_1) et (P_2) il passe un cercle, il faut que les axes de ces courbes soient rectangulaires.

En effet les droites AB, A′B′ (*fig.* 1) étant également inclinées sur les axes des deux paraboles, ces axes sont respectivement parallèles aux bissectrices des angles $\widehat{AB, A'B'}$, et $\widehat{AA', BB'}$, droites qui sont rectangulaires dans un quadrilatère inscrit.

Cela posé, le centre ω du cercle est à l'intersection des perpendiculaires MN, M′N′ menées à AB, A′B′ en leurs milieux. Les diamètres de AB, A′B′ dans la parabole (P_1), rencontrent cette courbe en m, m' symétriques par rapport à l'axe de (P_1) (les tangentes en m, m' sont également inclinées sur l'axe).

La droite MN, perpendiculaire à AB, étant parallèle à la normale mn à la parabole (P_1) en m, sa projection PN sur l'axe est égale à p_1. De même $P'N' = p_1$. Soient I le milieu du segment PP′, J le milieu du segment NN′, c'est-à-dire la projection de ω sur l'axe de (P_1) ; des égalités $PN = P'N' = p_1$, il résulte $IJ = p_1$. L'axe de (P_1) est parallèle à Mm, $M'm'$ et équidistant de ces deux droites. De même l'axe de la parabole (P_2) est équidistant de MP, M′P′,

et par suite passe par le point I. La distance du centre du cercle ω à l'axe de la parabole (P_2) est donc constante et égale à p_1; de même la distance de ω à l'axe de (P_1) est égale à p_2.

Soient alors O, O′ les sommets fixes des deux paraboles, OI, O′I les axes dans une de leurs positions, ω le centre du cercle (*fig.* 2).

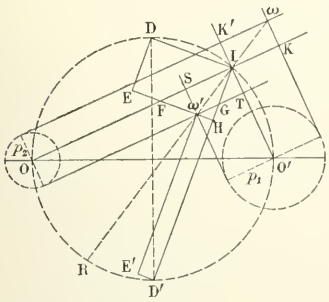


Fig. 2.

Abaissons les perpendiculaires ωK, $\omega K'$ sur IO, IO′ et prolongeons ωI jusqu'en R, point de rencontre avec le cercle décrit sur OO′ comme diamètre. Nous avons

$$\omega K = p_2, \qquad \omega K' = p_1.$$

Le triangle rectangle ωIK est donc de grandeur constante. L'angle en I étant constant, le point R est fixe sur le cercle OO′, et

$$\omega I = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

Le lieu de ω est par suite un limaçon de Pascal ayant R pour point double. Le lieu comprend en outre le limaçon symétrique du précédent par rapport à OO′.

2. Les axes de l'hyperbole équilatère passant aux quatre points A, B, A′, B′ sont respectivement parallèles aux axes des deux paraboles (P_1), (P_2). On sait d'après une propriété de l'hyperbole équilatère que la corde AB (*fig.* 1) et le diamètre conjugué de cette corde $M\omega'$ sont également inclinés sur les asymptotes de l'hyperbole (qui sont ici parallèles aux bissectrices de l'angle mMP).

$M\omega'$ est donc la symétrique par rapport à MP de la perpendiculaire $M\omega$ à AB. De même le diamètre conjugué de A′B′, $M'\omega'$ est la symétrique de $M'\omega$ par rapport à M′P′. D'où il résulte que ω', centre de l'hyperbole équilatère est le symétrique de ω par rapport au point d'intersection I des axes des deux paraboles.

En se reportant à la figure 2, on voit que le lieu de ω' est le même limaçon que le lieu de ω.

Les axes de l'hyperbole équilatère, parallèles à OI, O′I ont respectivement pour enveloppes les cercles de centres O et O′ et de rayons p_2 et p_1.

Soient D, D′ les extrémités du diamètre perpendiculaire à OO′ dans le cercle OO′. ID, ID′ sont parallèles aux asymptotes ω'E, ω'E′ de l'hyperbole. Or le triangle rectangle $IH\omega'$ est de grandeur constante, car $\widehat{OIR}$ étant constant, il en est de même de $\widehat{\omega'IH} = \frac{\pi}{4} - \widehat{OIR}$, et $I\omega' = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$. Il en résulte que les distances des points D et D′ à ces asymptotes, DE, D′E′ respectivement égales à IH, ω'H sont constantes. Les enveloppes des deux asymptotes se composent donc de deux cercles de centres D et D′. Il est facile de calculer les rayons de ces cercles: les quatre triangles rectangles $FS\omega'$, FIH, ITG, $GH\omega'$ étant isocèles on a

$$IF = IS + SF = IS + S\omega' = p_1 + p_2; \qquad \omega'G = \omega'T - GT = \omega'T - IT = p_1 - p_2.$$

Les rayons des cercles sont donc

$$DE = IH = \frac{IF\sqrt{2}}{2} = (p_1 + p_2)\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{et} \qquad D'E' = H\omega' = \frac{\omega'G\sqrt{2}}{2} = (p_1 - p_2)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

VASNIER.

Nous avons reçu de M. F. Pégorier, de Cette, une bonne solution de cette question, mais trop tard pour en faire mention dans le N° de Septembre. L'auteur de cette solution a remarqué que le premier lieu est un limaçon de Pascal; l'ovale de Descartes dont nous avons fait mention a donc un point double. Nos lecteurs vérifieront aisément ce point.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

608. — *Lorsqu'un triangle rectangle a ses côtés de l'angle droit placés sur deux droites fixes et que la somme de leurs longueurs est constante, faire voir que :*

1° *Le milieu de l'hypoténuse décrit une ligne droite ;*

2° *L'hypoténuse enveloppe une parabole ;*

3° *Le cercle circonscrit au triangle passe par deux points fixes ;*

4° *Le centre de gravité du triangle* T *formé par les trois centres des cercles exinscrits au triangle rectangle décrit une hyperbole ;*

5° *Le centre du cercle circonscrit à ce même triangle* T *décrit aussi une hyperbole.*

Prenons pour axes de coordonnées les droites fixes sur lesquelles sont placés les côtés OA et OB du triangle rectangle considéré ; désignons par $2l$ la somme constante donnée.

Soient $OA = p$, $OB = q$, *p et q étant supposés positifs* ; nous avons

$$p + q = 2l.$$

1. Les coordonnées du milieu I de l'hypoténuse AB sont

$$x = \frac{p}{2}, \qquad y = \frac{q}{2};$$

par suite ce point est situé sur la droite qui a pour équation

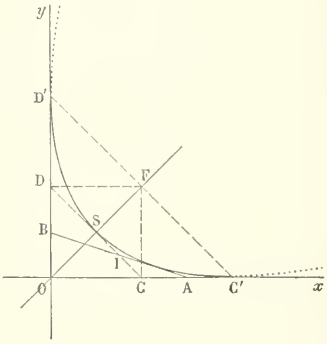
$$x + y - l = 0,$$

et qui rencontre les axes aux points $C(l, 0)$ et $D(0, l)$.

Le lieu du point I se compose seulement du segment CD.

2. L'équation de la droite AB est $qx + py - pq = 0$;
remplaçons dans cette équation q par $2l - p$, nous avons en ordonnant par rapport à p

$$p^2 - p(x - y + 2l) + 2lx = 0. \tag{1}$$



Nous aurons l'équation de l'enveloppe en écrivant que cette équation considérée comme du deuxième degré en p a une racine double, ce qui donne

$$(x - y + 2l)^2 - 8lx = 0,$$

ou

$$(x - y)^2 - 4l(x + y) + 4l^2 = 0.$$

Cette équation représente une parabole (P) qui a pour axe la bissectrice $(x - y = 0)$ de l'angle xOy et pour tangente au sommet la droite CD $(x + y - l = 0)$. Le sommet est le point S milieu de CD. D'ailleurs on vérifie aisément que cette parabole touche Ox au point $C'(2l, 0)$ et Oy au point $D'(0, 2l)$. Le foyer F est le milieu de $C'D'$.

Il est presque évident que l'enveloppe de l'hypoténuse AB se compose seulement de la portion $C'SD'$ de la parabole. On peut d'ailleurs le vérifier analytiquement.

En effet, si x, y sont les coordonnées d'un point de la parabole, l'équation (1) admet une racine double

$$p = \frac{x - y + 2l}{2},$$

la valeur de q correspondante est

$$q = 2l - p = -\frac{x - y - 2l}{2}.$$

Comme p et q doivent être positifs, on doit avoir

$$x - y + 2l > 0, \qquad x - y - 2l < 0,$$

ce qui montre que le point (x, y) de l'enveloppe doit être situé du même côté que l'origine par rapport aux parallèles à OF menées par les points D' et C'.

3. Le cercle circonscrit au triangle AOB a pour équation

$$x^2 + y^2 - px - qy = 0,$$

ou en remplaçant q par $2l - p$

$$x^2 + y^2 - 2ly - p(x - y) = 0.$$

Par suite ce cercle passe par les points fixes dont les coordonnées vérifient les équations

$$x^2 + y^2 - 2ly = 0, \qquad x - y = 0,$$

c'est-à-dire par l'origine et par le point $F(l, l)$.

4. Posons $AB = \sqrt{p^2+q^2} = 2\lambda$, le demi-périmètre du triangle AOB est égal à $l+\lambda$; par suite les coordonnées du centre du cercle exinscrit dans l'angle O sont

$$(O_1) \qquad x_1 = l+\lambda, \qquad y_1 = l+\lambda;$$

celles du centre du cercle exinscrit dans l'angle A

$$(O_2) \qquad x_2 = p-l-\lambda, \qquad y_2 = l+\lambda-p.$$

et enfin celles du centre du cercle exinscrit dans l'angle B

$$(O_3) \qquad x_3 = l+\lambda-q, \qquad y_3 = q-l-\lambda.$$

Les coordonnées x, y du centre de gravité du triangle T sont alors

$$3x = l+\lambda+p-q, \qquad 3y = l+\lambda-(p-q).$$

Par addition et soustraction on en déduit

$$3(x+y) = 2(l+\lambda), \qquad 3(x-y) = 2(p-q),$$

avec la condition $p+q = 2l$.

On a alors immédiatement

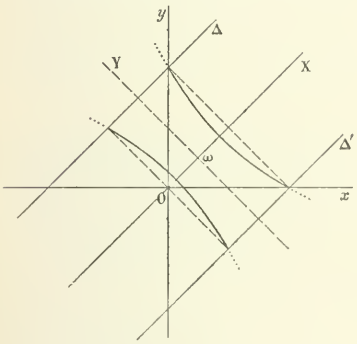
$$(2) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{3}{4}(x-y)+l, \\ q = -\dfrac{3}{4}(x-y)+l, \end{cases}$$

et comme $4\lambda^2 = p^2+q^2$, on a l'équation $[3(x+y)-2l]^2 = 2l^2+\dfrac{9}{8}(x-y)^2$,

ou

$$[3(x+y)-2l]^2 - \frac{9}{8}(x-y)^2 = 2l^2.$$

Cette équation représente une hyperbole dont les axes ont pour équations



$$x+y-\frac{2l}{3} = 0, \quad \text{(axe imaginaire)}$$

$$x-y = 0; \quad \text{(axe réel)}$$

les sommets ont pour abscisses

$$\frac{l(2\pm\sqrt{2})}{6}.$$

D'ailleurs l'équation de la courbe rapportée à ses axes ωX et ωY est

$$9X^2 - \frac{9}{8}Y^2 - l^2 = 0.$$

Pour qu'un point (x, y) de cette hyperbole soit un point du lieu, il faut que les coordonnées de ce point portées dans les équations (2) rendent p et q positifs; on doit donc avoir

$$x-y+\frac{4l}{3} > 0, \qquad -x+y+\frac{4l}{3} > 0.$$

Construisons les droites Δ et Δ' qui ont pour équations

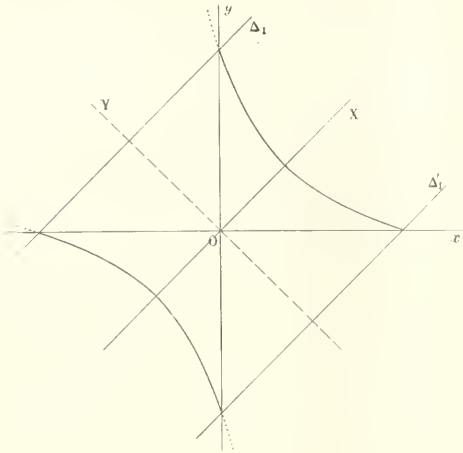
$$x-y+\frac{4l}{3} = 0, \qquad -x+y+\frac{4l}{3} = 0;$$

on voit sans difficulté que les points du lieu sont les points de l'hyperbole qui sont situés entre les droites Δ et Δ'.

5. Les perpendiculaires aux droites O_1O_2 et O_1O_3 en leurs milieux ont respectivement pour équations

$$(q+2\lambda)x+py = p(q+2\lambda), \qquad qx+(p+2\lambda)y = q(p+2\lambda).$$

Les coordonnées du point de rencontre de ces droites, c'est-à-dire du centre du cercle circonscrit au triangle T sont alors



$$x = \frac{p(p+2\lambda)}{2(l+\lambda)}, \qquad y = \frac{q(q+2\lambda)}{2(l+\lambda)}.$$

On en déduit

$$x+y = 2\lambda, \qquad x-y = p-q;$$

comme on a $p+q = 2l$, on en tire

$$p = \frac{x-y+2l}{2},$$

$$q = \frac{-x+y+2l}{2},$$

et

$$(x+y)^2 = 2l^2 + \frac{(x-y)^2}{2}$$

ou

$$(x+y)^2 - \frac{(x-y)^2}{2} = 2l^2.$$

Le lieu est une hyperbole qui a pour axes les bissectrices des axes de coordonnées; son équation réduite est

$$2X^2 - Y^2 - 2l^2 = 0;$$

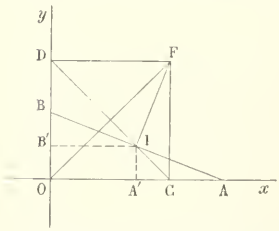
par suite son axe réel a pour longueur $2l$.

La courbe rencontre les axes de coordonnées en quatre points situés à une distance de l'origine égale à $2l$.

Pour qu'un point de cette hyperbole soit un point du lieu, il faut qu'il soit situé entre les droites Δ_1 et Δ'_1 qui ont pour équations

$$-x+y+2l = 0, \qquad x-y+2l = 0.$$

Remarques géométriques. — La somme des distances du point I milieu de AB aux droites Ox et Oy est constante et égale à l, par suite le point I décrit la base CD d'un triangle isocèle dont les côtés OC et OD sont égaux à l.



Le cercle circonscrit au triangle AOB a pour centre le point I; il en résulte que ce cercle passe d'une part par le point fixe O et d'autre part par le point F symétrique de O par rapport à CD.

Les droites FC et FD étant respectivement perpendiculaires à OA et OB, la droite CD est la droite de Simson relative au point F et au triangle AOB; par suite FI est perpendiculaire à AB. On en conclut que la droite AB enveloppe la parabole qui a pour foyer le point F et pour tangente au sommet la droite CD.

V. HIOUX.

Bonnes solutions analytiques par MM. B. Ducassé, conducteur des ponts et chaussées, à Fleurance (Gers); F. Pégorier, collège de Cette; G. Rouzier.

---

630. — *Un point mobile* (x_0, y_0) *décrit la courbe définie par l'équation* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, *par rapport à deux axes rectangulaires.*

1° *Trouver l'enveloppe des hyperboles équilatères passant à l'origine et admettant pour asymptotes les droites* $x = x_0$, $y = y_0$.

2° *Trouver le lieu des sommets de ces hyperboles.*

3° *Trouver l'enveloppe de leurs développées.*

1. L'équation générale des hyperboles équilatères de l'énoncé est $(x - x_0)(y - y_0) = x_0 y_0$,

ou $$xy - y_0 x - x_0 y = 0,$$

avec la relation $x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Nous aurons l'enveloppe de ces hyperboles en éliminant x_0, y_0 entre les deux équations précédentes et l'équation obtenue en égalant les rapports des dérivées partielles par rapport à x_0 et à y_0. Cette dernière équation est $\dfrac{y}{x_0^{-\frac{1}{3}}} = \dfrac{x}{y_0^{-\frac{1}{3}}}$, ou $\dfrac{x_0^{\frac{1}{3}}}{x} = \dfrac{y_0^{\frac{1}{3}}}{y}$. En combinant cette équation avec la relation qui existe entre x_0 et y_0, nous obtenons de suite x_0 et y_0,

$$\frac{x_0^{\frac{1}{3}}}{x} = \frac{y_0^{\frac{1}{3}}}{y} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

il n'y a plus qu'à porter ces valeurs dans l'équation de l'hyperbole pour avoir celle de l'enveloppe. Nous trouvons ainsi $$x^2 + y^2 = a^2,$$

qui représente le cercle passant aux points de rebroussement de l'hypocycloïde.

2. Les axes de l'hyperbole sont les bissectrices des asymptotes ; ils ont donc pour équations

$$x + y - x_0 - y_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad x - y - x_0 + y_0 = 0.$$

Le lieu des sommets situés sur le premier axe, par exemple, s'obtient en éliminant x_0 et y_0 entre l'équation de cet axe, celle de l'hyperbole et la relation qui exprime que (x_0, y_0) est un point de l'hypocycloïde ; les deux premières équations sont linéaires et donnent $x_0 = \dfrac{x^2}{x - y}$, $y_0 = \dfrac{-y^2}{x - y}$.

Le lieu a donc pour équation $x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(x - y)^{\frac{2}{3}}$,

ou, en rendant cette équation rationnelle,

$$[x^4 + y^4 - a^2(x - y)^2]^3 + 27a^2x^4y^4(x - y)^2 = 0.$$

3. L'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes est $X^2 - Y^2 = 2x_0y_0$, et l'on a ici $a^2 = 2x_0y_0$, en appelant comme d'habitude a^2 le carré de la longueur du demi-axe transverse ; dans ce système, l'équation de la développée est $(aX)^{\frac{2}{3}} - (aY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$; or, dans le cas actuel, $c^2 = 2a^2 = 4x_0y_0$; par conséquent, l'équation de la développée est définitivement $X^{\frac{2}{3}} - Y^{\frac{2}{3}} = 4(x_0y_0)^{\frac{2}{3}}$.

Si l'on revient maintenant aux anciens axes, on a

$$X = \frac{x + y - x_0 - y_0}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{-x + y + x_0 - y_0}{\sqrt{2}}.$$

L'équation générale des développées de ces hyperboles est donc

$$(x + y - x_0 - y_0)^{\frac{2}{3}} - (x - y - x_0 + y_0)^{\frac{2}{3}} = 4(x_0y_0\sqrt{2})^{\frac{2}{3}},$$

avec la relation $x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Cette dernière relation peut se remplacer par les deux équations $x_0 = a\cos^3\varphi$, $y_0 = a\sin^3\varphi$; en portant ces valeurs dans l'équation générale des développées, elle devient

$$(x + y - a\cos^3\varphi - a\sin^3\varphi)^{\frac{2}{3}} - (x - y - a\cos^3\varphi + a\sin^3\varphi)^{\frac{2}{3}} = 4.2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi.$$

Il faut maintenant, pour avoir l'équation de l'enveloppe, prendre la dérivée de cette équation par rapport à φ et éliminer φ entre les deux équations. Ce calcul est inabordable.

E.-N. BARISIEN.

PHYSIQUE ET CHIMIE

588. — *Deux ballons de verre contiennent chacun* 5^{gr} *de chlorate de potassium.*

Dans le premier on verse un excès d'acide chlorhydrique concentré; dans le second, un excès d'acide sulfurique concentré.

On les chauffe tous les deux. Les gaz dégagés sont conduits dans un même tube de verre chauffé au rouge sombre; de là, dans un appareil à boules de Liebig contenant une solution de potasse et finalement dans une éprouvette entièrement remplie par du mercure surmonté d'une colonne de lessive de potasse.

Dans cette éprouvette, on fait arriver directement le gaz résultant de la réaction, à chaud, de $45^{gr},388$ *de sulfate ferreux* ($SO^4Fe,7H^2O$) *dissous dans l'eau acidulée par l'acide sulfurique, sur un excès d'acide azotique.*

On demande :

1° *L'augmentation de poids du tube à boules de Liebig;*

2° *L'augmentation de poids de la solution de potasse de l'éprouvette;*

3° *Le volume du gaz restant dans l'éprouvette lorsque les réactions sont achevées.*

On suppose que les réactions sont complètes, qu'elles se font sans explosion, que les pertes sont nulles, les gaz purs et secs et mesurés dans les conditions normales de température et de pression.

$\delta = 0{,}0695$, $H = 1$, $O = 16$, $Cl = 35{,}5$, $S = 32$, $Az = 14$, $K = 39$, $Fe = 56$.

On ne tiendra pas compte de l'air contenu dans les appareils et on supposera que tous les autres gaz les ont traversés.

(*École Centrale, 1896, 2e session.*)

Les deux premières réactions sont représentées respectivement par les équations

$$x[ClO^3K + 6HCl = KCl + 3H^2O + 3Cl^2],$$

$$\frac{1}{3}\,x[3ClO^3K + 2SO^4H^2 = 2SO^4KH + ClO^4K + H^2O + 2ClO^2],$$

le coefficient x étant déterminé par la condition $xClO^3K = 5$, d'où $x = 0{,}0408$.

Le tube chauffé décompose le peroxyde de chlore et il en sort un mélange représenté par la formule

$$(3x + \frac{1}{3}\,x)\,Cl^2 + \frac{2}{3}\,xO^2.$$

Le tube à boules retient le chlore et subit une augmentation de poids

$$(3x + \frac{1}{3}\,x)\,Cl^2 = 9^{gr},656;$$

l'oxygène se rend dans l'éprouvette.

La réaction suivante est représentée par l'équation

$$y[6SO^4Fe + 3SO^4H^2 + 2AzO^3H = 3(SO^4)^3\,Fe^2 + 4H^2O + 2AzO],$$

le coefficient y étant déterminé par la condition

$$6y(SO^4Fe,7H^2O) = 45{,}388, \qquad \text{d'où} \qquad y = 0{,}0272.$$

L'éprouvette reçoit donc des quantités d'oxygène et de bioxyde d'azote représentées respectivement par

$$\frac{2}{3}\,xO^2 \qquad \text{et} \qquad 2yAzO,$$

ou, en remplaçant les coefficients par leur valeur,

$$0{,}0272\,O^2 \qquad \text{et} \qquad 0{,}0544\,AzO.$$

En présence de la potasse, ces deux gaz se transforment en acide azoteux suivant la formule

$$O^2 + 4AzO = 2Az^2O^3,$$

c'est-à-dire que le volume de l'oxygène est le quart de celui du bioxyde.

Or le volume de l'oxygène recueilli est égal à la moitié de celui du bioxyde; tout ce bioxyde et la moitié seulement de l'oxygène entreront donc en combinaison et la potasse de l'éprouvette subira une augmentation de poids égale à

$$0{,}0136\,O^2 + 0{,}0544\,AzO = 2^{gr},0672.$$

L'excès d'oxygène, dont le poids est représenté par $0{,}0136\,O^2$, occupera, dans les conditions normales, un volume

$$0{,}0136 \times 22^{lit}\,\frac{1}{4} = 302^{cc},6.$$

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

ÉCOLE CENTRALE

Deuxième session.

Géométrie analytique.

704. — On donne deux axes quelconques Ox et Oy, un point A $(x = a)$ sur l'axe des x, un point B $(y = b)$ sur l'axe des y et une droite (D), $y - mx = 0$.

1° Former l'équation générale des coniques circonscrites au triangle AOB et telles que le pôle de la droite AB soit sur (D).

2° Démontrer que toutes les coniques ont une tangente commune, qui, avec l'axe des x, l'axe des y et la droite (D), détermine sur AB une division harmonique; et que la droite (D) a un pôle fixe par rapport à toutes les coniques.

3° Démontrer que le lieu des centres de ces coniques est tangent à la droite (D); et que si on fait varier m, il passe par quatre points fixes.

4° Démontrer que la polaire d'un point (α, β) donné, prise par rapport aux coniques du faisceau, passe par un point fixe. Construire ce point et voir comment il se déplace si on fait varier m.

5° Démontrer que le faisceau de coniques correspondant à une valeur donnée de m admet deux paraboles réelles ou imaginaires et chercher le lieu des points de rencontre des tangentes à ces paraboles aux points A et B quand m varie.

(*25 septembre, de 7 h. 1/1 à 11 h. 1/4.*)

Physique et Chimie.

I. — **705.** — Un fil flexible de longueur $2l$ attaché par ses deux bouts à deux points fixes A, B situés dans un plan horizontal à une distance $2d$, est tendu en son milieu par un poids P.

De combien de degrés faut-il élever la température pour que la quantité x dont s'abaisse le poids soit cinq fois plus grande que l'allongement du fil?

$d = 0^m,996$, $l = 1^m$, λ coefficient de dilatation linéaire du fil $= 0{,}000018$.

II. — **706.** — Dans un mémoire, Gauss trouve que le moment magnétique d'un barreau d'acier aimanté, de poids spécifique 7,85, pesant une livre *avoirdupoids* (de $453^{gr},6$), est de 100877000 unités millimètre-milligramme-(masse)-seconde; on demande quelle est, en unités électromagnétiques C.G.S, l'intensité d'aimantation de ce barreau.

III. — **707.** — On dissout dans l'eau 5^{gr} d'un mélange de chlorure de potassium et de chlorure de sodium; à cette liqueur, on ajoute la solution de 15^{gr} d'azotate d'argent pur. Le précipité qui se forme est recueilli sur un

filtre, lavé et séché. Il pèse $10^{gr},156$. Dans le liquide filtré, on plonge une lame de cuivre, et on abandonne l'expérience à elle-même pendant un temps convenable.

On enlève ensuite le dépôt qui recouvre la lame, on la sèche et on la pèse.

On demande : 1° Le poids de chacun des chlorures alcalins existant dans le mélange donné ;

2° La perte de poids de la lame de cuivre.

$Az = 14$, $O = 16$, $Na = 23$, $Cl = 35,5$, $K = 39$, $Cu = 63$, $Ag = 108$.

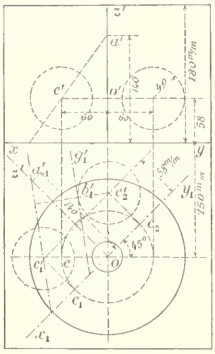
IV. — Quelques mots sur l'Hydroxylamine.

(25 septembre, de 1 h. 1/2 à 4 h. 1/2.)

Épure.

INTERSECTION D'UN TORE ET D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION

708. — Le tore a son axe zz' vertical et placé au milieu de la feuille de l'épure. Le rayon du cercle générateur (c, c') est de 40^{mm}. Le centre de ce cercle décrit une circonférence de centre oo' et de rayon $o'c' = 60^{mm}$. Le point (oo') est à 58^{mm} au-dessus du plan horizontal et à 150^{mm} en avant du plan vertical xy de projection.



Le cylindre de révolution est défini de la manière suivante : Son axe est contenu dans le plan méridien x_1y_1 du tore qui fait 45° avec le plan de front. Cet axe rencontre en a l'axe vertical z du tore (cote du point a 140^{mm}) et il passe par le point $(c_1c'_1)$ centre du cercle générateur du tore. La génératrice est la tangente $g'_1b'_1$ à la deuxième position $c_2c'_2$ du cercle générateur dans le plan méridien x_1y_1.

On demande de déterminer l'intersection des deux surfaces en ayant soin d'indiquer la construction de la tangente en un point de la courbe. Il sera tenu compte de la recherche des points et tangentes remarquables.

On figurera le tore en supprimant de ce corps la portion contenue dans le cylindre.

NOTA. — Les projections auxiliaires seront tracées à l'encre bleue.

Cadre de 27^{cm} sur 45^{cm}. Ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et à 180^{mm} du côté supérieur.

Titre extérieur. — GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Titre intérieur. — TORE ET CYLINDRE.

(26 septembre, de 7 h. 1/4 à 11 h. 1/4.)

Calcul trigonométrique.

709. — Dans le triangle ABC on connaît le rapport p de la longueur BC à la médiane relative à ce côté et le rapport q du côté AC au côté AB.

1° Calculer la tangente du demi-angle aigu x que fait cette médiane avec le côté BC. Conditions de possibilité. — Déduire de la formule trouvée la valeur de l'angle x dans les hypothèses $p = 3$, $q = 1,89572$.

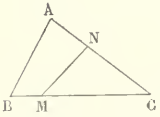
2° Etablir les formules pour le calcul des angles B et C du triangle, et trouver entre les angles B, C, x une relation trigonométrique indépendante des rapports p et q.

(27 septembre, de 2 h. 1/2 à 4 h. 1/2.)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours préparatoires.

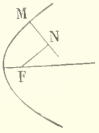
Algèbre.



710. — Etant donné un triangle ABC, le couper par une transversale intérieure MN, de manière à former un triangle et un quadrilatère tels que CMN et ABMN, ayant à la fois même surface et même périmètre.

(Durée : 3 h. 1/2.)

Géométrie analytique.



711. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer F d'une parabole sur les normales MN à cette courbe.

(Durée : 4 heures.)

Épure (feuille 1/4 grand-aigle).

742. — On donne un cône de révolution à axe vertical dont le rayon de base a 50mm et la hauteur 130mm.

Le centre de la base est situé sur le grand axe de la feuille, à 80mm en avant de la ligne de terre qui coïncide avec le petit axe de la feuille.

Dans le plan de front de l'axe on donne un cercle de 25mm de rayon, dont le centre est à 50mm au-dessus du plan horizontal et à 35mm à droite de l'axe du cône.

Par ce cercle passe un cylindre dont les génératrices font sur les deux plans de projection des angles de 45° avec la ligne de terre, ainsi que l'indiquent les flèches ci-contre.

On demande de représenter le cône avec l'entaille qu'y a faite le cylindre supposé enlevé.

On indiquera : 1° la construction d'un point quelconque avec la tangente en ce point ; 2° celle des points sur le contour apparent tant du cône que du cylindre, ce dernier ne figurant que comme ligne de construction.

Nota. — Le contour apparent du cône ainsi que la courbe d'entaille seront dessinés à l'encre noire ; les lignes de construction en rouge, sauf celles relatives à la tangente qui seront en bleu.

(*Durée : 4 heures.*)

Lavis (feuille 1/8 grand-aigle).

On donne un cylindre de 11cm de diamètre et de 16cm de hauteur à laver à l'encre de Chine, à teintes plates ou à teintes fondues.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1896)

ÉCOLE CENTRALE (*Suite*).

Géométrie descriptive (M. Lévy), *Suite.*

585. — On donne les projections de trois points. Déterminer une sphère passant par ces trois points et tangente au plan horizontal. — Même question en remplaçant le plan horizontal par le plan vertical, — par un plan déterminé par la ligne de terre et un point.

586. — On donne le sommet, l'axe et l'angle d'un cône de révolution. Mener à ce cône un plan tangent parallèle à la ligne de terre.

587. — Contour apparent horizontal d'un cône de révolution défini par trois génératrices.

588. — On donne une sphère tangente au plan horizontal, une droite par sa trace horizontale, sa projection horizontale et l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal. Mener par cette droite un plan tangent à la sphère sans prendre de plan vertical.

589. — On donne une hyperbole équilatère dans le plan horizontal. C'est la directrice d'un cylindre dont on donne la direction des génératrices. Section par un plan défini par la ligne de terre et un point.

590. — On prend un cercle dans un plan de front et un axe dans ce plan. Mener au tore ainsi engendré un plan tangent vertical.

591. — On donne un plan par sa ligne de plus grande pente. — On fait tourner une courbe du plan autour d'une droite D. — Contour apparent horizontal de la surface ainsi engendrée.

592. — Ombre d'un tore d'axe vertical éclairé par des rayons lumineux parallèles. — Même problème pour un tore éclairé par un point lumineux.

593. — Plan tangent par une droite à un ellipsoïde à trois axes inégaux.

594. — On considère une ellipse dans le plan horizontal et une droite Δ. Trouver l'intersection de la droite avec l'ellipsoïde engendré par l'ellipse en tournant autour d'un de ses axes, sans prendre le plan vertical.

595. — Une droite s'appuie sur trois droites fixes. Condition pour que l'hyperboloïde engendré soit de révolution.

596. — Montrer que trois cercles horizontaux ayant leurs centres sur une même verticale définissent un hyperboloïde de révolution.

597. — Mener à un hyperboloïde un plan tangent par un point ou parallèlement à une droite donnée, de façon que le point de contact soit sur une génératrice donnée.

598. — Mener à un hyperboloïde de révolution un plan tangent parallèle à une direction donnée et faisant un angle donné avec un plan donné.

599. — Mener par un point à un hyperboloïde de révolution à axe vertical un plan tangent faisant un angle donné avec le plan horizontal.

600. — Mener par un point ou parallèlement à une droite donnée un plan asymptote à un hyperboloïde de révolution.

601. — Intersection d'un hyperboloïde à axe vertical avec une droite de front.

602. — Mener à un hyperboloïde défini par trois droites un plan tangent passant par une droite donnée.

603. — Courbe de contact du cylindre circonscrit à un hyperboloïde parallèlement à une direction donnée. — Même question pour un cône circonscrit. — Condition pour que la courbe de contact soit une hyperbole.

604. — On considère un tétraèdre SABC ; le cercle circonscrit au triangle SBC est la base d'un cône de sommet A et d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à SA. Intersection du cône et du cylindre.

605. — Intersection de deux cônes, ou bien d'un cône et d'un cylindre ayant pour directrice commune un cercle donné.

606. — Intersection de deux cylindres ayant pour directrice commune une hyperbole donnée dans le plan horizontal.

607. — On donne dans le plan horizontal deux cercles tangents à la ligne de terre. Ce sont les directrices de deux cônes dont les sommets sont dans le plan vertical. Intersection de ces deux cônes. — Tangentes au point double.

608. — Intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont verticaux et situés dans un même plan de front. Propriétés de la projection horizontale.

609. — On donne une sphère. — Sur la verticale du point le plus à gauche on prend un point S. C'est le sommet d'un cône dont la directrice est le cercle de contour apparent horizontal de la sphère. — Intersection du cône et de la sphère.

610. — On donne un tore d'axe vertical et un plan de bout. — La section est la directrice d'un cône dont le sommet est sur l'axe du tore. — Intersection du cône et du tore. — Intersection d'un tore d'axe vertical avec une droite quelconque.

611. — On considère deux droites AA', BB' dans un même plan de front. — On fait tourner AA' autour de BB' et on a un cône ; on fait tourner la ligne de terre autour de AA' et on a un hyperboloïde. — Intersection des deux surfaces.

612. — On considère dans le plan vertical un angle et deux ellipses qui lui sont bitangentes. — Intersection des deux surfaces de révolution engendrées par ces ellipses en tournant autour de leurs grands axes respectifs.

613. — On coupe un ellipsoïde de révolution à axe vertical par un plan de bout ; la section obtenue est la directrice d'un cylindre dont on connaît la direction des génératrices. — Construire la trace horizontale de ce cylindre. — Intersection du cylindre et de l'ellipsoïde. — Comment obtient-on les points d'intersection de la directrice du cylindre et de la seconde courbe plane ?

614. — Normale commune à deux surfaces coniques ou cylindriques.

615. — Normale à un cône de révolution par un point donné.

616. — Mener à un hyperboloïde de révolution une normale par un point donné.

QUESTIONS PROPOSÉES

713. — On considère un cercle fixe (C) et un rayon fixe de ce cercle OA ; sur OA se meut un point M. On considère en outre les cercles (Γ) et (Γ') décrits respectivement sur OM et MA comme diamètres.

Trouver le lieu du centre d'un cercle tangent aux trois cercles (C), (Γ) et (Γ') et construire ce lieu.

E. N. Barisien.

714. — On considère les coniques qui admettent pour sommet l'origine et pour foyer un point donné sur Ox.

1° Montrer qu'il y a lieu de distinguer deux séries de coniques répondant à la question, suivant que l'origine est située ou non sur l'axe focal.

2° La première série contient des ellipses, des hyperboles et une parabole. Trouver le lieu des sommets situés sur l'axe non focal.

3° La seconde série ne contient que des ellipses. Trouver le lieu du centre, du second foyer, et du sommet opposé au sommet O. Trouver aussi le lieu des sommets situés sur l'axe focal.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

8e Année N° 3. Décembre 1897.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CONDITIONS POUR QUE DEUX ÉQUATIONS REPRÉSENTENT UNE MÊME COURBE OU UNE MÊME SURFACE

par M. **J. Richard**, professeur au lycée de Tours.

Pour que deux équations à deux ou trois variables représentent une même courbe ou une même surface, il faut et il suffit que les coefficients des termes semblables dans les deux équations soient proportionnels.

La démonstration suivante de cette proposition est loin d'être nouvelle; elle est, je crois, peu connue. Nous la présenterons dans le cas des surfaces.

Considérons deux surfaces ayant pour équations

$$(1) \qquad \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma = 0, \qquad \Sigma B_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma = 0,$$

et cherchons la condition pour qu'elles coïncident. Si elles coïncident, les points où elles sont coupées par la courbe $y = x^p$, $z = x^{p^2}$, coïncident aussi; or les abscisses de ces points sont données par les équations respectives

$$(2) \qquad \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha+p\beta+p^2\gamma} = 0, \qquad \Sigma B_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha+p\beta+p^2\gamma} = 0.$$

Deux termes de la première équation par exemple ne sauraient avoir le même exposant, si p est supérieur au degré de cette équation, car si l'on avait

$$\alpha + p\beta + p^2\gamma = \alpha' + p\beta' + p^2\gamma'$$

cela voudrait dire que les deux nombres qui dans le système de numération de base p s'écrivent $\gamma\beta\alpha$, $\gamma'\beta'\alpha'$ sont égaux; mais alors ils devraient être composés des mêmes chiffres, et l'on devrait avoir $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, ce qui n'est pas puisque les termes considérés proviennent de deux termes distincts de la première équation (1).

Dès lors, pour que les deux équations (2) aient les mêmes racines il faut que les quotients tels que $\frac{A_{\alpha\beta\gamma}}{B_{\alpha\beta\gamma}}$ soient égaux entre eux. Cette condition est donc nécessaire pour que les équations (1) représentent la même surface. Il est bien évident d'ailleurs qu'elle est suffisante.

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE JOACHIMSTAL

par M. **P. Barbarin**, professeur au lycée de Bordeaux.

Soit le triangle de référence ABC; la conique conjuguée

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

coupe le côté BC en deux points particuliers ω, ω' tels que le rapport de leurs distances aux deux autres côtés du triangle est égal à $\pm i$. Ceci posé, *soient les deux coniques*

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$
$$(2) \qquad ayz + bzx + cxy = 0,$$

l'une conjuguée, l'autre circonscrite au triangle : par trois de leurs points communs, et par le point harmoniquement associé du quatrième vis-à-vis de BC, *on peut faire passer une conique renfermant* ω *et* ω'.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de l'un des quatre points communs à (1) et (2); je pose

$$u_1 = \frac{y_1}{x_1}, \qquad v_1 = \frac{z_1}{x_1}$$

et j'ai les égalités

$$A + Bu_1^2 + Cv_1^2 = 0,$$
$$au_1v_1 + bv_1 + cu_1 = 0,$$

qui, associées aux équations (1), (2) transformées par

$$u = \frac{y}{x}, \qquad v = \frac{z}{x},$$

donnent

$$B(u - u_1)(u + u_1) + C(v - v_1)(v + v_1) = 0,$$
$$a[(u - u_1)(v + v_1) + (u + u_1)(v - v_1)] + 2b(v - v_1) + 2c(u - u_1) = 0;$$

d'où, par élimination de $u - u_1$ et $v - v_1$,

$$Ba(u + u_1)^2 - Ca(v + v_1)^2 + 2Bb(u + u_1) - 2Cc(v + v_1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad Ba(xy_1 + yx_1)^2 - Ca(xz_1 + zx_1)^2 + 2Bbx_1(xy_1 + yx_1)x - 2Ccx_1(xz_1 + zx_1)x = 0.$$

L'équation (3) représente une conique passant par les trois autres points de rencontre de (1) et (2) et le point de coordonnées $(-x_1, y_1, z_1)$ qui est bien associé harmoniquement à (x_1, y_1, z_1) par rapport à BC, c'est-à-dire conjugué de ce point par rapport au sommet A et au point où leur droite coupe BC. Ce conjugué est aussi un point de la conique (1).

Une combinaison linéaire convenable des équations (1) et (3) ramènera, par l'égalité des coefficients de y^2 et z^2, cette dernière équation à la forme

$$(4) \qquad \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + x(mx + ny + pz) = 0,$$

sur laquelle le théorème proposé est évident.

Application. — Supposons que (1) soit une conique rapportée à deux diamètres conjugués, et (2) une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles à ces diamètres, et passant par le centre de la précédente; le point $(-x_1, y_1, z_1)$ devient diamétralement opposé à un des quatre points communs à ces courbes. La conique représentée par (4) est une ellipse dont les diamètres conjugués égaux sont parallèles à ceux auxquels (1) est rapportée.

Quand la conique (1) est rapportée à ses axes, (2) est une hyperbole équilatère, et (4) un cercle (Théorème de Joachimstal).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

613. — *Lieu des centres des coniques d'excentricité donnée, tangentes aux trois côtés d'un triangle. Construire le lieu lorsque le triangle est équilatéral.*

Première solution. — Prenons deux axes rectangulaires quelconques et désignons par α, β les coordonnées du centre, par e^2 le carré de l'excentricité et par $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \rho^2 = 0$ l'équation

du cercle concentrique à la conique et doublement tangent à cette courbe aux sommets de l'axe non focal. L'équation de la conique sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\rho^2-e^2[(x-\alpha)\cos\varphi+(y-\beta)\sin\varphi]^2=0.$$

Nous avons à exprimer maintenant que cette conique est tangente à une droite donnée $ux+vy+w=0$. Pour cela nous portons les axes au point (α, β) ; l'équation de la conique devient

$$x^2+y^2-\rho^2-e^2(x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2=0,$$

celle de la droite,

$$ux+vy+w'=0,$$

w' représentant la quantité $u\alpha+v\beta+w$. La condition de contact est alors facile à trouver et s'écrit finalement

$$u^2(1-e^2\sin^2\varphi)+v^2(1-e^2\cos^2\varphi)+2e^2uv\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1-e^2}{\rho^2}(u\alpha+v\beta+w)^2.$$

Posons alors $\frac{1-e^2}{\rho^2}=\lambda$ et désignons par (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) les coordonnées des trois côtés du triangle donné ; nous aurons les trois conditions

$$u_1^2(1-e^2\sin^2\varphi)+v_1^2(1-e^2\cos^2\varphi)+2e^2u_1v_1\sin\varphi\cos\varphi=\lambda(u_1\alpha+v_1\beta+w_1)^2,$$
$$u_2^2(1-e^2\sin^2\varphi)+v_2^2(1-e^2\cos^2\varphi)+2e^2u_2v_2\sin\varphi\cos\varphi=\lambda(u_2\alpha+v_2\beta+w_3)^2,$$
$$u_3^2(1-e^2\sin^2\varphi)+v_3^2(1-e^2\cos^2\varphi)+2e^2u_3v_3\sin\varphi\cos\varphi=\lambda(u_3\alpha+v_3\beta+w_3)^2.$$

Ces trois équations sont résolubles par rapport à $1-e^2\sin^2\varphi$, $1-e^2\cos^2\varphi$, $2e^2\sin\varphi\cos\varphi$, et, en désignant par Δ le déterminant des coefficients de ces inconnues, elles donnent

$$\Delta(1-e^2\sin^2\varphi)=\lambda(\Delta\alpha^2+2a_1\alpha+2a_2\beta+a_3),$$
$$\Delta(1-e^2\cos^2\varphi)=\lambda(\Delta\beta^2+2b_1\alpha+2b_2\beta+b_3),$$
$$\Delta.2e^2\sin\varphi\cos\varphi=\lambda(2\Delta\alpha\beta+2c_1\alpha+2c_2\beta+c_3),$$

a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 désignant ainsi que Δ des quantités constantes.

Appelons $f(\alpha, \beta)$, $g(\alpha, \beta)$, $h(\alpha, \beta)$ les trois coefficients de λ, ou, plus simplement, f, g, h ; si nous ajoutons les deux premières équations, elles nous donnent λ, $\lambda=\frac{\Delta(2-e^2)}{f+g}$; si nous égalons les deux valeurs de $e^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ que nous fournissent immédiatement ces trois équations, nous avons

$$4(\Delta-\lambda f)(\Delta-\lambda g)=\lambda^2h^2.$$

En remplaçant λ par la valeur trouvée dans cette dernière équation, nous avons immédiatement l'équation du lieu

$$(1)\qquad 4(g-f+e^2f)(f-g+e^2g)=(2-e^2)^2h^2.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré.

Dans le cas où le triangle est équilatéral, nous prendrons comme axes l'un des côtés et la hauteur correspondant à ce côté. Si alors nous désignons par $2a$ la longueur d'un côté du triangle, nous aurons pour coordonnées des trois droites,

$u_1=0$, $v_1=1$, $w_1=0$; $u_2=\sqrt{3}$, $v_2=1$, $w_2=-a\sqrt{3}$; $u_3=-\sqrt{3}$, $v_3=1$, $w_3=-a\sqrt{3}$.

Les trois conditions de contact deviennent alors

$$1-e^2\cos^2\varphi=\lambda\beta^2,$$
$$3(1-e^2\sin^2\varphi)+(1-e^2\cos^2\varphi)+2e^2\sqrt{3}\sin\varphi\cos\varphi=\lambda(\alpha\sqrt{3}+\beta-a\sqrt{3})^2,$$
$$3(1-e^2\sin^2\varphi)+(1-e^2\cos^2\varphi)-2e^2\sqrt{3}\sin\varphi\cos\varphi=\lambda(-\alpha\sqrt{3}+\beta-a\sqrt{3})^2;$$

elles donnent immédiatement

$$1-e^2\cos^2\varphi=\lambda\beta^2,$$
$$1-e^2\sin^2\varphi=\lambda\left(\alpha^2+a^2-\frac{2a\beta}{\sqrt{3}}\right),$$
$$e^2\sin\varphi\cos\varphi=\lambda\alpha(\beta-a\sqrt{3})$$

En ajoutant les deux premières, on a

$$2 - e^2 = \lambda\left(\alpha^2 + \beta^2 + a^2 - \frac{2a\beta}{\sqrt{3}}\right),$$

et, en égalant les deux valeurs de $e^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$,

$$(1 - \lambda\beta^2)\left[1 - \lambda\left(\alpha^2 + a^2 - \frac{2a\beta}{\sqrt{3}}\right)\right] = \lambda^2\alpha^2(\beta - a\sqrt{3})^2.$$

L'élimination de λ est alors immédiate et fournit l'équation du lieu,

$$(2) \qquad (1 - e^2)\left(\alpha^2 + \beta^2 + a^2 - \frac{2a\beta}{\sqrt{3}}\right)^2 + (2 - e^2)^2\left(\frac{2a\beta}{\sqrt{3}} - a^2\right)(\beta^2 - 3\alpha^2) = 0.$$

C'est une quartique fermée.

Dans le cas où les coniques sont des hyperboles équilatères, $e^2 = 2$, et le lieu se réduit au cercle imaginaire

$$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2a\beta}{\sqrt{3}} + a^2 = 0.$$

Lorsque e tend vers 1, les coniques deviennent des ellipses ou des hyperboles infiniment aplaties dont l'un des sommets est en un des sommets du triangle équilatéral et dont l'autre sommet décrit le côté opposé; le lieu se réduit alors aux parallèles aux côtés du triangle menées par les milieux de ces côtés.

La construction de la courbe (2) sera donnée dans la seconde solution.

Deuxième solution. — I. Toutes les coniques de même excentricité ont même angle V pour angle des asymptotes; cet angle est réel ou imaginaire suivant que l'excentricité est > 1 ou < 1.

Prenons pour triangle de référence le triangle ABC.

Soit $$F(u, v, w) \equiv 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0$$

l'équation tangentielle d'une conique inscrite au triangle ABC; l'angle des asymptotes de cette conique est donné par la formule $\operatorname{tg} V = \pm \frac{2\sqrt{-\Delta F}}{E}$, dans laquelle

Δ représente le discriminant du premier membre de l'équation tangentielle;

F..... le premier membre de l'équation tangentielle où u, v, w ont été remplacés par $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$;

$E = A + A' + A'' - 2B \cos A - 2B' \cos B - 2B'' \cos C$, $A, A', A'', \ldots$ étant les coefficients de l'équation ponctuelle.

Dans le cas actuel $\Delta = 2bb'b''$, $F = \Sigma 2b \sin B \sin C$,

$$E = -b^2 - b'^2 - b''^2 + 2b'b'' \cos A + 2b''b \cos B + 2bb' \cos C,$$

en sorte que

$$(1) \qquad \operatorname{tg}^2 V = -\frac{16bb'b''(b \sin B \sin C + b' \sin C \sin A + b'' \sin A \sin B)}{(-b^2 - b'^2 - b''^2 + 2b'b'' \cos A + 2b''b \cos B + 2bb' \cos C)^2}.$$

Les coordonnées du centre de la conique sont données par les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} x = b'' \sin B + b' \sin C, \\ y = b \sin C + b'' \sin A, \\ z = b' \sin A + b \sin B. \end{cases}$$

En éliminant b, b', b'' entre les équations (1), (2), nous aurons l'équation du lieu; or des formules (2) nous déduisons

$$b = \frac{1}{2 \sin B \sin C}(y \sin B + z \sin C - x \sin A),$$

$$b' = \frac{1}{2 \sin C \sin A}(x \sin A + z \sin C - y \sin B),$$

$$b'' = \frac{1}{2 \sin A \sin B}(x \sin A + y \sin B - z \sin C);$$

et l'équation du lieu est, après simplifications,

$$\operatorname{tg}^2 V = -\frac{V(x\sin A+y\sin B+z\sin C)(y\sin B+z\sin C-x\sin A)(x\sin A+z\sin C-y\sin B)(x\sin A+y\sin B-z\sin C)}{(x^2\sin 2A+y^2\sin 2B+z^2\sin^2 2B)^2}.$$

Examinons quelques cas particuliers.

Si $V = 90^\circ$, $\operatorname{tg} V = \infty$, donc on aura

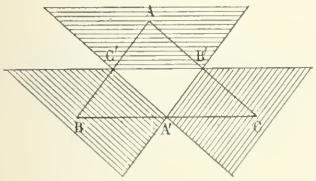
$$x^2 \sin 2A + y^2 \sin 2B + z^2 \sin 2C = 0,$$

équation du cercle conjugué au triangle ABC, résultat bien connu.

Si $V = 0$, $\operatorname{tg} V = 0$, la conique est ou une parabole ou un système de deux points, dont l'un est un sommet, et l'autre est sur le côté opposé; alors le lieu est représenté par la droite de l'infini $x \sin A + y \sin B + z \sin C = 0$, et les trois autres droites

$x \sin A + y \sin B - z \sin C = 0$, $x \sin A + z \sin C - y \sin B = 0$, $x \sin B + z \sin C - x \sin A = 0$,

qui sont les droites joignant les milieux des côtés du triangle ABC, résultat évident par la géométrie.



Dans le cas général, la courbe est une quartique passant par les points cycliques; d'ailleurs le dénominateur de l'équation représente le cercle conjugué au triangle; donc elle passe aussi aux points où le triangle A'B'C' coupe ce cercle.

Si l'excentricité est < 1, $\operatorname{tg}^2 V$ est négatif, la courbe n'a pas de points dans les régions ombrées; si elle est > 1, $\operatorname{tg}^2 V$ est positif, la courbe n'a de points que dans les régions ombrées.

Nous allons supposer le triangle ABC équilatéral.

II. — L'équation de la quartique devient alors

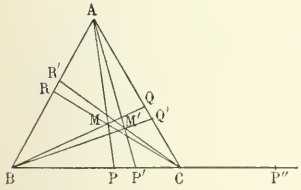
$$\operatorname{tg}^2 V(x^2+y^2+z^2)^2 + 3(-x^4-y^4-z^4+2z^2x^2+2x^2y^2+2y^2z^2) = 0,$$

ou

$$(\operatorname{tg}^2 V - 3)(x^4+y^4+z^4) + 2(\operatorname{tg}^2 V + 3)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) = 0.$$

On voit que si $\operatorname{tg}^2 V > 3$, ce qui revient à dire que l'angle des asymptotes est $> 60^\circ$ et $< 120^\circ$, la courbe n'a pas de points réels, et si $\operatorname{tg}^2 V = 3$, le lieu devient $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = 0$, qui n'a pour points réels que les sommets du triangle. Dans ce cas l'angle des asymptotes est 60° ou 120°, les asymptotes sont deux côtés du triangle; nous retrouverons ces résultats tout à l'heure.

Pour construire la quartique et l'étudier, on peut se servir de la transformation suivante :



Au point $M(x, y, z)$ du plan, faisons correspondre le point $M'(x', y', z')$ déterminé par les relations $\frac{x^2}{x'} = \frac{y^2}{y'} = \frac{z^2}{z'}$; ce point M' est à l'intérieur du triangle.

Inversement, au point M' situé à l'intérieur du triangle correspondent quatre points dont un seul, M, est dans le triangle; ces points se construisent facilement par la règle et le compas.

Soit en effet M' un point; joignons AM'; le rapport $\frac{BP'}{CP'}$ est égal à $\frac{z'}{y'}$. Soit P'' le conjugué harmonique de P' par rapport à (B, C); sur BC comme diamètre décrivons une circonférence, et menons la tangente P''T à cette circonférence; en rabattant P''T sur BC, nous aurons le point P tel que $\frac{BP}{PC} = \sqrt{\frac{z'}{y'}}$; donc $\frac{z^2}{z'} = \frac{y^2}{y'}$; en opérant de même sur le côté AC, on aura la droite BQ, et par suite le point M intérieur au triangle; les autres points s'obtiennent en prenant les conjugués harmoniques de M par rapport aux points (A, P), (B, Q), (C, R).

A un point d'un côté du triangle correspondent deux points de ce côté ;

A un sommet correspond le même sommet ; aux tangentes à une courbe issues d'un sommet correspondent quatre tangentes à la transformée issue du même sommet ;

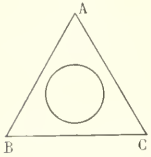
A la quartique correspond le cercle

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)(\mathrm{tg}^2 V - 3) + 2(x'y' + y'z' + z'x')(\mathrm{tg}^2 V + 3) = 0,$$

dont le centre est le centre du triangle, et dont le rayon est $\frac{h}{3}\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 V}$, ($h$ hauteur du triangle).

Ce cercle est toujours réel, car $1 + \mathrm{tg}^2 V$ est toujours positif, quelle que soit l'excentricité ; la forme de la quartique dépend de la grandeur de ce cercle.

Nous distinguerons plusieurs cas.



1° $\mathrm{Tg}^2 V < 0$. — L'excentricité est < 1, les coniques inscrites sont des ellipses ; $1 + \mathrm{tg}^2 V$ est positif ou nul, mais jamais négatif ; le rayon $\frac{h}{3}\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 V}$ est $< \frac{h}{3}$ ou nul, donc le cercle ne coupe pas les côtés du triangle.

Si $\mathrm{tg}^2 V = -1$, le cercle se réduit à son centre ; par suite on a quatre points, centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle, résultat évident *a*

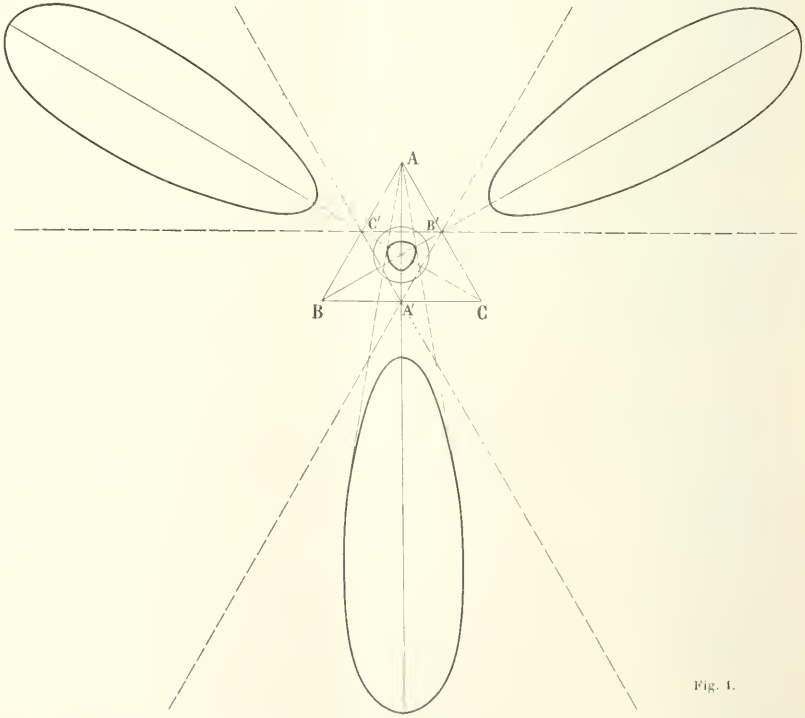


Fig. 1.

priori, car si $\mathrm{tg}^2 V = -1$, $\mathrm{tg}\, V = \pm i$, les coniques sont les cercles inscrit et exinscrits au triangle.

Si $\operatorname{tg}^2 V > -1$, les coniques sont des ellipses, et le cercle est tout entier à l'intérieur du triangle ; à tout point du cercle correspondent quatre points de la courbe ;

La courbe est représentée par la figure 1 ci-dessus.

2° $\operatorname{Tg}^2 V > 0$. — L'excentricité est > 1, les coniques sont des hyperboles ;

$1 + \operatorname{tg}^2 V$ est > 1, donc $\frac{h}{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 V}$ est $> \frac{h}{3}$; par suite le cercle coupe les côtés du triangle.

Si $\frac{h}{3}\sqrt{6+\operatorname{tg}^2 V} > \frac{2h}{3}$, c'est-à-dire si $\operatorname{tg}^2 V > 3$, ou si V est compris entre 60° et 120°, le cercle est extérieur au triangle ; donc il n'y a pas de lieu, résultat déjà trouvé.

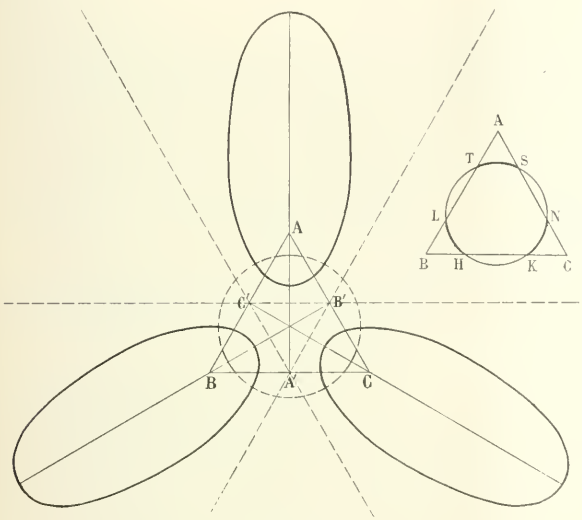


Fig. 2

Si $\frac{h}{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 V} = \frac{2h}{3}$, V = 60° ou 120°, le cercle est le cercle circonscrit au triangle ; on obtient les sommets comme points du lieu ; dans ce cas les coniques ont pour centre un sommet et pour asymptotes les deux côtés issus de ce sommet.

Si $\frac{h}{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 V} < \frac{2h}{3}$, V est $< 60°$ ou $> 120°$, le cercle coupe les côtés du triangle, en six points, auxquels correspondent 12 points de la courbe ; aux points des arcs TS, NK, LH correspondent des points du lieu.

La courbe est représentée par la figure 2.

3° $\operatorname{Tg}^2 V = 0$. — Le cercle est alors tangent au triangle ABC ; à ce cercle correspondent comme on l'a vu la droite de l'infini et les droites A'B', B'C', C'A'.

P. PUIG.

Solution tout à fait différente, mais très bonne de M. E. Barré, à Valenciennes.

---

627. — *On considère tous les cercles passant par un point* A *et tangents à une droite donnée* D ; *on associe ces cercles deux à deux de façon qu'ils soient orthogonaux et on demande :*

1° *L'enveloppe de la ligne des centres des deux cercles ;*

2° *Le lieu du second point commun à ces cercles ;*

3° *Le lieu du centre de similitude qui n'est pas situé sur la droite* D ;

4° *Le lieu du point de contact de chacun de ces cercles avec la seconde tangente commune associée à* D.

Prenons pour axes une parallèle à la droite D menée par le point A et une perpendiculaire à D

passant par ce point et désignons par $y - a = 0$ l'équation de la droite D. L'équation de l'un des cercles du système est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0,$$

avec la condition $\alpha^2 = a^2 - 2a\beta$, qui exprime que le cercle touche la droite D ; par conséquent l'équation générale des cercles du système est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\,\frac{a^2 - \alpha^2}{2a}\,y = 0.$$

La condition pour que deux d'entre eux soient orthogonaux est $\alpha\alpha' + \dfrac{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \alpha'^2)}{4a^2} = 0$,

ou
$$(\alpha\alpha' + a^2)^2 - a^2(\alpha - \alpha')^2 = 0\,;$$

elle se décompose en deux :

$$\alpha\alpha' + a^2 - a(\alpha - \alpha') = 0,$$
$$\alpha\alpha' + a^2 + a(\alpha - \alpha') = 0.$$

et l'on passe de l'une à l'autre en échangeant entre eux α et α', c'est-à-dire en échangeant entre eux les deux cercles ; il suffit donc de considérer l'une d'elles, par exemple, la première.

On en déduit $\alpha' = \dfrac{a(\alpha - a)}{\alpha + a}$ et l'on a ainsi les deux cercles associés.

1. La ligne des centres des deux cercles a pour équation

$$\frac{x - \alpha}{\alpha' - \alpha} = \frac{y - \beta}{\beta' - \beta}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x - \alpha}{\alpha' - \alpha} = \frac{2a(y - \beta)}{\alpha^2 - \alpha'^2},$$

ou enfin
$$x - \alpha + \frac{2a(y - \beta)}{\alpha + \alpha'} = 0\,;$$

si l'on forme $\alpha + \alpha'$ et que l'on remplace β par $\dfrac{a^2 - \alpha^2}{2a}$, on obtient l'équation de la ligne des centres en fonction du seul paramètre α,

$$(\alpha^2 + 2a\alpha - a^2)x + 2a(\alpha + a)y - a(\alpha^2 + a^2) = 0.$$

L'enveloppe est alors immédiate : on trouve son équation en exprimant que l'équation précédente, regardée comme étant du second degré en α, a une racine double. Cela donne

(1) $$2(x^2 + y^2) - (y - a)^2 = 0,$$

équation d'une ellipse ayant pour foyer l'origine et pour directrice correspondante la droite D.

2. Le lieu du second point de rencontre des deux cercles est l'homothétique du lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la ligne des centres, le rapport d'homothétie étant égal à 2. Or ce lieu s'obtient en éliminant α entre les deux équations

$$(\alpha^2 + 2a\alpha - a^2)x + 2a(\alpha + a)y - a(\alpha^2 + a^2) = 0,$$
$$2a(\alpha + a)x - (\alpha^2 + 2a\alpha - a^2)y = 0\,;$$

à cet effet posons $\alpha + a = a\lambda$, nous aurons les deux équations du second degré en λ

$$\lambda^2(x - a) + 2\lambda(y + a) - 2(x + a) = 0,$$
$$\lambda^2 y - 2\lambda x - 2y = 0\,;$$

le résultant de ces deux équations se décompose en $x^2 + y^2 = 0$ et $x^2 + y^2 + 2ay - a^2 = 0$. Le lieu demandé se dédouble donc en

(2) $$x^2 + y^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 + 4ay - 4a^2 = 0.$$

Le premier de ces lieux est un lieu exceptionnel qui correspond aux cercles du système ayant pour centres les points d'abscisses $\pm ai$; chacun de ces cercles se réduit à deux droites isotropes dont l'une passe à l'origine et il coïncide avec son associé ; par suite, tous les points de cette droite isotrope

sont improprement des points du lieu. Le véritable lieu est un cercle, le cercle représenté par la seconde équation.

Les deux premières parties du problème peuvent se traiter par la géométrie, soit en transformant la figure par inversion, le centre d'inversion étant placé au point A, soit directement. La seconde méthode est aussi claire et rapide que la première. Il est évident d'abord que le lieu des centres des cercles du système est une parabole ayant pour foyer le point A et pour directrice la droite D. La ligne des centres de deux cercles associés est alors une corde de cette parabole vue du point A sous un angle droit; elle enveloppe donc une conique ayant pour foyer le point A et pour directrice la droite D. La podaire de cette conique par rapport au point A est un cercle; il en est donc de même du lieu du second point de rencontre des deux cercles, qui est homothétique de cette podaire et dans le rapport 2.

3. L'un des centres de similitude est sur la droite D : c'est le point de rencontre de cette droite avec la ligne des centres. L'autre est le conjugué harmonique de celui-ci par rapport aux deux centres; il est donc à l'intersection de la ligne des centres avec la polaire du premier point par rapport à la parabole lieu des centres. Or ce premier point a pour coordonnées $y = a$, $x = a\dfrac{\alpha^2 - 2a\alpha - a^2}{\alpha^2 + 2a\alpha - a^2}$; d'autre part, la parabole a pour foyer l'origine; par conséquent la polaire du point précédent, qui est sur la directrice, est la perpendiculaire menée par l'origine au rayon qui joint l'origine à ce point; elle a donc pour équation

$$(\alpha^2 - 2a\alpha - a^2)x + (\alpha^2 + 2a\alpha - a^2)y = 0.$$

Nous sommes donc conduits à éliminer α entre cette équation et l'équation de la ligne des centres; or ces deux équations, ordonnées par rapport à α, s'écrivent

$$\alpha^2(x + y) + 2a\alpha(y - x) - a^2(x + y) = 0,$$
$$\alpha^2(x - a) + 2a\alpha(y + x) - a^2(x - 2y + a) = 0,$$

et nous donnent immédiatement

$$\frac{\alpha^2}{(x+y)^2 - (y-x)(x-2y+a)} = \frac{2a\alpha}{(x+y)(x-2y+a-x+a)} = \frac{a^2}{(x+y)^2 - (x-a)(y-x)},$$

ou

$$\frac{\alpha^2}{2x^2 + 3y^2 - xy + ax - ay} = \frac{2a\alpha}{2(x+y)(a-y)} = \frac{a^2}{2x^2 + y^2 + xy - ax + ay}.$$

Le résultant en découle et l'équation du lieu est

$$(2x^2 + 3y^2 - xy + ax - ay)(2x^2 + y^2 + xy - ax + ay) - (x+y)^2(a-y)^2 = 0,$$

ou, toutes réductions faites,

$$2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + 2ay(x^2 + y^2) - a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

(3) $$x^2 + y^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2x^2 + y^2 + 2ay - a^2 = 0;$$

la première représente le couple isotrope, la seconde une ellipse qui est le véritable lieu. Cette ellipse est l'enveloppe trouvée pour la ligne des centres; cela nous montre que la ligne des centres touche son enveloppe au centre de similitude inverse des deux cercles.

4. Pour avoir le lieu du point de contact du cercle du système avec la seconde tangente commune au couple de cercles et associée à D, désignons les coordonnées de ce point par x et y et exprimons que le milieu des deux points de contact est sur la ligne des centres et que la droite qui les unit est

perpendiculaire à cette droite ; nous aurons les deux équations

$$(\alpha^2 + 2a\alpha - a^2)(x + \alpha) + 2a(\alpha + a)(y + a) - 2a(\alpha^2 + a^2) = 0, \qquad \frac{x - \alpha}{\alpha^2 + 2a\alpha - a^2} = \frac{y - a}{2a(\alpha + a)}.$$

Ces deux équations se résolvent facilement par rapport à x et y et donnent les coordonnées d'un point courant du lieu en fonction de α. Nous obtenons ainsi

$$\frac{x - \alpha}{\alpha^2 + 2a\alpha - a^2} = \frac{y - a}{2a(\alpha + a)} = -\frac{2(\alpha + a)(\alpha^2 + a^2)}{(\alpha^2 + a^2)^2 + 4a(\alpha + a)(\alpha^2 + a^2)},$$

ou, après suppression du facteur $\alpha^2 + a^2$, commun au numérateur et au dénominateur,

$$\frac{x - \alpha}{\alpha^2 + 2a\alpha - a^2} = \frac{y - a}{2a(\alpha + a)} = -\frac{2(\alpha + a)}{\alpha^2 + a^2 + 4a(\alpha + a)}.$$

Changeons maintenant de paramètre : posons $\alpha = a(t - 2)$, nous aurons finalement pour valeurs de x et de y,

$$x = -a\,\frac{t^3 - 4t^2 + t + 4}{t^2 + 1}, \qquad y = a - \frac{4a(t - 1)^2}{t^2 + 1};$$

si nous portons les axes parallèlement à eux-mêmes au point dont les coordonnées sont $x = 4a$ et $y = -3a$, nous obtiendrons les équations plus simples,

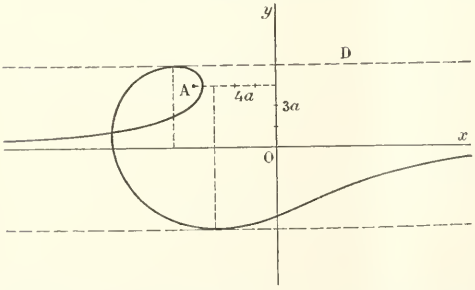
$$(4) \qquad x = -at - \frac{8a}{t^2 + 1}, \qquad y = \frac{8at}{t^2 + 1}.$$

Ce sont les équations du lieu en fonction d'un paramètre t. Elles nous montrent de suite que le lieu est du 3e ordre.

Les dérivées de x et de y sont $\quad x' = -a + \dfrac{16at}{(t^2 + 1)^2}, \qquad y' = 8a\,\dfrac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}.$

La seconde n'est positive qu'entre -1 et $+1$; la première, entre deux nombres t_1 et t_2 compris entre 0 et 1, puis entre 2 et 3. De $-\infty$ à -1, les deux fonctions sont décroissantes : x décroît de $+\infty$ à $-3a$, y, de 0 à $-4a$. De -1 à t_1, x continue à décroître, y croît ; en particulier pour $t = 0$, $x = -8a$, $y = 0$. De t_1 à $+1$, x et y croissent tous deux ; pour $t = 1$, $x = -5a$, $y = 4a$.

De 1 à t_2, x continue à croître, y décroît. Enfin, de t_2 à $+\infty$, x et y décroissent tous les deux : x, jusqu'à $-\infty$, et y, jusqu'à 0.



La forme de la courbe est dès lors évidente.

Nous avons vu au début que si l'on échange α et α' on passe de l'une des conditions à l'autre ; mais cela se fait aussi en changeant les signes de α et de α', c'est-à-dire en changeant x en $-x$ dans les équations des deux cercles, et l'on trouve ainsi les cercles symétriques des précédents par rapport à Oy. Par conséquent au lieu de chercher le lieu du point de contact avec le second cercle, on peut prendre la figure symétrique de la précédente par rapport à Oy et chercher ensuite le lieu du point de contact du premier cercle avec la seconde tangente commune. On trouve ainsi évidemment une cubique symétrique de la précédente par rapport à Oy.

M. Vassier nous a envoyé une excellente solution analytique et aussi une excellente solution géométrique de cette question. La solution géométrique est complète et il montre, en particulier, que le dernier lieu est une transformée par rayons vecteurs

réciproques d'un limaçon de Pascal, le centre d'inversion étant un point du limaçon (c'est d'ailleurs le point A) ; il en déduit alors que ce lieu est une cubique circulaire unicursale.

Bonne solution : M. E. N. Barisien.

M. Barré (Valenciennes) a envoyé une bonne solution géométrique des trois premières parties.

---

636. — *On considère deux coniques fixes* C *et* C′ *et une autre conique* S *doublement tangente à chacune d'elles ; puis, une conique variable* Σ *doublement tangente aussi à* C *et* C′. *On demande de trouver l'enveloppe des cordes communes à* S *et à* Σ.

Prenons pour triangle de référence, le triangle $\alpha\beta\gamma$ conjugué commun à C et C′ ; alors les systèmes de sécantes communes à C et C′, ont pour centres respectifs les sommets de ce triangle, et forment avec les côtés correspondants des faisceaux harmoniques. Nous pouvons toujours supposer que ces systèmes de sécantes ont respectivement pour équations :

$$\begin{cases} y - z = 0, \\ y + z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z - x = 0, \\ z + x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Cela étant, les coniques C et C′ ont des équations de la forme :

$$\text{(C)} \qquad y^2 - z^2 + a^2(z^2 - x^2) = 0,$$
$$\text{(C′)} \qquad y^2 - z^2 + b^2(z^2 - x^2) = 0.$$

On sait qu'il y a trois systèmes de coniques doublement tangentes à C et à C′, systèmes qui sont fournis par les trois racines de l'équation en λ, qui sont ici en évidence.

En appliquant le résultat connu, on trouve pour équations des coniques de deux systèmes différents :

$$(1) \qquad 4\lambda[y^2 - z^2 + a^2(z^2 - x^2)] = [\lambda(a+b)(z+x) + (a-b)(z-x)]^2,$$
$$(2) \qquad 4b^2\mu[y^2 - z^2 + a^2(z^2 - x^2)] = [\mu(a+b)(y+z) - (a-b)(y-z)]^2.$$

La forme de ces équations montre du reste que ces coniques sont bien bitangentes à C ; en les écrivant sous les formes respectivement identiques :

$$(1)' \qquad 4\lambda[y^2 - z^2 + b^2(z^2 - x^2)] = [\lambda(a+b)(z+x) - (a-b)(z-x)]^2,$$
$$(2)' \qquad 4a^2\mu[y^2 - z^2 + b^2(z^2 - x^2)] = [\mu(a+b)(y+z) + (a-b)(y-z)]^2,$$

on voit que chacune d'elles est aussi bitangente à C′.

Cela posé, nous aurons deux cas à distinguer suivant que S et Σ appartiennent, ou non, au même système de coniques bitangentes à C et C′.

1° S et Σ appartiennent au même système. Nous pouvons toujours supposer que S appartienne au système (1). Les équations de S et Σ sont alors

$$\text{(S)} \qquad 4m[y^2 - z^2 + a^2(z^2 - x^2)] = [m(a+b)(z+x) + (a-b)(z-x)]^2,$$
$$(\Sigma) \qquad 4\lambda[y^2 - z^2 + a^2(z^2 - x^2)] = [\lambda(a+b)(z+x) + (a-b)(z-x)]^2,$$

m étant donné, λ, variable.

On aperçoit de suite un système de sécantes communes à S et Σ ; il a pour équation

$$\lambda[m(a+b)(z+x) + (a-b)(z-x)]^2 = m[\lambda(a+b)(z+x) + (a-b)(z-x)]^2.$$

On voit que ces sécantes se coupent au sommet β du triangle de référence, qui constitue par suite leur enveloppe. D'ailleurs les coefficients de z^2 et x^2 dans cette équation sont égaux, ce qui montre que ces sécantes sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites

$$z^2 - x^2 = 0,$$

c'est-à-dire, par rapport aux sécantes communes aux deux coniques C et C, de centre β.

Nous exprimerons alors qu'une droite MN d'équation

$$(3) \qquad ux + vy + wz = 0$$

ne passant plus par β, est sécante commune à S et Σ en exprimant que le faisceau des droites βM, βN est conjugué harmonique, par rapport aux droites $z^2 - x^2 = 0$. L'équation de ce faisceau s'obtient en éliminant y entre (S) et (3), ce qui donne :

$$4m\left[\frac{(ux + wz)^2}{v^2} - z^2 + a^2(z^2 - x^2)\right] = [m(a + b)(z + x) + (a - b)(z - x)]^2.$$

Pour écrire que ce faisceau est conjugué par rapport à $z^2 - x^2 = 0$, il suffit d'écrire que, dans cette équation, les coefficients de x^2 et z^2 sont égaux ce qui donne

$$4m\left(\frac{u^2}{v^2} - a^2\right) - [m(a + b) - (a - b)]^2 = 4m\left(\frac{w^2}{v^2} - 1 + a^2\right) - [m(a + b) + (a - b)]^2,$$

ou, en divisant par $4m$,

$$u^2 - (a^2 + b^2 - 1)v^2 - w^2 = 0.$$

Telle est l'équation tangentielle de l'enveloppe des sécantes communes à S et Σ ne passant pas par β. C'est une conique conjuguée au triangle de référence et qui a pour équation ponctuelle

$$x^2 - \frac{y^2}{a^2 + b^2 - 1} - z^2 = 0.$$

On voit que cette équation ne dépend pas de m, c'est-à-dire de la conique S. La conique que nous venons de déterminer, jointe au point β constitue donc l'enveloppe demandée, dans le premier cas que nous étudions.

2° Supposons que S et Σ soient de systèmes différents. S sera toujours la même conique que tout à l'heure et Σ appartiendra, par exemple, au système (2). Les enveloppes que nous allons trouver auront leurs analogues si, au lieu de supposer que Σ appartienne au système (2), nous supposons qu'il appartienne au 3e système de coniques bitangentes à C et C', système dont nous n'avons pas écrit l'équation générale. Du résultat que nous allons trouver, on déduirait par une analogie évidente, le résultat où, S étant toujours la même, Σ appartiendrait au 3e système : nous n'y reviendrons pas.

Soient alors

$$(S) \qquad 4m[y^2 - z^2 + a^2(z^2 - x^2)] = [m(a + b)(z + x) + (a - b)(z - x)]^2,$$

$$(\Sigma) \qquad 4b^2\mu[y^2 - z^2 + a^2(z^2 - x^2)] = [\mu(a + b)(y + z) - (a - b)(y - z)]^2,$$

μ étant variable. Nous avons de suite un système de sécantes, d'équation

$$m[\mu(a + b)(y + z) - (a - b)(y - z)]^2 - b^2\mu[m(a + b)(z + x) + (a - b)(z - x)]^2 = 0,$$

ou, en extrayant les racines carrées,

$$\sqrt{m}\,(a + b)(y + z)\mu \pm b\sqrt{m}(a + b)(z + x) + (a - b)(z - x)]\sqrt{\mu} - \sqrt{m}\,(a - b)(y - z) = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe des sécantes de ce système, en écrivant que cette équation du second degré en $\sqrt{\mu}$ a une racine double, ce qui donne :

$$(\Gamma) \qquad b^2[m(a + b)(z + x) + (a - b)(z - x)]^2 + 4m(a^2 - b^2)(y^2 - z^2) = 0.$$

Cette conique Γ est donc une portion de l'enveloppe des cordes communes à S et Σ. Remarquons de plus que le centre du système, que nous venons de considérer, est donné par l'intersection des deux droites

$$(D_1) \qquad m(a + b)(z + x) + (a - b)(z - x) = 0,$$

$$(\Delta_1) \qquad \mu(a + b)(y + z) - (a - b)(y - z) = 0.$$

Ce sont les cordes de contact respectives de S et Σ avec C, la première est fixe, la deuxième variable.

En prenant maintenant pour équations de S et Σ, les formes équivalentes (1)' et (2)', nous aurons, comme précédemment, l'équation d'un deuxième système de sécantes communes à ces deux coniques.

C'est $$m[\mu(a+b)(y+z)+(a-b)(y-z)]^2-a^2[\mu m(a+b)(z+x)-(a-b)(z-x)]^2=0.$$

En opérant comme tout à l'heure, on trouve pour enveloppe des cordes de ce système

$$(\Gamma') \qquad a^2[m(a+b)(z+x)-(a-b)(z-x)]^2-4m(a^2-b^2)(y^2-z^2)=0.$$

Comme précédemment, nous remarquons que le centre de ce système est donné par l'intersection des deux droites

$$(D_2) \qquad m(a+b)(z+x)-(a-b)(z-x)=0,$$

$$(\Delta_2) \qquad \mu(a+b)(y+z)+(a-b)(y-z)=0.$$

Ce sont les cordes de contact respectives de S et Σ avec la conique C'. Remarquons, et cela nous servira dans la suite que Δ_1 et Δ_2, droites variables avec μ, sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites fixes $y^2-z^2=0$, qui constituent les sécantes communes à C et C' de centre z. Ces sécantes, appelons-les δ, δ'.

Maintenant que nous connaissons deux systèmes de sécantes communes à S et Σ, il serait facile de déterminer le troisième, afin d'avoir l'enveloppe des sécantes de ce système. Avec les équations actuelles, le calcul est compliqué. Pour le simplifier, nous allons d'abord faire des remarques sur les coniques Γ et Γ', trouvées précédemment comme constituant l'enveloppe des sécantes de deux systèmes de S et Σ.

L'équation de Γ montre immédiatement que cette conique est bitangente au système des deux droites δ, δ', la corde de contact étant D_1. D'autre part, Γ peut s'écrire

$$b^2[m(a+b)(z+x)-(a-b)(z-x)]^2+4m(a^2-b^2)(y^2-z^2+b^2(z^2-x^2))=0,$$

ce qui montre que Γ est bitangente à C', la corde de contact étant D_2. En vertu de la position de S, on voit que Γ est bitangente à S, la corde de contact étant D_2. Ces conditions déterminent complètement Γ.

De même on voit que Γ' est bitangente au système de deux droites δ, δ', la corde de contact étant D_2, et est aussi bitangente à S, la corde de contact étant D_1.

Pour achever la question, prenons pour nouveau triangle de référence, le triangle formé par δ, δ' et D_1 (D_1 étant $Z=0$). Soit alors $pX+qY+rZ=0$ l'équation de D_2. Dans ce nouveau système, Γ et Γ' ont des équations de la forme

$$(\Gamma) \qquad 2XY-Z^2=0,$$

$$(\Gamma') \qquad 2XY-(pX+qY+rZ)^2=0;$$

S doit être bitangente à Γ, la corde de contact étant D_2, ainsi qu'à Γ', la corde de contact étant D_1; son équation est donc

$$(S) \qquad 2XY-Z^2+(pX+qY+rZ)^2=0.$$

Le centre O du système de sécantes, qui nous a donné Γ, est sur la droite D_1; soient x_1, y_1, 0 ses coordonnées. L'équation de ce système de sécantes sera l'équation du faisceau des tangentes, issues de O à la conique Γ. Ce faisceau a, de suite, pour équation

$$(4) \qquad (x_1Y-y_1X)^2+2x_1y_1Z^2=0.$$

Le centre O' du système de sécantes qui nous a donné Γ' est sur la droite D_2; comme les droites qui joignent O et O' au point de rencontre de δ et δ' forment un faisceau harmonique par rapport à ces droites (c'est la remarque faite précédemment sur les droites Δ_1, Δ_2), nous pourrons représenter les coordonnées de O' par

$$x_1, \qquad -y_1, \qquad z_1 \qquad \text{avec} \qquad px_1-qy_1+rz_1=0.$$

Nous aurons l'équation du second système de sécantes en formant l'équation du système des tangentes issues de O' à Γ', qui en vertu de la condition $px_1-qy_1+rz_1=0$ s'écrit

$$(5) \qquad (x_1Y+y_1X)^2+2x_1y_1(pX+qY+rZ)^2=0.$$

Comme vérification, si on retranche (4) de (5) et qu'on divise par $2x_1y_1$, on retrouve l'équation de S, ce qui montre que (4) et (5) coupent S aux mêmes points. Le troisième système de sécantes se compose du troisième couple de droites, autres que (4) et (5), passant par ces points. Pour le trouver, décomposons (4) et (5) en deux autres et, pour éviter les radicaux, posons $y_1 = -2m^2x_1$, m étant une quantité que nous ferons varier. Les équations (4) et (5) se décomposent respectivement en

$$(4)' \qquad \begin{cases} Y + 2m^2X = 2mZ, \\ Y + 2m^2X = -2mZ, \end{cases}$$

$$(5)' \qquad \begin{cases} Y - 2m^2X = 2m(pX + qY + rZ), \\ Y - 2m^2X = -2m(pX + qY + rZ). \end{cases}$$

Désignons par P le point de rencontre des premières droites (4)′ et (5)′, par Q celui des secondes, par R le point de rencontre de la première droite (4)′ avec la deuxième droite (5)′ et enfin par S le point de rencontre de la deuxième droite (4)′ avec la première droite (5)′. Il s'agit de former les équations de PQ et RS. Deux droites passant respectivement par P et Q ont pour équations

$$\lambda(Y + 2m^2X - 2mZ) + Y - 2m^2X - 2m(pX + qY + rZ) = 0,$$
$$\mu(Y + 2m^2X + 2mZ) + Y - 2m^2X + 2m(pX + qY + rZ) = 0.$$

En les identifiant, on aura l'équation de PQ. Cela donne

$$\frac{m\lambda - m - p}{m\lambda - m + p} = \frac{\lambda + 1 - 2qm}{\mu + 1 + 2qm} = \frac{\lambda + r}{-\mu - r} = \frac{2m + p - 2qm^2}{2m - p + 2qm^2} = \frac{2\lambda + r + 1 - 2qm}{1 - r + 2qm}.$$

Les deux derniers rapports sont une combinaison finale des trois premiers. Ils donnent

$$\frac{\lambda + 1}{\lambda - r + 2qm} = \frac{2m}{2m - p + 2qm^2},$$

d'où

$$\lambda = \frac{p + 2qm^2 - 2mr}{-p + 2qm^2 + 2m}.$$

En remplaçant λ par sa valeur, nous aurons l'équation de PQ

$$(p + 2qm^2 - 2mr)(Y + 2m^2X - 2mZ) + (2m - p + 2qm^2)[Y - 2m^2X - 2m(pX + qY + rZ)] = 0.$$

En réduisant, on voit que les coefficients de X, Y, Z contiennent $2m$ en facteur ; en divisant par $2m$, l'équation de PQ s'écrit

$$(6) \qquad p^2X + (pq + 1 - r)Y + p(r - 1)Z - 2m^2[(pq + r + 1)X + q^2Y + q(r + 1)Z] = 0.$$

Un calcul analogue nous donne pour équation de RS

$$(7) \qquad p^2x + (pq + 1 + r)Y + p(r + 1)Z - 2m^2[(pq + r - 1)X + q^2Y + q(r - 1)Z] = 0.$$

Les équations (6) et (7) contiennent chacune le paramètre m^2 au premier degré ce qui nous montre que nos droites PQ, RS passent respectivement chacune par un point fixe. Ces deux points fixes I, I′ constituent la portion de l'enveloppe qu'il nous restait à déterminer.

En donnant à Δ_1 et Δ_2 des positions limites, nous aurons facilement ces points fixes. En effet donnons à Δ_1 la position δ, Δ_2 coïncide aussi avec δ, les droites PQ et RS deviennent respectivement les tangentes à S aux points où elle est coupée par δ. En donnant à Δ_1 et Δ_2 la position δ', on voit que les points I et I′ sont à l'intersection des tangentes à S en ses points de rencontre avec δ et δ'. D'ailleurs, on vérifie facilement que les droites mises en évidence dans (6) et (7), sont précisément ces tangentes. Il n'y a aucune difficulté à les associer ; ces tangentes se coupent bien aux points I et I′ ; mais elles se coupent aussi en deux autres points. Cependant il n'y a pas d'ambiguïté ; car, si on prend l'intersection de $p^2X + (pq + 1 - r)Y + p(r - 1)Z = 0$, par exemple avec $(pq + r - 1)X + q^2Y + q(r - 1)Z = 0$, on obtient, en éliminant Z, $pX - qY = 0$;

ce qui montre que ces deux droites se coupent sur la conjuguée harmonique de $pX + qY = 0$ par rapport à δ et δ'. Cette droite $pX + qY = 0$ est la droite qui joint le point de rencontre de δ et δ' au point de rencontre de D_1 et D_2. C'est donc la droite $\alpha\beta$ du triangle de référence primitif. Sa conjuguée est donc la conjuguée de $\alpha\beta$ par rapport à $\delta\delta'$, c'est-à-dire la droite $\alpha\gamma$. Donc parmi les quatre points de rencontre dont il a été question tout à l'heure, on prendra pour I et I' ceux qui ne sont pas situés sur $\alpha\gamma$.

En résumé, dans le cas actuel, les cordes de deux couples enveloppent respectivement les coniques Γ et Γ' dont il a été question et chacune des cordes de l'autre couple passe par un point fixe. Ces coniques Γ, Γ' et les deux points fixes sont parfaitement construits par ce qui précède.

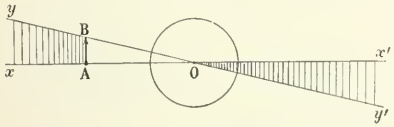
Nous aurions pu présenter des remarques géométriques expliquant certains des résultats précédents, en particulier relativement à certains faisceaux harmoniques. Nous avons préféré une solution purement analytique de la question.

G. LAPOINTE.

PHYSIQUE

618. — *Un objet lumineux* AB *est placé vis-à-vis d'une sphère réfringente d'indice n à une distance a du centre. Etudier les diverses positions que prend son image par réfraction quand le rayon* R *de la sphère varie depuis zéro jusqu'à l'infini.*

Si l'on prend pour origine le centre d'une surface sphérique réfringente séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2, les distances π_1, π_2 et ρ du point lumineux, de son image et de la surface sont liées par la formule générale



$$\frac{n_1}{\pi_2} - \frac{n_2}{\pi_1} = \frac{n_1 - n_2}{\rho}.$$

Appliquons cette formule à chacune des réfractions dans la sphère, en appelant x la distance de l'image intermédiaire et a' la distance de l'image définitive.

$$\frac{1}{x} - \frac{n}{a} = \frac{1-n}{R}, \qquad \frac{n}{a'} - \frac{1}{x} = \frac{n-1}{-R},$$

d'où l'on tire, en éliminant x,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = 2\frac{n-1}{n}\frac{1}{R},$$

équation d'une lentille mince biconvexe d'indice n et dont chaque face aurait un rayon de courbure nR.

Cette équation représente une hyperbole de coordonnées R et a', mais les valeurs positives de R ont seules une signification physique. Les valeurs remarquables des variables sont :

$R = 0,$			$a' = 0,$
$R = \frac{n-2}{n}a,$	valeur acceptable si	$n > 2,$	$a' = -R,$
$R = \frac{2(n-1)}{n}a,$	—	$n > 1,$	$a' = \mp\infty,$
$R = a + \frac{2(n-1)}{n}a,$	—	$n > \frac{2}{3},$	$a' = R,$
$R = \infty,$			$a' = a.$

On est ainsi conduit à distinguer les cas suivants :

1er cas : $n > 2$, par exemple $n = 2{,}5$. — A mesure que R croît, l'image s'éloigne dans l'angle $x'Oy'$. Elle est d'abord à l'intérieur de la sphère, traverse la sphère pour $R = \frac{n-2}{n}a$, $\left(R = \frac{1}{5}a\right)$, s'éloigne à l'infini pour $R = \frac{2(n-1)}{n}a$, $\left(R = \frac{6}{5}a\right)$, revient dans l'angle xOy, rencontre la sphère pour

$$R = a + \frac{2(n-1)}{n}a, \qquad \left(R = \frac{11}{5}a\right),$$

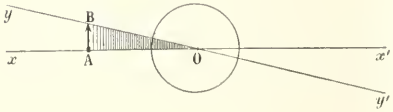
et arrive en AB pour $R = \infty$.

2e cas : $1 < n < 2$, par exemple $n = 1{,}5$. — L'image reste d'abord en dehors de la sphère, s'éloigne à l'infini pour $R = \frac{2(n-1)}{n}a$, $\left(R = \frac{2}{3}a\right)$, revient dans l'angle xOy, rencontre la sphère pour

$$R = a + \frac{2(n-1)}{n}a, \qquad \left(R = \frac{5}{3}a\right),$$

et arrive en AB pour $R = \infty$.

3e cas : $\frac{2}{3} < n < 1$, par exemple $n = 0{,}75$. — A mesure que R croît, l'image s'éloigne du point O dans l'angle xOy. Elle est d'abord à l'extérieur de la sphère ; elle y pénètre pour



$$R = a + \frac{2(n-1)}{n}a \qquad \left(R = \frac{1}{3}a\right),$$

et arrive en AB pour $R = \infty$.

4e cas : $n < \frac{2}{3}$, par exemple $n = 0{,}5$. — L'image reste tout le temps à l'intérieur de la sphère en allant de O en AB.

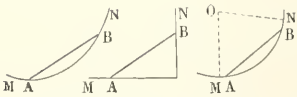
Il est bien entendu, dans tout ce qui précède, que si R est plus grand que a, l'objet est virtuel. Si l'on supposait a négatif, l'objet serait virtuel, même pour les plus petites valeurs de R.

Formule exacte, mais discussion fort incomplète de M. R. Hauser, à Clermont-Ferrand.

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

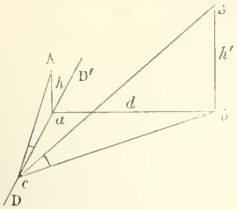
ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Mécanique et Trigonométrie.



I. — Etudier l'équilibre d'une barre rectiligne, pesante et homogène AB dont les extrémités peuvent glisser avec frottement sur une courbe MN située dans un plan vertical. Etablir la condition d'équilibre limite dans le cas général d'une courbe quelconque et en faire l'application aux cas particuliers :

1° d'un angle droit dont un côté est vertical ;
2° d'un arc de cercle.



II — Étant donnés deux monuments Aa, Bb dont les hauteurs respectives au-dessus d'un même plan horizontal sont $h = 30^m,25$, $h' = 280^m,70$ et dont la distance $ab = d$ est de $430^m,50$, on demande quelle est la position c que devra occuper un spectateur sur l'horizontale Dab' perpendiculaire à ab, pour voir les deux monuments sous le même angle. Calculer cet angle ainsi que la distance ac.

(*Durée : 4 h.*)

Analyse.

Un bassin à parois verticales dont la surface S est connue, est mis en communication avec la mer par un canal dont le débit est supposé proportionnel à la différence de hauteur entre le niveau de la mer et celui du bassin. La hauteur h de la mer au-dessus d'un plan horizontal de comparaison varie, en raison du mouvement des marées, suivant une loi représentée par la formule

$$h = a + b \sin kt,$$

où a, b, k sont des constantes et où t figure le temps.

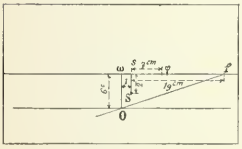
On demande comment variera la hauteur z dans le bassin, comptée au-dessus du même plan de comparaison.

On supposera qu'à l'époque initiale $t = 0$ le niveau du bassin est à la cote a comme celui de la mer.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

Épure de perspective (feuille 1/2 grand-aigle).

Ayant pris pour ligne d'horizon la parallèle aux grands côtés de la feuille équidistante de ces côtés, on marque sur cette ligne d'abord le point s au centre de la feuille, puis les points φ et f à droite, et le point ω à gauche de ce point s, aux distances $s\varphi = 7^{cm}$, $sf = 19^{cm}$, $s\omega = 1^{cm}$.



Sur les perpendiculaires à la ligne d'horizon élevées en ω et s, on porte en dessous de cette ligne les segments $\omega O = 6^{cm}$, $sS = 2^{cm}$.

Le point φ est le point de fuite principal et la distance principale (distance de l'œil au tableau) est égale à 14^{cm}.

La droite Of est la trace géométrale d'un mur vertical dans lequel débouche un berceau droit de 4^m de largeur limité par deux piédroits de 5^m de hauteur que surmonte une voûte en plein cintre.

L'axe de l'entrée de ce berceau est la verticale du point O.

Sachant que *l'échelle du plan de front de* O *est de* $\frac{1}{30}$, construire les perspectives : 1° de l'entrée du berceau, 2° de l'ombre portée par cette entrée à l'intérieur du berceau, la source lumineuse ayant pour perspective le point S projeté sur le géométral au point s de la ligne d'horizon.

Nota. — Les perspectives demandées seront dessinées en noir ainsi que la trace géométrale du mur, en dehors de l'ouverture du berceau.

La ligne d'horizon et les lignes de construction relatives à la perspective de l'entrée du berceau seront tracées en rouge, celles relatives à la perspective de l'ombre en bleu.

Pour l'entrée, on se contentera d'indiquer la construction des points situés sur la ligne des naissances et sur l'axe, et du point le plus haut, en se servant d'un relèvement de front autour de la verticale du point O.

Pour la ligne d'ombre on indiquera la construction d'un point quelconque avec la tangente en ce point, et du point sur la courbe d'entrée, en se servant du même relèvement de front.

Facultativement, on pourra déterminer la tangente à la ligne d'ombre au point situé sur la courbe d'entrée.

On recouvrira la partie ombrée d'une légère teinte d'encre de Chine.

(*Durée : 3 h. 1/2.*)

Croquis et Dessin de machines.

Première partie : Croquis (feuille 1/8 grand-aigle quadrillé).

1° Sur une première feuille, faire au crayon, à main levée, le relevé géométral (plan, élévation et coupe) de l'un des objets placés dans la salle d'examen ;

2° Relever ses dimensions, en millimètres, et les inscrire sur le croquis.

On accorde 1 h. 1/2 pour cette première partie du travail, après quoi le modèle en relief est retiré de la salle.

Deuxième partie : Mise au net (feuille 1/4 grand-aigle).

Sur une seconde feuille, mettre au net, à l'encre de Chine, à une échelle déterminée, le croquis précédent.

Nota. — L'échelle est laissée à l'arbitraire des candidats ; elle devra être choisie assez grande pour que la feuille soit bien remplie.

L'échelle doit être dessinée dans une partie libre de cette feuille.

(*Durée : 4 h.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

715. — On considère une conique (S) et un point P ; par le point P passe une sécante variable qui rencontre la conique (S) aux points M et M' ; soient, en outre, A et A' les points de contact des tangentes menées à (S) par le point P. Montrer :

1° Que le lieu des points de rencontre des droites AM, A'M' ou AM', A'M est une conique (S') ;

2° Que T et T' étant les points de rencontre de cette nouvelle conique avec la tangente en M à la première, les tangentes en T et T' à la conique (S') se coupent en M' ;

3° Les droites MT, MT' rencontrent à nouveau la conique (S) aux points N et N' : la droite NN' passe au point de rencontre de AA' avec TT' et enveloppe une conique, qu'elle touche sur la droite MM' ;

4° Les tangentes menées des points T et T' à la conique (S) se coupent en un point H de la droite MM' ; ce point décrit une conique et la tangente à cette conique au point H est la droite HI.

Vasnier.

716. — Exprimer qu'un point (α, β) est centre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral inscrit dans une courbe donnée ou circonscrit à une courbe également donnée.

L.-D. Bicart, lieutenant d'artillerie, à Vannes.

717. — La lumière d'une source lumineuse se propage dans un milieu homogène que l'on supposera doué d'un certain pouvoir absorbant, le même pour toutes les radiations émises.

L'éclairement produit dans ces conditions a une valeur déterminée E_1 à la distance r_1 de la source, une valeur E_2 à la distance r_2 ; quelle est sa valeur E à une distance quelconque r ?

Application numérique : l'éclairement à la distance de 2^m est 8 fois moindre qu'à 1^m ; quel est l'éclairement à 3^m ?

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

611. — *On considère deux droites rectangulaires,* Ox *et* Oy, *et un cercle* (C) *tangent à ces deux droites en* A *et* B ; *par le point* O *on mène une sécante mobile qui rencontre le cercle* (C) *en* M *et* N.

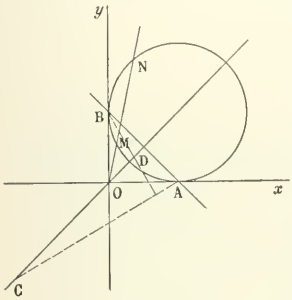
1° *Faire passer une hyperbole équilatère par les quatre points* A, B, M *et* N, *et trouver le lieu du point de rencontre des tangentes à cette hyperbole en* M *et* N.

2° *Trouver le lieu du point de rencontre des droites* AM *et* BN.

3° *Par les points* A, B, M, N, *on fait passer une parabole* (P). *Montrer qu'il passe deux paraboles* (P) *par un point du plan et qu'on peut choisir un paramètre variable tel que l'équation générale des paraboles* (P) *soit rationnelle par rapport à ce paramètre.*

4° *Trouver le lieu décrit par l'intersection de* (P) *avec celui de ses diamètres qui passe au point* O.

1. Prenons pour axes les deux droites Ox et Oy, et pour directions positives sur ces droites, les directions des segments OA et OB. L'équation du cercle tangent aux deux droites en A et B est alors



$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0,$$

a étant positif. L'équation de la sécante OMN est $y - mx = 0$, et, par suite, celle de l'hyperbole équilatère passant aux quatre points A, B, M, N, est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + \lambda(x + y - a)(y - mx) = 0,$$

λ et m étant deux paramètres variables liés par une relation qui exprime que cette conique est une hyperbole équilatère ; cette relation s'obtient en écrivant que la somme des coefficients de x^2 et de y^2 est nulle ; elle donne λ en fonction de m, $\lambda = \dfrac{2}{m-1}$.

En portant cette valeur de λ dans l'équation de la conique et développant, on obtient l'équation générale des hyperboles équilatères indiquées en fonction du paramètre arbitraire m,

$$(1) \qquad (m+1)x^2 - 2(1-m)xy - (m+1)y^2 - 2ax + 2amy - a^2(m-1) = 0.$$

C'est là l'équation d'un faisceau linéaire de coniques; ces courbes passent par quatre points fixes qui sont les points de rencontre des deux coniques de base,

$$x^2 + 2xy - y^2 + 2ay - a^2 = 0,$$
$$x^2 - 2xy - y^2 - 2ax + a^2 = 0.$$

La somme de ces deux équations donne l'équation plus simple,

$$2(x^2 - y^2) + 2a(y - x) = 0,$$

qui se décompose en deux

$$x + y - a = 0 \qquad \text{et} \qquad x - y = 0\,;$$

la première représente la droite AB et donne les points A et B, que l'on devait évidemment trouver ; la seconde représente la première bissectrice de l'angle des axes, $x - y = 0$, et donne les deux points fixes, C et D, dont les abscisses sont racines de l'équation

$$2x^2 + 2ax - a^2 = 0\,;$$

l'un de ces points étant placé, C par exemple, l'autre est le point de concours des hauteurs du triangle ABC. Cela est facile à vérifier, mais ce fait résulte aussi de cette propriété très connue de l'hyperbole équilatère, que toute conique de cette espèce qui passe aux trois sommets d'un triangle passe aussi au point de concours des hauteurs.

Soient alors (x, y) les coordonnées du pôle de la droite OMN ; l'équation de cette droite s'écrira

$$Xf'_x + Yf'_y + f'_z = 0,$$

et, comme on doit retrouver ainsi $K(Y - mX) = 0$, on aura les deux relations

$$f'_x + mf'_y = 0, \qquad f'_z = 0,$$

entre lesquelles il faudra éliminer m. Or la dernière donne $m = \dfrac{x-a}{y-a}$; en portant cette valeur dans

la première, on a l'équation du lieu du point de concours des tangentes en M et N ; cette équation se décompose en

$$x - y = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 - a(x + y) = 0.$$

La première est un lieu exceptionnel qui provient de l'hyperbole impropre du faisceau réduite aux droites AB et CD, et que l'on obtient pour $m = 1$. On sait en effet que le lieu des pôles d'une droite passant au sommet d'un angle, par rapport aux côtés de cet angle est une droite, la conjuguée harmonique de la droite considérée ; en particulier, pour un des côtés de l'angle, on a, comme lieu de pôles, ce côté lui-même. C'est ce qui arrive ici pour la droite OMN qui coïncide alors avec la première bissectrice. Le vrai lieu est donc le cercle

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - a(x + y) = 0.$$

Il est visible que c'est le cercle circonscrit au triangle OAB.

2. Le point de concours des droites AM et BN est l'un des points doubles d'une des coniques impropres du faisceau linéaire des coniques qui passe aux quatre points A, B, M, N ; ses coordonnées annulent donc les trois dérivées partielles du premier membre de l'équation générale de ce faisceau, qui est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + \lambda(x + y - a)(y - mx) = 0.$$

Si on pose $P \equiv x + y - a$, ces trois équations linéaires sont

$$2(x - a) - \lambda m P + \lambda(y - mx) = 0,$$
$$2(y - a) + \lambda P + \lambda(y - mx) = 0,$$
$$2P + \lambda(y - mx) = 0;$$

elles sont linéaires en λ et λm ; par conséquent, le résultat de l'élimination de λ et λm entre ces trois équations est le déterminant

$$\begin{vmatrix} x - a & y & -P - x \\ y - a & y + P & -x \\ P & y & -x \end{vmatrix} = 0.$$

En retranchant successivement la dernière ligne de la première et de la seconde, ce déterminant se simplifie et devient

$$\begin{vmatrix} -y & 0 & -P \\ -x & P & 0 \\ P & y & -x \end{vmatrix} = 0;$$

il se développe alors immédiatement et donne l'équation du lieu. Cette équation se décompose en $P = 0$ et $2xy + P^2 = 0$. La première représente la droite AB ; c'est une solution évidente *a priori*, car l'un des points doubles des coniques impropres du faisceau actuel est le point de concours de AB et MN, et il décrit la droite AB. La seconde représente le vrai lieu ; c'est une hyperbole ayant pour axe la première bissectrice,

$$(3) \qquad 2xy + (x + y - a)^2 = 0.$$

3. Par les quatre points A, B, M, N, il passe deux paraboles ; nous les obtiendrons en annulant le discriminant des termes du second degré de l'équation générale du faisceau linéaire. En posant $\lambda = \frac{1}{\mu}$, cette relation s'écrit

$$4(\mu - m)(\mu + 1) - (1 - m)^2 = 0;$$

elle est du second degré en λ et μ ; par suite, elle représente une conique, si λ et μ désignent les coordonnées d'un point. Or, on sait que toute conique est une courbe unicursale ; donc λ et μ s'expriment rationnellement à l'aide d'un paramètre variable, t.

Le calcul est très simple dans le cas actuel ; il suffit d'écrire ainsi la relation

$$\frac{2(\mu - m)}{1 - m} = \frac{1 - m}{2(\mu + 1)},$$

et de désigner par t la valeur commune des deux rapports ; on trouve alors

$$2\mu + m(t - 2) - t = 0,$$
$$2t\mu + m + 2t - 1 = 0,$$

et l'on déduit de là

$$\frac{\mu}{t^2 - 2t + 1} = \frac{m}{-t^2 - 2t + 1} = \frac{1}{-t^2 + 2t + 1},$$

puis

$$\mu = -\frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 - 2t - 1}. \qquad m = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 - 2t - 1}.$$

L'équation générale du faisceau,

$$\mu(x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2) + (x + y - a)(y - mx) = 0,$$

se transforme alors en

$$(4) \qquad 2(y + tx)^2 - a(3t^2 - 2t - 1)x - a(t^2 - 2t + 3)y + a^2(t - 1)^2 = 0.$$

Sous cette forme, on a l'équation générale des paraboles qui passent aux points A, B, M et N, quand la sécante MN varie, en fonction rationnelle d'un paramètre t.

4. Le diamètre qui passe en O a pour équation $y + tx = 0$. On aura donc le lieu demandé, en remplaçant t par $\frac{-y}{x}$ dans l'équation précédente. On trouve ainsi

$$x + y = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + 4xy + y^2 - a(x + y) = 0.$$

La première équation représente la seconde bissectrice ; elle correspond à la parabole impropre obtenue en menant la sécante OMN parallèle à AB ; cette parabole admet pour diamètre passant en O la droite OMN elle-même, ou ici, $x + y = 0$, et ce diamètre faisant partie de la parabole impropre, tous ses points sont des points du lieu ; c'est un lieu exceptionnel. Le vrai lieu est l'hyperbole

$$(5) \qquad x^2 + 4xy + y^2 - a(x + y) = 0;$$

de même que l'hyperbole (3), cette conique admet la première bissectrice pour axe de symétrie.

Bonne solution : M. J.-A. Gauthier (pensionnat de Valbenoîte). — Solution satisfaisante : M. R. Hauser, à Clermont-Ferrand.

---

631. — *Les asymptotes d'une hyperbole de grandeur constante passent par deux points fixes A et B. Trouver le lieu des foyers de cette hyperbole, ainsi que le lieu des sommets.*

La solution géométrique de ce problème est absolument évidente. En effet, l'hyperbole ayant une grandeur constante, l'angle des asymptotes est constant, et le centre, C, de l'hyperbole décrit un cercle passant aux points A et B. Les deux axes de cette hyperbole sont les bissectrices de l'angle C ; ils passent, par suite, par des points fixes, les extrémités du diamètre du cercle précédent perpendiculaire à AB. Il faut, à partir du point C, porter sur l'axe transverse, et de part et d'autre, une longueur constante égale à la demi-distance focale de l'hyperbole, les points ainsi obtenus ont pour lieu commun un limaçon de Pascal ayant pour point double le point fixe par lequel passe l'axe transverse.

Pour traiter la question par le calcul, nous prendrons pour axe des x la droite des deux points A et B et pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu de AB. Désignons alors par x_0 et $-x_0$ les abscisses de ces points, par α et β les coordonnées du centre de l'hyperbole, par φ l'angle que fait

l'une des directions de l'axe transverse avec Ox. Pour passer du premier système d'axes à celui formé par les axes principaux de la conique, nous aurons à employer les formules de substitution suivantes :

$$x = \alpha + X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \qquad y = \beta + X\sin\varphi + Y\cos\varphi,$$

et

$$X = (x-\alpha)\cos\varphi + (y-\beta)\sin\varphi, \qquad Y = -(x-\alpha)\sin\varphi + (y-\beta)\cos\varphi;$$

dans le nouveau système l'équation de l'hyperbole est

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

a et b désignant des quantités constantes ; par conséquent les deux asymptotes ont pour équations $\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0$, $\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0$, et, en exprimant qu'elles passent respectivement aux points $(x_0, 0)$ $(-x_0, 0)$, nous aurons les deux relations

$$\frac{x_0\cos\varphi - p}{a} + \frac{x_0\sin\varphi - q}{b} = 0, \qquad \frac{x_0\cos\varphi + p}{a} - \frac{x_0\sin\varphi + q}{b} = 0,$$

où p et q représentent pour abréger les binomes $\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi$, $\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi$. D'autre part, les coordonnées des foyers dans le système des nouveaux axes sont $X = \sqrt{a^2+b^2} = c$, $Y = 0$; elles vérifient donc, dans l'ancien système, les équations

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = c, \qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi - q = 0;$$

il faut alors éliminer p, q et φ entre ces deux équations et les relations trouvées antérieurement.

Pour cela, ajoutons et retranchons ces deux relations ; nous aurons $q = \frac{bx}{a}\cos\varphi$, $p = \frac{ax_0}{b}\sin\varphi$; puis, en portant ces valeurs dans les équations qui donnent les coordonnées des foyers,

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{ax_0}{b}\sin\varphi = c, \qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi - \frac{bx_0}{a}\cos\varphi = 0.$$

Il reste à éliminer φ entre ces deux équations ; or la seconde est homogène en $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ et donne

$$\frac{\cos\varphi}{ax} = \frac{\sin\varphi}{ay + bx_0} = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + (ay+bx_0)^2}};$$

il faut maintenant porter ces valeurs de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ dans la première équation. Avant de faire ce dernier calcul, je transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point $\left(0, -\frac{bx_0}{a}\right)$, c'est-à-dire que je change x en x et y en $y - \frac{bx_0}{a}$; j'ai ainsi $\frac{\cos\varphi}{x} = \frac{\sin\varphi}{y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et $x\cos\varphi + \left(y - \frac{c^2x_0}{ab}\right)\sin\varphi = c$.

Par suite le résultat de l'élimination est

$$\frac{x^2 + y^2 - \frac{c^2x_0}{ab}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = c, \qquad \text{ou} \qquad \left(x^2 + y^2 - \frac{c^2x_0y}{ab}\right)^2 - c^2(x^2+y^2) = 0.$$

Cette équation représente, comme on s'en convaincrait aisément, un limaçon de Pascal ayant la nouvelle origine pour point double.

Il y a évidemment un autre lieu symétrique du précédent par rapport à la droite AB. Les lieux des sommets s'obtiennent de la même façon et sont aussi des limaçons de Pascal.

R. HAUSER, à Clermont-Ferrand.

Bonnes solutions : MM. J. Lhériaud, lycée de Toulouse ; E.-N. Barisien.

632. — *Etant donnés deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *une droite* AB *se meut dans leur plan de façon que ses coordonnées à l'origine satisfassent à la relation* $ab = k^2$. *Trouver le lieu des foyers des paraboles circonscrites au triangle* OAB *et admettant le point* O *pour sommet.*

Les axes sont tout indiqués. L'équation d'une parabole circonscrite au triangle OAB est, par rapport à ces axes,

$$(y - mx)^2 - am^2x - by = 0.$$

Pour que l'origine soit sommet, il faut que la tangente en ce point, $am^2x + by = 0$, soit perpendiculaire à la direction de l'axe $y - mx = 0$; cela donne $b = am^3$, et, puisque $ab = k^2$, $a^2m^3 = k^2$; l'équation générale des paraboles considérées est donc

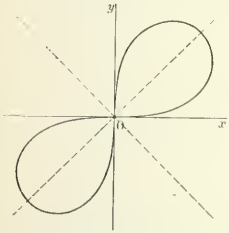
$$(y - mx)^2 - am^2(x + my) = 0,$$

avec la condition $$a^2m^3 = k^2.$$

Si on appelle X et Y les distances d'un point aux deux droites $x + my = 0$ et $y - mx = 0$, cette équation s'écrit

$$Y^2 - \frac{am^2}{\sqrt{1 + m^2}} X = 0,$$

et, sous cette forme, on reconnait de suite que le paramètre a pour valeur $\frac{|a|\, m^2}{2\sqrt{1 + m^2}}$. D'autre part, si a est positif, la parabole est tout entière dans la région des points pour lesquels $x + my$ est positif, si a est négatif, elle est dans la région négative de cette droite ; il en résulte donc que la distance du foyer à la tangente au sommet, affectée du signe + dans le premier cas et du signe — dans le second, a toujours le signe de a. Donc en désignant par x et y les coordonnées du foyer, on a toujours en grandeur et en signe



$$\frac{x + my}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{am^2}{4\sqrt{1 + m^2}}, \qquad \text{ou} \qquad x + my = \frac{am^2}{4}.$$

Le lieu du foyer s'obtiendra donc en éliminant a et m entre cette équation, l'équation de l'axe $y - mx = 0$, et la relation $a^2m^3 = k^2$. Cette élimination se fait aisément et donne pour équation du lieu

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{k^2}{16} xy.$$

Ce lieu est une lemniscate ayant pour axes de symétrie les deux bissectrices de l'angle des axes et tangente aux axes de coordonnées à l'origine. On peut la construire immédiatement en prenant des coordonnées polaires, et l'on trouve la forme ci-contre.

J. LHÉRIAUD, lycée de Toulouse.

Bonnes solutions : MM. E. N. Barisien ; Alain de la Ruffie (pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne) ; G. A. Pouillart, à Nevers.

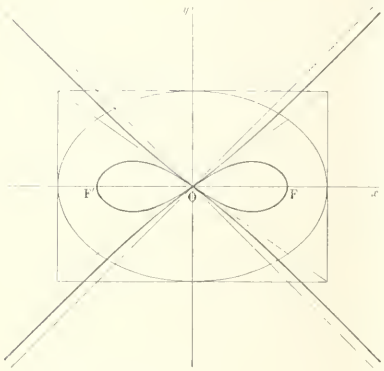
---

633. — *On considère une ellipse* E *et l'hyperbole équilatère* H *ayant ses sommets aux foyers de* E. *On trace la corde polaire d'un point quelconque de* H *par rapport à* E. *Le lieu du point de rencontre des normales à* E *aux extrémités de cette corde est une sextique que l'on demande de construire.*

Soient $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 - y^2 - c^2 = 0$$

les équations de l'ellipse E et de l'hyperbole H.

Le point de rencontre des normales aux extrémités de la corde polaire du point (α, β) par rapport à l'ellipse a pour coordonnées



$$(1) \quad x = -\frac{c^2\alpha(\beta^2 - b^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}, \qquad y = \frac{c^2\beta(\alpha^2 - a^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2};$$

nous aurons le lieu de ce point en éliminant α et β entre les équations (1) et la suivante

$$(2) \qquad \alpha^2 - \beta^2 - c^2 = 0.$$

De celle-ci on tire $\alpha^2 - a^2 = \beta^2 - b^2$, par suite en divisant membre à membre les équations (1) on obtient

$$\frac{x}{y} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{-y} = \frac{c}{\pm\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

$$\text{On en déduit} \quad \alpha = \frac{cx}{\pm\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \beta = \frac{-cy}{\pm\sqrt{x^2 - y^2}},$$

et en portant ces valeurs dans une des équations (1) on obtient l'équation du lieu. On trouve ainsi

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2(x^2 - y^2) - c^2(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du sixième degré symétrique par rapport aux axes de l'ellipse.

Elle admet pour asymptotes les droites $x^2 - y^2 = 0$ et elle est tangente à l'origine aux diagonales du rectangle construit sur les axes de l'ellipse.

On la construit aisément en posant $y = tx$.

Georges-Alfred POUILLIART, à Nevers.

QUESTIONS PROPOSÉES

718. — Soient P et P′ deux points situés sur le grand axe d'une ellipse de centre O et tels que OP = OP′, deux points Q et Q′ situés sur le petit axe de la même ellipse et tels que OQ = OQ′. Si on considère un point M variable sur l'ellipse, les perpendiculaires à MP et à MP′ en P et P′ se rencontrent en M′, les perpendiculaires à MQ et MQ′ en Q et Q′ se rencontrent en M″.

La parallèle au petit axe menée par M′ et la parallèle au grand axe menée par M″ se rencontrent en M‴. Montrer que le lieu du point M‴ est l'ellipse donnée, quelles que soient les positions des points P, P′, Q et Q′ sur les axes.

E.-N. Barisien.

719. — D'un point M d'une ellipse, on abaisse des perpendiculaires MP et MQ sur les axes de cette ellipse. Soient P et Q leurs points de rencontre avec les axes. On demande :

1° Le lieu du point M′ symétrique de M par rapport à PQ ;

2° Le lieu du point de rencontre de MM′ avec PQ.

On examinera ce que deviennent ces deux lieux quand l'ellipse se réduit à un cercle.

G. Rousier, à Rochechouart.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

8e Année. N° 4. Janvier 1898.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA CONTINUITÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE

par M. **A. Tresse**, Professeur au collège Stanislas.

La continuité des racines d'une équation algébrique est une question des plus importantes ; c'est le principe fondamental de l'étude des courbes algébriques. La méthode de Cauchy, telle que l'ont exposée Briot et Bouquet, est, à ma connaissance, la seule simple et rigoureuse qui l'établisse ; elle fait malheureusement appel à des notions qui ne sont pas d'ordre élémentaire. Il n'est pas sans intérêt de montrer qu'elle s'applique sans modification au cas des racines réelles seulement. Je la reproduis presque mot à mot, *en restant dans le domaine des nombres réels*.

Soit $f(x, y) = 0$ une équation dont le premier membre est un polynome entier en x et y. Si l'on attribue à x une certaine valeur, l'équation en y a un certain nombre de racines réelles. Il s'agit de démontrer que, si x varie d'une manière continue, ces racines varient aussi d'une manière continue. Nous considérons d'abord le *cas des racines simples*.

Théorème. — *Si pour* $x = a$, *l'équation a une racine simple égale à* b, *pour une valeur de* x *voisine de* a, *l'équation a une racine et une seule voisine de* b.

Pour abréger, remplaçons x et y par $a + x$ et $b + y$; nous sommes ramené à une équation, qui, pour $x = 0$, a une racine nulle.

En ordonnant son premier membre par rapport aux puissances croissantes de y, on a

$$f(x, y) = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + y^2\varphi_2(x) + \cdots + y^m\varphi_m(x).$$

Le polynome $\varphi_0(x)$ s'annule pour $x = 0$, mais $\varphi_1(x)$ ne s'annule pas. Soit ρ un nombre positif tel que l'intervalle $-\rho$, $+\rho$ ne comprenne aucune racine de $\varphi_1(x)$, et assujettissons la variable x à rester dans cet intervalle. Soit A la plus petite valeur absolue du polynome $\varphi_1(x)$ dans cet intervalle et B la plus grande valeur absolue de chacun des polynomes $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ dans le même intervalle. Nous pouvons mettre le premier membre de l'équation sous la forme

$$f(x, y) = y\varphi_1(x)\left[\frac{\varphi_0(x)}{\varphi_1(x)} \cdot \frac{1}{y} + 1 + \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}y + \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_1(x)}y^2 + \cdots + \frac{\varphi_m(x)}{\varphi_1(x)}y^{m-1}\right],$$

ou

$$f(x, y) = y\varphi_1(x)[1 + P + Q],$$

en posant

$$P = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \cdot y + \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_1(x)} \cdot y^2 + \cdots + \frac{\varphi_m(x)}{\varphi_1(x)} \cdot y^{m-1}, \qquad Q = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_1(x)} \cdot \frac{1}{y}.$$

Si l'on donne à y des valeurs égales à r en valeur absolue, r étant un nombre positif plus petit que l'unité, on a

$$|P| < \frac{B}{A}(r + r^2 + \cdots) = \frac{B}{A}\frac{r}{1-r}.$$

On choisira r de manière que

$$\frac{B}{A}\frac{r}{1-r} \leqslant \frac{1}{2};$$

il suffit pour cela de prendre

$$r \leqslant \frac{A}{A+2B};$$

alors la valeur absolue de P est plus petite que $\frac{1}{2}$. Choisissons pour r un nombre aussi petit que nous le voudrons, satisfaisant à cette inégalité ; y prenant les valeurs $-r$ ou $+r$, on a

$$|Q| \leqslant \frac{1}{A}\frac{|\varphi_0(x)|}{r}.$$

Le polynome $\varphi_0(x)$ étant une fonction continue de x qui s'annule pour $x = 0$, on peut trouver un intervalle $-\rho'$, $+\rho'$, compris dans l'intervalle $-\rho$, $+\rho$ tel que pour toute valeur de x située dans cet intervalle, la valeur absolue du polynome $\varphi_0(x)$ satisfasse à la condition

$$\frac{1}{A}\frac{|\varphi_0(x)|}{r} \leqslant \frac{1}{2},$$

ou

$$\varphi_0(x) \leqslant \frac{rA}{2};$$

ρ' étant choisi de cette façon, la valeur absolue de Q sera moindre que $\frac{1}{2}$ pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle $-\rho'$, $+\rho'$, et pour $y = \pm r$, et de même la valeur absolue de P.

La variable x conservant une valeur fixe de l'intervalle $-\rho'$, $+\rho'$, donnons à y, successivement, les deux valeurs $-r$ et $+r$, dans l'expression

$$f(x, y) = y\varphi_1(x)[1 + P + Q];$$

y prend des valeurs de signes contraires ; $\varphi_1(x)$ reste fixe ; le facteur $1 + P + Q$ reste positif. Par conséquent, les deux valeurs $f(x, -r)$ et $f(x, +r)$ sont de signes contraires. On en conclut que le polynome $f(x, y)$ admet au moins une racine dans l'intervalle $-r$, $+r$.

Il ne peut d'ailleurs en admettre plusieurs. On a, en effet, $f'_y(x, y) = \varphi_1(x) + 2y\varphi_2(x) + \ldots$, polynome qui ne s'annule pas pour $x = 0$, $y = 0$. En vertu de la continuité des polynomes, on pourra au préalable, s'il est nécessaire, restreindre les intervalles $-\rho'$, $+\rho'$ et $-r$, $+r$, de façon que, pour les valeurs de x et y appartenant à ces intervalles, f'_y conserve un signe constant.

Il en résulte que, pour toute valeur de x de l'intervalle $-\rho'$, $+\rho'$, l'équation en y a une racine et une seule appartenant à l'intervalle $-r$, $+r$.

Cas d'une racine multiple. — La méthode s'étend sans difficulté au cas d'une racine multiple.

Si, par exemple, l'équation, pour $x = 0$, a n racines nulles, on mettra $f(x, y)$ sous la forme

$$f(x, y) = y^n\varphi_n(x)[1 + P + Q],$$

en posant
$$P = \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)} \cdot y + \cdots + \frac{\varphi_m(x)}{\varphi_n(x)} y^{m-n}$$
et
$$Q = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_n(x)} \cdot \frac{1}{y^n} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_n(x)} \cdot \frac{1}{y^{n-1}} + \cdots + \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} \cdot \frac{1}{y},$$
$\varphi_n(x)$ ne s'annulant pas pour $x = 0$.

Par une méthode analogue, on démontrera sans peine que, pour toute valeur de x appartenant à un certain intervalle $-\rho'$, $+\rho'$, l'équation en y a au plus n racines appartenant à l'intervalle $-r$, $+r$, r étant un nombre positif, choisi arbitrairement, assujetti seulement à être plus petit qu'une limite déterminée ; et que, de plus, s'il y a moins de n racines, la différence est un nombre pair.

Le résultat n'est donc complètement affirmatif que dans le cas d'une racine simple. Celui d'une racine multiple exige une étude plus approfondie. La méthode de Weierstrass, que M. Andoyer a exposée aux lecteurs de la *Revue* (5e Année, n° 9), en donne la solution complète, en ramenant, par des transformations convenables, l'étude de l'équation proposée, à celle d'autres équations n'ayant que des racines simples. Il suffit par suite d'établir la continuité des racines dans ce seul cas.

Il est intéressant de remarquer que cette démonstration ne fait en rien appel aux éléments imaginaires, et qu'elle est indépendante du théorème de d'Alembert. Elle repose seulement sur le principe bien élémentaire de la continuité des polynomes. La méthode de Weierstrass peut également être exposée sans sortir du même ordre d'idées. D'où il résulte que la théorie générale des courbes algébriques, au moins dans les parties développées dans les cours de Mathématiques spéciales, ne repose que sur des notions des plus élémentaires.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

638. — *Trouver le lieu des foyers des coniques bitangentes à deux cercles donnés.*

Solution analytique. — Soient $C = 0$ et $C' = 0$ les équations des deux circonférences données.

Si $P = 0$ est l'équation de la corde des contacts de la conique que l'on étudie avec le cercle C, son équation est de la forme

(1) $$C - P^2 = 0.$$

De même en désignant par $Q = 0$ l'équation de la corde des contacts de cette conique avec le cercle C', son équation est de la forme

(2) $$C' - Q^2 = 0.$$

Désignons par Σ cette conique.

Posons $\Gamma = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$, c'est-à-dire, désignons par Γ le premier membre de l'équation d'un cercle de centre (α, β) et de rayon nul.

Si ce point (α, β) est un foyer de la conique Σ et si $D = 0$ est l'équation de la directrice de cette conique, qui correspond au foyer (α, β), l'équation de Σ est aussi de la forme

(3) $$\Gamma - D^2 = 0.$$

Les équations (1), (2) et (3) devant représenter la même conique, on a les identités suivantes
$$C - P^2 \equiv -\lambda(\Gamma - D^2), \qquad C' - Q^2 \equiv -\lambda'(\Gamma - D^2),$$
λ et λ' étant des nombres convenablement choisis.

De ces deux identités on déduit la suivante

$$\lambda' C - \lambda C' \equiv \lambda' P^2 - \lambda Q^2.$$

Ces trois identités s'écrivent de la façon suivante

$$C + \lambda \Gamma \equiv P^2 + \lambda D^2, \qquad C' + \lambda' \Gamma \equiv Q^2 + \lambda' D^2, \qquad \lambda' C - \lambda C' \equiv \lambda' P^2 - \lambda Q^2.$$

Elles nous montrent que les formes $C + \lambda\Gamma$, $C' + \lambda'\Gamma$ et $\lambda' C - \lambda C'$, que l'on peut considérer comme des formes homogènes du second degré à trois variables x, y, z (z étant la variable d'homogénéité), sont chacune une somme algébrique de deux carrés de fonctions linéaires; en conséquence le discriminant de chacune d'elles est nul.

Observons que dans ces discriminants ne doivent figurer que les éléments géométriques de la figure, c'est-à-dire les rayons des circonférences et la distance de leurs centres. Nous pouvons donc, pour les calculer, particulariser les équations des circonférences et prendre, par exemple, une circonférence S sous la forme $x^2 + y^2 - R^2 = 0$,

et une circonférence S′ sous la forme $(x - p)^2 + y^2 - R'^2 = 0$.

Si nous calculons le discriminant de la forme $kS + hS'$, nous en déduirons ensuite aisément, en donnant à h et k des valeurs convenables, les expressions des discriminants que nous devons égaler à zéro.

Soit Δ le discriminant de la forme $kS + hS'$, on a

$$(4) \qquad \Delta = (k + h)[k^2R^2 + h^2R'^2 + hk(R^2 + R'^2 - p^2)],$$

et l'on voit que, comme on l'avait annoncé, dans l'expression de Δ ne figurent, outre les nombres h et k, que les rayons R et R′ des deux circonférences S et S′ et la distance p de leurs centres.

En conséquence, si l'on désigne par δ la distance du point (α, β) au centre de la circonférence C, par δ' celle du même point au centre de la circonférence C′, par R et R′ les rayons de ces deux circonférences et par d la distance de leurs centres on obtient, en égalant à zéro les discriminants des trois formes $C + \lambda\Gamma$, $C' + \lambda'\Gamma$ et $\lambda' C - \lambda C'$ les trois relations suivantes

$$(1 + \lambda)[R^2 - \lambda(\delta^2 - R^2)] = 0;$$

$$(1 + \lambda')[R'^2 - \lambda'(\delta'^2 - R'^2)] = 0;$$

$$(\lambda - \lambda')[\lambda'^2R^2 + \lambda^2R'^2 - \lambda\lambda'(R^2 + R'^2 - d^2)] = 0.$$

De là plusieurs hypothèses possibles :

Supposons d'abord λ différent de λ' et chacun de ces nombres différent de -1; on a alors :

1er Cas. $\quad R^2 - \lambda(\delta^2 - R^2) = 0; \quad R'^2 - \lambda'(\delta'^2 - R'^2) = 0; \quad \lambda'^2R^2 + \lambda^2R'^2 - \lambda\lambda'(R^2 + R'^2 - d^2) = 0.$

D'ailleurs $\delta^2 - R^2$ est la puissance du point (α, β) par rapport au cercle C; par suite

$$\delta^2 - R^2 = C(\alpha, \beta),$$

de même

$$\delta'^2 - R'^2 = C'(\alpha\beta).$$

Nos équations de conditions peuvent donc s'écrire

$$R^2 - \lambda C(\alpha\beta) = 0; \qquad R'^2 - \lambda' C'(\alpha\beta) = 0; \qquad \lambda'^2R^2 + \lambda^2R'^2 - \lambda\lambda'(R^2 + R'^2 - d^2) = 0,$$

et on aura le lieu décrit par le point (α, β), c'est-à-dire le lieu des foyers de la conique Σ bitangente aux deux circonférences C et C′, en éliminant les paramètres λ et λ' entre les trois équations précédentes. Cette élimination nous donne l'équation

$$\frac{R'^2}{C'^2(\alpha\beta)} + \frac{R^2}{C^2(\alpha\beta)} - \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{C(\alpha\beta)C'(\alpha\beta)} = 0,$$

ou bien, en chassant les dénominateurs et rendant les coordonnées courantes,

$$(5) \qquad R'^2C^2(xy) + R^2C'^2(xy) - (R^2 + R'^2 - d^2)C(xy).C'(xy) = 0.$$

Telle est, dans ce cas, l'équation du lieu des foyers de Σ.

Cette équation homogène et du second degré en $C(xy)$ et $C'(xy)$ peut se mettre sous la forme

$$[lC(xy) - l'C'(xy)][mC(xy) - m'C'(xy)] = 0,$$

l, l', m, m' étant des nombres convenablement choisis.

Elle représente donc deux circonférences dont les équations sont

$$lC(xy) - l'C'(xy) = 0, \qquad mC(xy) - m'C'(xy) = 0,$$

et qui, par suite, ont même axe radical que les circonférences C et C'.

Je dis que ces circonférences ont des rayons nuls. En effet, considérons l'une d'elles, par exemple celle dont l'équation est

$$lC(xy) - l'C'(xy) = 0;$$

je déduis de là

$$\frac{C(xy)}{l'} = \frac{C'(xy)}{l},$$

d'où, en remplaçant $C(xy)$ et $C'(xy)$ par les quantités proportionnelles l' et l dans l'équation (5),

$$l^2R'^2 + l'^2R^2 - ll'(R^2 + R'^2 - d^2) = 0,$$

relation qui, en vertu de (4), exprime que la circonférence considérée a un rayon nul. Il en est de même pour l'autre.

Nous trouvons donc, dans ce cas, comme lieu des foyers de la conique Σ deux circonférences de rayons nuls qui ont même axe radical que les circonférences données C et C', c'est-à-dire les points limites des circonférences C et C'.

2e Cas. $\lambda = \lambda'$. — La troisième équation est satisfaite d'elle-même; les deux premières donnent

$$R^2 - \lambda(\delta^2 - R^2) = 0; \qquad R'^2 - \lambda(\delta'^2 - R'^2) = 0,$$

ou, comme nous l'avons vu plus haut,

$$R^2 - \lambda C(\alpha\beta) = 0; \qquad R'^2 - \lambda C'(\alpha\beta) = 0.$$

L'élimination du paramètre λ entre ces deux équations nous donne dans ce cas la relation

$$\frac{C(\alpha\beta)}{R^2} = \frac{C'(\alpha\beta)}{R'^2}.$$

On a donc alors, en rendant les coordonnées courantes, pour équation du lieu des foyers des coniques Σ

$$R'^2C(xy) - R^2C'(xy) = 0;$$

cette équation représente une circonférence passant par les points communs aux circonférences données C et C'.

3e Cas. $\lambda = -1$ *et* $\lambda' \neq -1$. — La première des équations est satisfaite d'elle-même; les deux autres deviennent

$$R'^2 - \lambda' C'(\alpha, \beta) = 0, \qquad \lambda'^2R^2 + R'^2 + \lambda'(R^2 + R'^2 - d^2) = 0.$$

L'élimination du paramètre λ' entre ces deux équations nous donne la relation

$$\frac{R^2R'^2}{C'^2(\alpha, \beta)} + 1 + \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{C'(\alpha, \beta)} = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$C'^2(\alpha, \beta) + (R^2 + R'^2 - d^2)C'(\alpha, \beta) + R^2R'^2 = 0,$$

ce qui, en rendant les coordonnées courantes, donne pour équation du lieu des foyers de Σ

$$C'^2(xy) + (R^2 + R'^2 - d^2)C'(xy) + R^2R'^2 = 0,$$

équation du second degré en $C'(xy)$, qui se décompose en deux équations de la forme

$$C'(xy) = k\,; \qquad C'(xy) = k'.$$

Le lieu se compose alors de deux circonférences concentriques à la circonférence C'. Ces circonférences sont réelles, imaginaires ou confondues, selon que les circonférences données ne se coupent pas, se coupent ou sont tangentes.

4e Cas. $\lambda' = -1$ *et* $\lambda \neq -1$. — La deuxième des équations est satisfaite d'elle-même ; les deux autres deviennent

$$R^2 - \lambda C(\alpha\beta) = 0, \qquad R^2 + \lambda^2R'^2 + \lambda(R^2 + R'^2 - d^2) = 0,$$

et nous conduisent, par un calcul tout semblable au précédent, à deux équations de la forme

$$C(xy) = h, \qquad C(xy) = h'.$$

Le lieu se compose alors de deux circonférences concentriques à la circonférence C, qui sont réelles, imaginaires ou confondues, comme les précédentes, suivant la position relative des circonférences données C et C'.

Supposons en second lieu que l'on ait à la fois $\lambda = -1$ et $\lambda' = -1$.

Dans ce cas les trois équations de conditions sont satisfaites d'elles-mêmes et ne donnent plus le lieu du point (α, β). Mais nos identités du début deviennent

$$C - \Gamma \equiv P^2 - D^2\,; \qquad C' - \Gamma \equiv Q^2 - D^2,$$

ou

$$C - \Gamma \equiv (P - D)(P + D)\,; \qquad C' - \Gamma \equiv (Q - D)(Q + D).$$

Comme le premier membre de chacune de ces identités est du premier degré seulement, il faut que l'un des facteurs de chacun des seconds membres se réduise à une constante.

On a donc, par exemple $P - D = K$, et $Q - D = K'$,

d'où

$$C - \Gamma \equiv K(P + D) \equiv K(2D + K),$$

et

$$C' - \Gamma \equiv K'(Q + D) \equiv K'(2D + K');$$

d'où l'on déduit

$$C - \Gamma - K^2 \equiv 2DK, \qquad C' - \Gamma - K'^2 \equiv 2DK',$$

et, par suite,

$$\frac{C - \Gamma - K^2}{K} \equiv \frac{C' - \Gamma - K'^2}{K'}.$$

Soient $C \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$ l'équation de la circonférence C,

$C' \equiv (x - a')^2 + (y - b')^2 - R'^2 = 0$ celle de la circonférence C',

et $\Gamma \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$.

On doit avoir identiquement

$$\frac{(x-a)^2+(y-b)^2-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2-R^2-K^2}{K} \equiv \frac{(x-a')^2+(y-b')^2-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2-R'^2-K'^2}{K'},$$

ou

$$\frac{2(\alpha - a)x + 2(\beta - b)y + \cdots}{K} \equiv \frac{2(\alpha - a')x + 2(\beta - b')y + \cdots}{K'}.$$

De cette identité résultent les relations

$$\frac{\alpha - a}{K} = \frac{\alpha - a'}{K'}; \qquad \frac{\beta - b}{K} = \frac{\beta - b'}{K'}.$$

L'élimination du rapport $\frac{K}{K'}$ entre ces deux égalités nous donne entre α et β la relation

$$\frac{\alpha - a}{\alpha - a'} = \frac{\beta - b}{\beta - b'},$$

et en rendant les coordonnées courantes, nous avons, dans ce cas, pour équation du lieu des foyers

$$\frac{x - a}{x - a'} = \frac{y - b}{y - b'},$$

qui représente la ligne des centres des circonférences C et C'.

En résumé, le lieu des foyers des coniques bitangentes à deux circonférences données C et C' se compose :

1° des deux points limites relatifs à C et C' ;
2° d'une circonférence passant par les points communs à C et C' ;
3° de deux circonférences concentriques à C ;
4° de deux circonférences concentriques à C' ;
5° de la ligne des centres de C et C'.

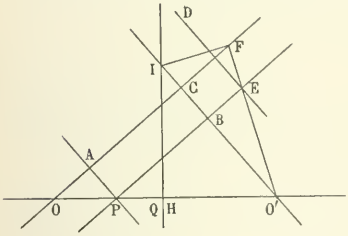
Eugène DEVIN, Répétiteur général au lycée Charlemagne.

Solution géométrique. — Quand deux coniques sont bitangentes, tout point de la corde de contact a même polaire dans les deux coniques.

Soient C et C' les deux cercles donnés, O et O' leurs centres, R et R' leurs rayons. On reconnaît facilement que chacun des centres O et O' appartient à un axe de toute conique bitangente Γ.

1er Cas. — *O et O' sont sur deux axes différents OC et O'C de la conique variable* Γ.

Soient PA et PB les cordes de contact de Γ avec C et C'. D'après la première remarque, le point P a même polaire dans C et Γ, puis dans C' et Γ, donc dans C et C', il est donc fixe et situé sur OO' ; c'est l'un des points limites de Poncelet.



Soit F l'un des foyers de la conique Γ, DE la directrice correspondante coupant PB au point E ; la première remarque montre encore que le point E a même polaire par rapport au cercle O' et au cercle de rayon nul F ; cette polaire est FI perpendiculaire à EF ; elle rencontre la polaire HI du point P par rapport au cercle O' en un point I qui est évidemment le pôle de la droite PE dans le cercle O'. Les triangles rectangles O'FI, O'FC, O'HI, O'OC donnent alors

$$O'F^2 = O'C.O'I = O'H.OO' = \text{constante}.$$

Le lieu de F est un cercle de centre O'.

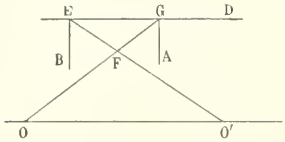
On a supposé F sur l'axe passant par O ; en le supposant sur l'axe passant par O', on aurait trouvé comme lieu un cercle de centre O.

Enfin, en supposant le point P remplacé par le second point limite Q on trouve deux autres cercles ayant encore pour centres l'un O et l'autre O', (Q se confond avec H).

2e Cas. — *O et O' sont sur le même axe de la conique* Γ.

La ligne des centres est un premier lieu évident. Il ne reste plus qu'à trouver le lieu d'un foyer F situé sur l'axe perpendiculaire à OO'.

Soient AG et BE les cordes de contact de la conique Γ avec C et C′, elles rencontrent en G et E la directrice DGE correspondante au foyer F. Comme dans le premier cas, E a même polaire dans le cercle C′ et dans le cercle de rayon nul F ; donc



$$O'F \times O'E = R'^2.$$

On trouvera de même

$$OF \times OG = R^2.$$

Mais DGE étant parallèle à OO′ on a

$$\frac{O'F}{OF} = \frac{O'E}{OG},$$

donc

$$\frac{O'F \times O'E}{OF \times OG} = \frac{R'^2}{R^2} = \frac{O'F^2}{OF^2},$$

et le lieu de F est un cercle ayant pour diamètre la distance des centres de similitude de C et de C′.

En résumé, le lieu se compose :

1° De deux circonférences de centre O ;

2° De deux circonférences de centre O′ ;

3° De la ligne des centres OO′ ;

4° D'une circonférence passant par les points communs aux deux circonférences données et par les deux centres de similitude.

A. NAUD, Professeur au lycée Charlemagne.

---

639. — *D'un point* P *on abaisse des perpendiculaires :* 1° *sur les génératrices ;* 2° *sur les plans tangents à un cône* (C) *du second ordre et de sommet* O *; le lieu de leurs pieds se compose de deux courbes* (Γ) *et* (Γ′). *Quel lieu doit décrire* P *pour qu'elles soient planes ?*

Rapportons le cône à ses axes principaux et désignons par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ l'équation de ce cône et par α, β, γ les coordonnées du point P.

1. Les équations d'une génératrice quelconque du cône sont $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi$, $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi$; celle d'un plan perpendiculaire mené par le point P est $a\cos\varphi(x-\alpha) + b\sin\varphi(y-\beta) + c(z-\gamma) = 0$. Nous aurons donc le lieu en éliminant φ entre ces équations : nous trouvons d'abord le cône, puis la sphère

$$x(x-\alpha) + y(y-\beta) + z(z-\gamma) = 0,$$

qui est décrite sur OP comme diamètre. Le lieu est donc une biquadratique gauche sphérique ayant un point double à l'origine.

Cette courbe ne peut pas être entièrement plane ; mais elle peut être contenue dans deux plans. Il faut pour cela et il suffit qu'il existe une valeur de S pour laquelle l'identité suivante ait lieu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - S[x(x-\alpha) + y(y-\beta) + z(z-\gamma)] \equiv PP',$$

P et P′ étant deux fonctions linéaires. Si on se borne à considérer les termes du premier degré, on voit de suite que le second membre est nécessairement

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)(ux + vy + wz + S),$$

et l'identité à satisfaire se réduit simplement à

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - S(x^2 + y^2 + z^2) \equiv (\alpha x + \beta y + \gamma z)(ux + vy + wz).$$

Tout revient alors à écrire que le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ est un plan cyclique ; par conséquent le

lieu du point P se compose des six normales aux plans cycliques du cône menées par le sommet du cône.

2. Le plan tangent au cône le long de la génératrice (φ) a pour équation $\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} - \frac{z}{c} = 0$ et les équations de la perpendiculaire abaissée du point (α, β, γ) sur ce plan sont

$$\frac{x-\alpha}{\frac{\cos\varphi}{a}} = \frac{y-\beta}{\frac{\sin\varphi}{b}} = \frac{z-\gamma}{\frac{-1}{c}}.$$

Le lieu demandé résulte de l'élimination de φ entre ces trois équations ; en tirant $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ des deux dernières et portant dans la première, on a la sphère trouvée antérieurement,

$$x(x-\alpha) + y(y-\beta) + z(z-\gamma) = 0,$$

puis, en tenant compte de $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, on a le cône $a^2(x-\alpha)^2 + b^2(y-\beta)^2 - c^2(z-\gamma)^2 = 0$. Le résultat est donc semblable au précédent, sauf que le cône donné est remplacé par le cône réciproque ayant le point P pour sommet et que le point double de la biquadratique sphérique est en ce point.

En portant les axes parallèlement à eux-mêmes au point P, on est conduit aux mêmes calculs de décomposition que dans le cas précédent et l'on trouve que pour que la partie de cette biquadratique, qui existe réellement, soit plane, il faut et il suffit que le point P soit situé sur une normale aux plans cycliques, du cône réciproque, ou, ce qui revient au même, sur une focale du cône donné.

La solution géométrique de cette question est évidente ; elle repose sur le théorème suivant : *quand un cône a son sommet sur une quadrique, l'intersection du cône et de la quadrique se compose de deux courbes planes, quand les génératrices de la quadrique qui passent au sommet du cône appartiennent au cône et seulement dans ce cas.*

G. ROUSIER.

Bonnes solutions : MM. R. Hausen, à Clermont-Ferrand ; E. Barré, à Valenciennes ; Jean Merlin.
Excellente solution géométrique de M. V. Bertrand, répétiteur au lycée de Lille.

TRIGONOMÉTRIE

494. — *Un observateur situé en un point* O *d'un rivage rectiligne* AB *observe un navire qui occupe successivement les positions* C, C′, C″, *aux trois époques* t, t', t''.

L'observateur mesure les angles COB, C′OB, C″OB *que font les rayons visuels* OC, OC′, OC″ *avec la direction du rivage. D'autre part la vitesse* v *du navire est supposée constante et connue.*

Cela posé, on demande de déterminer par la distance OD *ou* x *le point* D *du rivage vers lequel se dirige le navire et l'époque* T *à laquelle il atteindra ce point.*

Faire le calcul dans le cas où :

$$\mathrm{COB} = 79^\circ 28' 30'', \qquad \mathrm{C'OB} = 62^\circ 11' 13'', \qquad \mathrm{C''OB} = 47^\circ 8' 27'';$$

$$v = 16 \text{ kilomètres à l'heure}, \qquad t = \text{midi } 20', \qquad t' = \text{midi } 40', \qquad t'' = 1^h.$$

(*École des Ponts et Chaussées, Cours spéciaux, 189 1.*)

Soient $\mathrm{COD} = \alpha$, $\mathrm{C'OD} = \beta$, $\mathrm{C''OD} = \gamma$, et $\mathrm{CDO} = \lambda$;

T l'époque à laquelle le navire atteint le rivage. On a

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{OD}{\sin(\alpha+\lambda)}, \qquad \frac{C'D}{\sin\beta} = \frac{OD}{\sin(\beta+\lambda)}, \qquad \frac{C''D}{\sin\gamma} = \frac{OD}{\sin(\gamma+\lambda)}.$$

Or

$$CD = v(T-t), \qquad C'D = v(T-t'), \qquad C''D = v(T-t'').$$

On en déduit

$$T = t + \frac{OD\sin\alpha}{v\sin(\alpha+\lambda)} = t' + \frac{OD\sin\beta}{v\sin(\beta+\lambda)} = t'' + \frac{OD\sin\gamma}{v\sin(\gamma+\lambda)},$$

trois équations pour déterminer λ, OD et T.

Calcul de λ. — Les deux dernières équations peuvent s'écrire

$$t'-t = \frac{OD}{v}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\lambda)} - \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\lambda)}\right) = \frac{OD}{v}\cdot\frac{\sin\lambda\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\lambda)\sin(\beta+\lambda)},$$

$$t''-t = \frac{OD}{v}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\lambda)} - \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\lambda)}\right) = \frac{OD}{v}\cdot\frac{\sin\lambda\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\lambda)\sin(\gamma+\lambda)},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\sin(\beta+\lambda)}{\sin(\gamma+\lambda)} = \frac{\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{t'-t}}{\dfrac{\sin(\alpha-\gamma)}{t''-t}}.$$

Posons $\dfrac{\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{t'-t}}{\dfrac{\sin(\alpha-\gamma)}{t''-t}} = \operatorname{tg}\varphi$, cette équation devient $\dfrac{\sin(\beta+\lambda)}{\sin(\gamma+\lambda)} = \operatorname{tg}\varphi$,

d'où

$$\frac{\sin(\beta+\lambda)-\sin(\gamma+\lambda)}{\sin(\beta+\lambda)+\sin(\gamma+\lambda)} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - 1}{1+\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ),$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}+\lambda\right)} = \operatorname{tg}(\varphi-45^\circ), \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}+\lambda\right) = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}(\varphi-45^\circ)}.$$

Connaissant λ, on aura OD et T par les formules

$$OD = v(t'-t)\cdot\frac{\sin(\alpha+\lambda).\sin(\beta+\lambda)}{\sin\lambda.\sin(\alpha-\beta)}, \qquad T = t + \frac{OD.\sin\alpha}{v.\sin(\alpha+\lambda)}.$$

Application numérique : $\alpha = 79^\circ 28' 30''$, $\beta = 62^\circ 11' 13''$, $\gamma = 47^\circ 8' 27''$,

$v = 16^{km}$ à l'heure, $t = 12^h 20'$, $t' = 12^h 40'$, $t'' = 1^h$,

$$t'-t = 20' = \frac{1^h}{3}, \qquad t''-t = 40' = \frac{2^h}{3}.$$

$\operatorname{tg}\varphi$ est donné par la formule

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\cdot\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\gamma)};$$

de même

$$OD = \frac{16}{3}\,\frac{\sin(\alpha+\lambda).\sin(\beta+\lambda)}{\sin\lambda.\sin(\alpha-\beta)}.$$

Ont résolu cette question : MM. M. Malplat, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Etienne et F. Pégorier.

Calcul numérique :

Calculs préliminaires :

Calcul de $\log \sin(\alpha-\beta)$ et $\log \sin(\alpha-\gamma)$.

$$\alpha-\beta = 17^\circ 17' 17''$$
$$\alpha-\gamma = 32^\circ 20' 3''$$

$17^\circ 17' 10''$	$\bar{1},4729661$
$7''$	$473,9$
$\log \sin(\alpha-\beta) =$	$\bar{1},4730135$
$32^\circ 20'$	$\bar{1},7282271$
$3''$	$99,9$
$\log \sin(\alpha-\gamma) =$	$\bar{1},7282371$

Calcul de φ et de $\log \operatorname{tg}(\varphi-45^\circ)$.

$\log 2 =$	$0,3010300$
$\log \sin(\alpha-\beta) =$	$\bar{1},4730135$
$\operatorname{colog} \sin(\alpha-\gamma) =$	$0,2717629$
$\log \operatorname{tg} \varphi =$	$0,0458064$
$48^\circ 0' 50''$	7743
	321
$7''$	$296,1$
$0'',6$	$24,9$

$$\varphi = 48^\circ 0' 57'',6$$
$$\varphi - 45^\circ = 3^\circ 0' 57'',6$$

$\log \operatorname{tg}(\varphi-45^\circ)$	
$3^\circ 0' 50''$	$\bar{2},7214054$
$7''$	$2806,3$
$0'',6$	$240,54$
$\log \operatorname{tg}(\varphi-45^\circ) =$	$\bar{2},7217101$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \dfrac{\beta-\gamma}{2}$.

$$\frac{\beta-\gamma}{2} = 7^\circ 31' 23''$$

$7^\circ 31' 20''$	$\bar{1},1207288$
$3''$	$486,6$
$\log \operatorname{tg} \dfrac{\beta-\gamma}{2} =$	$\bar{1},1207775$

Calcul de λ.

$\log \operatorname{tg} \dfrac{\beta-\gamma}{2} =$	$\bar{1},1207775$
$\operatorname{colog} \operatorname{tg}(\varphi-45^\circ) =$	$\bar{1},2782899$
$\log \operatorname{tg}\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}+\lambda\right) =$	$0,3990674$
$68^\circ 14' 50''$	100
	574
$9''$	$549,9$
$0'',4$	$24,1$
$\dfrac{\beta+\gamma}{2}+\lambda =$	$68^\circ 14' 59'',4$
$\dfrac{\beta+\gamma}{2} =$	$54^\circ 39' 50''$
$\lambda =$	$13^\circ 35' 9'',4$

Calcul de $\log \sin(\alpha+\lambda)$.

$\alpha =$	$79^\circ 28' 30''$
$\alpha+\lambda =$	$93^\circ 3' 39'',4$
$\sin(\alpha+\lambda) =$	$\sin 86^\circ 56' 20'',6$
$86^\circ 56' 20''$	$\bar{1},9994799$
$0'',6$	$0,66$
$\log \sin(\alpha+\lambda) =$	$\bar{1},9993800$

Calcul de $\log \sin(\beta+\lambda)$.

$\beta =$	$62^\circ 11' 13''$
$\beta+\lambda =$	$75^\circ 46' 22'',4$
$75^\circ 46' 20''$	$\bar{1},9864700$
$2''$	$10,6$
$0'',4$	$2,12$
$\log \sin(\beta+\lambda) =$	$\bar{1},9864713$

Calcul de $\log \sin \lambda$.

$13^\circ 35'$	$\bar{1},3708079$
$9''$	$783,9$
$0'',4$	$34,84$
$\log \sin \lambda =$	$\bar{1},3708897$

Calculs définitifs :

Calcul de OD.

$\log 16 =$	$1,2041200$
$\operatorname{colog} 3 =$	$\bar{1},5228787$
$\log \sin(\alpha+\lambda) =$	$\bar{1},9993800$
$\log \sin(\beta+\lambda) =$	$\bar{1},9864713$
$\operatorname{colog} \sin \lambda =$	$0,6291103$
$\operatorname{colog} \sin(\alpha-\beta) =$	$0,5269865$
$\log \mathrm{OD} =$	$1,8689468$
$73 \quad 951$	41
	27
4	$23,2$
6	$3,8$
$\mathrm{OD} = 73^{\mathrm{km}},95146$	

Calcul de T.

$\log \mathrm{OD} =$	$1,8689468$
$\log \sin \alpha =$	$\bar{1},9926310$
$\operatorname{colog} \mathrm{V} =$	$\bar{2},7958800$
$\operatorname{colog} \sin(\alpha+\lambda) =$	$0,0006200$
$\log (\mathrm{T} - t) =$	$0,6580778$
$4 \quad 5506$	687
	91
9	$85,5$
6	$5,5$

$$\mathrm{T} - t = 4^{\mathrm{h}}530696 = 4^{\mathrm{h}}33'2'',5$$
$$\mathrm{T} = 4^{\mathrm{h}}53'2'',5.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

720. — On donne une cissoïde

$$x(x^2+y^2) - ay^2 = 0.$$

Montrer qu'un cercle quelconque coupe cette cissoïde en quatre points à distance finie. Déterminer le cercle de façon que trois de ces points soient confondus avec un point M de la courbe. Soit N le quatrième point de rencontre. On demande :

1° Le lieu du centre de ce cercle;

2° Le lieu du point de rencontre des tangentes à la cissoïde aux points M et N;

3° L'enveloppe de la droite MN.

E. H.

721. — Etablir la formule

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x(x-1) + \ldots + C_n^n x(x-1)^{n-1}$$

et en déduire d'autres formules, par exemple, des relations entre les symboles C_n^p.

J. Merlin.

722. — Un point lumineux étant placé vis-à-vis d'un miroir cylindrique à base circulaire, déterminer la caustique des rayons réfléchis.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

634. — *Déterminer les normales à l'ellipse dont la distance au centre est maximum. Même question quand on remplace le centre par un foyer.*

L'équation de la normale à l'ellipse au point $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ est

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

1. La distance du centre à cette normale est $\dfrac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\pm\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$.

A cause de la symétrie on peut supposer que φ est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$; nous prendrons alors le signe + devant le radical, et nous étudierons les variations de la fonction

$$d = \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$$

quand φ varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$.

Prenons la dérivée, nous obtenons $d' = \dfrac{c^2(b^2\cos^4\varphi - a^2\sin^4\varphi)}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$.

Le numérateur s'annule pour $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$. Désignons par α l'angle aigu dont la tangente est égale à $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$; nous avons le tableau suivant

φ	0	croît	α	croît	$\frac{\pi}{2}$
d	0	croît	*max.*	décroît	0

De l'égalité $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ nous tirons $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{b}{a+b}}$, $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$. En remplaçant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par ces valeurs dans l'expression de d, on obtient aisément pour la valeur du maximum $d = a - b$.

2. La distance du foyer $(c, 0)$ à la même normale est

$$\frac{ac\sin\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\pm\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}},$$

ou en remplaçant $\sin^2\varphi$ par $1 - \cos^2\varphi$,

$$\pm c \sin\varphi \sqrt{\frac{a - c\cos\varphi}{a + c\cos\varphi}}.$$

Il suffit de faire varier φ de 0 à π; nous allons étudier les variations de la fonction

$$d = c \sin\varphi \sqrt{\frac{a - c\cos\varphi}{a + c\cos\varphi}},$$

quand φ varie de 0 à π.

En prenant la dérivée on a

$$d' = -\frac{c(c^2\cos^3\varphi + ac\cos^2\varphi - a^2\cos\varphi - ac)}{(a + c\cos\varphi)^2\sqrt{\dfrac{a - c\cos\varphi}{a + c\cos\varphi}}}.$$

Considérons l'équation $c^2\cos^3\varphi + ac\cos^2\varphi - a^2\cos\varphi - ac = 0$,

et substituons à $\cos\varphi$ dans le premier membre les valeurs

$$-\infty \qquad -1 \qquad 0 \qquad +1 \qquad +\infty;$$

nous obtenons les signes $\quad - \qquad + \qquad - \qquad - \qquad +$,

par suite l'équation a ses trois racines réelles; l'une d'elles seule est à considérer, c'est celle qui est comprise entre -1 et 0. Cette racine est le cosinus d'un angle β compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

Nous aurons alors le tableau suivant

φ	0	croît	β	croît	π
d	0	croît	*max.*	décroît	0

E. N. BABISIEN.

Autre solution par M. J. LUFRIAUD, lycée de Toulouse.

---

640. — *On donne un cercle O et un point A. Ce point est le sommet d'un angle constant V dont les côtés rencontrent le cercle O aux points M et M'. Trouver le lieu du point de rencontre P des tangentes au cercle en ces deux points. Examiner ce que devient le lieu dans les cas particuliers suivants :*

1° tg V *est nul ou infini ;*

2° *le point* A *se confond avec le centre du cercle ;*

3° *le point* A *est un point du cercle.*

Prenons des axes rectangulaires, l'origine des coordonnées étant O et l'axe des x la droite OA. Soit $OA = a$. L'équation du cercle O est

(1) $$x^2 + y^2 = R^2.$$

Si α et β désignent les coordonnées du point P, l'équation de MM' est

(2) $$\alpha x + \beta y = R^2.$$

Si x_1 et y_1, x_2 et y_2 désignent les coordonnées de M et M', on trouve, en formant les équations aux abscisses et aux ordonnées des points d'intersection de (1) et (2),

(3) $$x_1 + x_2 = \frac{2\alpha R^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad x_1x_2 = \frac{R^2(R^2 - \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2};$$

(4) $$y_1 + y_2 = \frac{2\beta R^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad y_1y_2 = \frac{R^2(R^2 - \alpha^2)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Les coefficients angulaires de AM et AM′ sont $\frac{y_1}{x_1 - a}$ et $\frac{y_2}{x_2 - a}$. On a donc

$$(5) \qquad \operatorname{tg} V = \frac{\frac{y_1}{x_1 - a} - \frac{y_2}{x_2 - a}}{1 + \frac{y_1 y_2}{(x_1 - a)(x_2 - a)}} = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1 - a(y_1 - y_2)}{x_1 x_2 + y_1 y_2 - a(x_1 + x_2) + a^2}.$$

Or, d'après (2), on a $\qquad x_1 = \frac{R^2 - \beta y_1}{\alpha}, \qquad x_2 = \frac{R^2 - \beta y_2}{\alpha}.$

En substituant ces valeurs dans le numérateur de tg V, on a

$$(6) \qquad \operatorname{tg} V = \frac{(y_1 - y_2)(R^2 - a\alpha)}{\alpha[x_1 x_2 + y_1 y_2 - a(x_1 + x_2) + a^2]}.$$

D'après (4), on a

$$(y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = \frac{4R^2\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Si donc on porte dans (6) cette valeur de $(y_1 - y_2)$, ainsi que les valeurs (3) et (4), il vient pour l'équation du lieu de (α, β), la quartique

$$(7) \qquad \operatorname{tg}^2 V[(\alpha^2 + \beta^2)(R^2 - a^2) + 2aR^2\alpha - 2R^4]^2 = 4R^2(a\alpha - R^2)^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2).$$

Cas particuliers. — 1. *a).* — $\operatorname{tg} V = 0$.

Le lieu se compose alors du cercle $\qquad \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0, \qquad (V = 0),$

et de la polaire du point A $\qquad a\alpha - R^2 = 0, \qquad (V = \pi)$

ce qui est évident géométriquement.

(b). — $\operatorname{tg} V = \infty \quad \left(V = \frac{\pi}{2}\right)$. Le lieu est le cercle $\quad (\alpha^2 + \beta^2)(R - a^2) + 2aR^2\alpha - 2R^4 = 0.$

En effet, sur la figure, $OP.OQ = R^2$, le lieu du point P est la figure inverse du lieu du point Q, en prenant O pour centre d'inversion et pour puissance R^2. Or si l'angle V est droit le point Q, milieu de la corde MM′ décrit un cercle ; donc le lieu du point P est aussi un cercle.

2° Si le point A se confond avec le point O, $a = 0$ et l'équation (7) devient

$$\operatorname{tg}^2 V[(\alpha^2 + \beta^2) - 2R^2]^2 = 4R^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2),$$

qui se décompose en

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2R^2 = \pm(\alpha^2 + \beta^2)\cos V,$$

d'où $\qquad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \frac{V}{2}}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \frac{V}{2}}.$

Elle représente deux cercles concentriques au cercle donné, l'un extérieur au cercle

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2R^2 = 0 \qquad \text{(angle droit)},$$

l'autre intérieur. Le premier correspond à V obtus, le second à V aigu.

3° Si le point A est sur le cercle donné, on a $a = R$, et l'équation (7) devient, après l'avoir débarrassée du facteur étranger $(\alpha - R)^2$, $\qquad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{R^2}{\cos^2 V}.$

Le lieu est donc un cercle concentrique au cercle donné et de rayon $\frac{R}{\cos V}$.

En effet, dans ce cas, la corde MM′, vue du point A sous l'angle V, est vue aussi du centre O du cercle sous l'angle constant 2V. Le pôle de cette corde décrit donc bien un cercle de centre O et de rayon $\frac{R}{\cos V}$.

E. N. BARISIEN.

Autre solution de M. G. Rousier.

---

641. — *On considère les coniques circonscrites à un triangle* OAB, *rectangle en* O, *et qui sont telles que la normale au point* O *passe par le milieu de* AB. *Lieu des sommets. Séparer sur le lieu trouvé les sommets d'ellipses des sommets d'hyperboles. Étant donné un sommet d'ellipse, reconnaître s'il appartient au grand axe ou au petit axe de l'ellipse correspondante.*

Prenons pour axes les côtés de l'angle droit du triangle donné et désignons par a et b les longueurs OA et OB. L'équation générale des coniques circonscrites au triangle AOB est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - Aax - Cby = 0.$$

La tangente à l'origine a pour équation $Aax + Cby = 0$; par suite, l'équation de la normale au même point est $Cbx - Aay = 0$.

Pour que cette normale passe au milieu de AB il faut qu'on ait $A = C$; l'équation générale devient alors

$$A(x^2 + y^2 - ax - by) + 2Bxy = 0,$$

ou, en désignant par λ le rapport $\frac{B}{A}$,

$$(1) \qquad f(x,y) \equiv x^2 + 2\lambda xy + y^2 - ax - by = 0.$$

Les directions d'axes de cette conique ont pour coefficients angulaires $+1$ et -1; les équations des axes sont

$$(2) \qquad f'_x + f'_y \equiv 2(1+\lambda)(x+y) - (a+b) = 0,$$

$$(3) \qquad f'_x - f'_y \equiv 2(1-\lambda)(x-y) - (a-b) = 0.$$

Le lieu des sommets se compose donc de deux courbes dont les équations s'obtiennent en éliminant λ entre l'équation (1) et chacune des équations (2) et (3).

Nous trouvons ainsi

$$(x+y)(x-y)^2 - ax^2 - by^2 = 0, \qquad (x-y)(x+y)^2 - ax^2 + by^2 = 0.$$

Construisons la première. Posons $y = tx$, nous obtenons

$$x = \frac{a + bt^2}{(1+t)(1-t)^2}, \qquad y = \frac{(a+bt^2)t}{(1+t)(1-t)^2}.$$

Le tableau qui suit indique les valeurs remarquables et les signes de x et de y

t	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
x	0	$-$	$-\infty$ | $+\infty$	$+$	a	$+$	$+\infty$ | $+\infty$	$+$	0
y	b	$+$	$+\infty$ | $-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$ | $+\infty$	$+$	b

On en déduit la forme de la courbe. Elle admet une asymptote ayant pour coefficient angulaire -1. Pour la déterminer nous calculons

$$y + x = \frac{a + bt^2}{(1-t)^2};$$

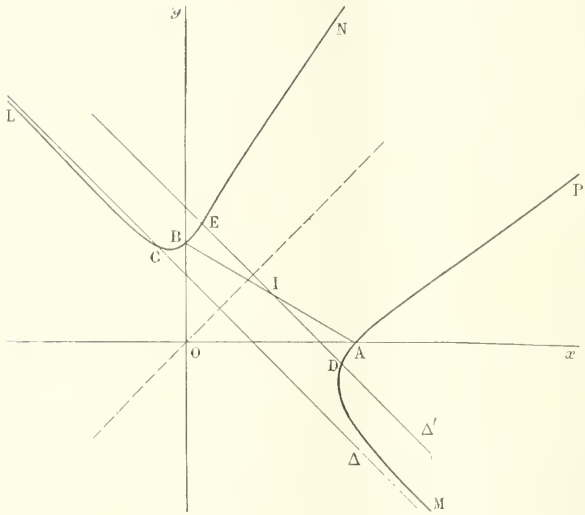
la limite de $y + x$ pour $t = 1$ est $\frac{a+b}{4}$. Par suite l'équation de l'asymptote est

$$(\Delta) \qquad Y + x = \frac{a+b}{4}.$$

Pour avoir la position de la courbe par rapport à l'asymptote, retranchons ces deux dernières équations, nous avons

$$y - Y = \frac{a + bt^2}{(1-t)^2} - \frac{a+b}{4} = \frac{(t+1)[(3b-a)t + 3a - b]}{4(1-t)^2}.$$

Si l'on suppose $a > b$, $(3b - a)t + 3a - b$ est positif pour $t = -1$; par conséquent $y - Y$ a le signe de $t + 1$ quand t varie de $-1 - \varepsilon$ à $-1 + \varepsilon$. On obtient ainsi la position de la courbe par rapport à l'asymptote. Cette droite rencontre la courbe en un point C.



Les branches infinies dans la direction $+1$ sont des branches paraboliques.

Nous avons fait la figure en supposant $3b > a > b$, de sorte que $\frac{a+b}{4} < b$.

Pour qu'un point (x, y) de cette courbe soit sommet d'une ellipse il faut que la valeur de λ correspondante vérifie l'inégalité $1 - \lambda^2 > 0$.

De l'équation (2) nous tirons la valeur de λ en fonction de x et de y.

$$\lambda = -\frac{2(x+y) - (a+b)}{2(x+y)}.$$

Le point (x, y) sera sommet d'ellipse si l'on a

$$1 - \frac{[2(x+y) - (a+b)]^2}{4(x+y)^2} > 0$$

ou

$$4(x+y) - (a+b) > 0.$$

Cette inégalité exprime que le point (x, y) doit être dans la région positive de l'asymptote, c'est-à-dire au-dessus de l'asymptote.

Il en résulte que la branche de courbe CL contient tous les sommets d'hyperboles; le reste de la courbe est formé par des sommets d'ellipses. Le point C est sommet de parabole.

Séparons maintenant les sommets qui appartiennent aux grands axes de ceux qui appartiennent aux petits axes.

Transportons pour cela l'origine des coordonnées au centre de la conique; son équation devient

$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 - \frac{a^2 + b^2 - 2\lambda ab}{4(1-\lambda^2)} = 0.$$

Les carrés des demi-longueurs des axes $x+y=0$ et $x-y$ sont respectivement

$$\frac{a^2+b^2-2\lambda ab}{4(1-\lambda^2)(1-\lambda)} \quad \text{et} \quad \frac{a^2+b^2-2\lambda ab}{4(1-\lambda^2)(1+\lambda)}.$$

Comme $1-\lambda^2$ est positif, il en est de même de $a^2+b^2-2\lambda ab$; par suite, si λ est positif $x+y=0$ est le grand axe et $x-y=0$ le petit. C'est le contraire si λ est négatif.

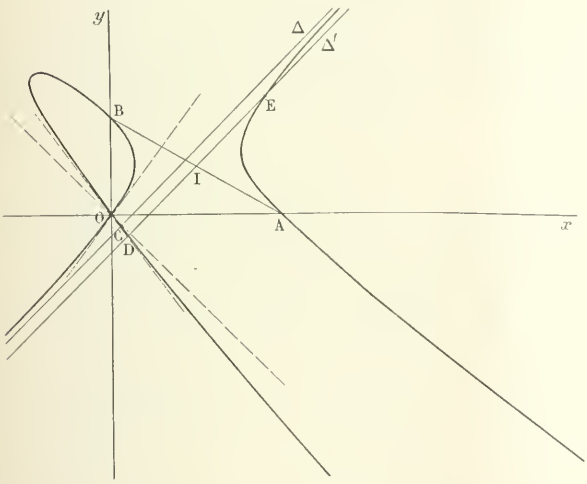
Or la courbe que nous venons de construire contient les sommets situés sur l'axe qui a pour coefficient angulaire -1. Un point (x, y) de cette courbe sera sommet de grand axe si la valeur correspondante de λ, $-\frac{2(x+y)-(a+b)}{x+y}$, est positive, c'est-à-dire si l'on a

$$[2(x+y)-(a+b)](x+y)<0.$$

Construisons la droite Δ' qui a pour équation $2(x+y)-(a+b)=0$. Elle rencontre la courbe en deux points D et E.

Les sommets de grand axe sont situés sur les portions de courbes CBE et DM, et les sommets de petit axe sur les branches EN et DAP.

Les points de séparation D et E sont les points de rencontre de la courbe et du cercle circonscrit au triangle OAB.



On étudiera de la même manière la courbe qui a pour équation

$$(x-y)(x+y)^2-ax^2+by^2=0.$$

Elle admet un point double à l'origine dont les tangentes ont pour coefficients angulaires

$$\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$$

(nous supposons toujours $a>b$).

Elle a pour asymptote la droite Δ

$$y-x=\frac{b-a}{4},$$

qui la rencontre en un point C.

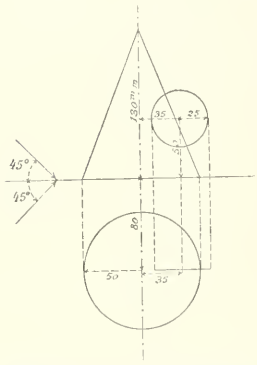
Les sommets d'hyperboles sont situés au-dessus de cette asymptote, et les sommets d'ellipses au-dessous.

Les sommets de grand axe sont situés entre la droite Δ et la droite Δ' qui a pour équation $y-x=\frac{b-a}{2}$, et les sommets de petit axe au-dessous de la droite Δ'.

Bonne solution : M. R. HAUSER, à Clermont-Ferrand.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

712. — *On donne un cône de révolution à axe vertical dont le rayon de base a* 50mm *et la hauteur* 130mm.



Le centre de la base est situé sur le grand axe de la feuille, à 80mm *en avant de la ligne de terre qui coïncide avec le petit axe de la feuille.*

Dans le plan de front de l'axe, on donne un cercle de 25mm *de rayon, dont le centre est à* 50mm *au-dessus du plan horizontal et à* 35mm *à droite de l'axe du cône.*

Par ce cercle passe un cylindre dont les génératrices font sur les deux plans de projection des angles de 45° *avec la ligne de terre, ainsi que l'indiquent les flèches ci-contre.*

On demande de représenter le cône avec l'entaille qu'y a faite le cylindre supposé enlevé.

On indiquera : 1° *la construction d'un point quelconque avec la tangente en ce point;* 2° *celle des points sur le contour apparent tant du cône que du cylindre, ce dernier ne figurant que comme ligne de construction.*

(*École des Ponts et Chaussées, Cours préparatoires, 1897.*)

Nous emploierons des plans auxiliaires passant par le sommet (s, s') du cône et parallèles aux génératrices du cylindre ; tous ces plans contiendront la parallèle $(s\sigma, s'\sigma')$ aux génératrices du cylindre. La trace horizontale d'un plan auxiliaire passera par σ et sa trace sur le plan de front de S, plan qui contient la directrice du cylindre, passera par (s, s'). Soit $\sigma\mu$ la trace horizontale d'un plan auxiliaire qui coupe le cône suivant la génératrice $(s\mu, s'\mu')$; l'intersection de ce plan auxiliaire et du plan de la directrice circulaire du cylindre est $(sj, s'j')$ qui coupe cette directrice en deux points dont l'un est projeté verticalement en k', en sorte que $k'm'$ est la projection verticale d'une génératrice du cylindre contenue dans le plan auxiliaire. Cette génératrice et la génératrice $(s\mu, s'\mu')$ du cône se rencontrent en un point (m, m') de l'intersection des deux surfaces.

Un plan auxiliaire donnera quatre points de l'intersection, puisqu'il contient deux génératrices de chaque surface.

Déterminons la tangente au point (m, m'); le plan tangent au cône en ce point a pour trace horizontale $\mu\tau$ et il coupe le plan de la directrice du cylindre suivant $(s\tau, s'\tau')$. Le plan tangent au cylindre au point (m, m') a sa trace sur le plan de la directrice projetée verticalement en $k'l'$ et nous avons en (t, t') un point de l'intersection des deux plans tangents. La tangente en (m, m') est alors $(mt, m't')$.

Faisant varier $\sigma\mu$ autour de σ, nous aurons autant de points que nous voudrons de l'intersection des deux surfaces.

Plans limites. — Un des plans limites a pour trace horizontale σl tangente à la base du cône; il donne les deux points (v, v') et (w, w') de l'intersection; les génératrices $(pv, p'v')$ et $(qw, q'w')$ du cylindre qui passent par ces points sont tangentes à la courbe.

L'autre plan limite a pour trace sur le plan de la directrice du cylindre la tangente $s'e'$ à cette directrice et donne les points (u, u') et (z, z') de l'intersection en lesquels les tangentes sont les génératrices $(sg, s'g')$ et $(sh, s'h')$ du cône qui passent par ces points.

Puisque l'un des plans limites est tangent au cône, et l'autre tangent au cylindre, il y a arrachement des deux surfaces et par conséquent une seule courbe d'intersection.

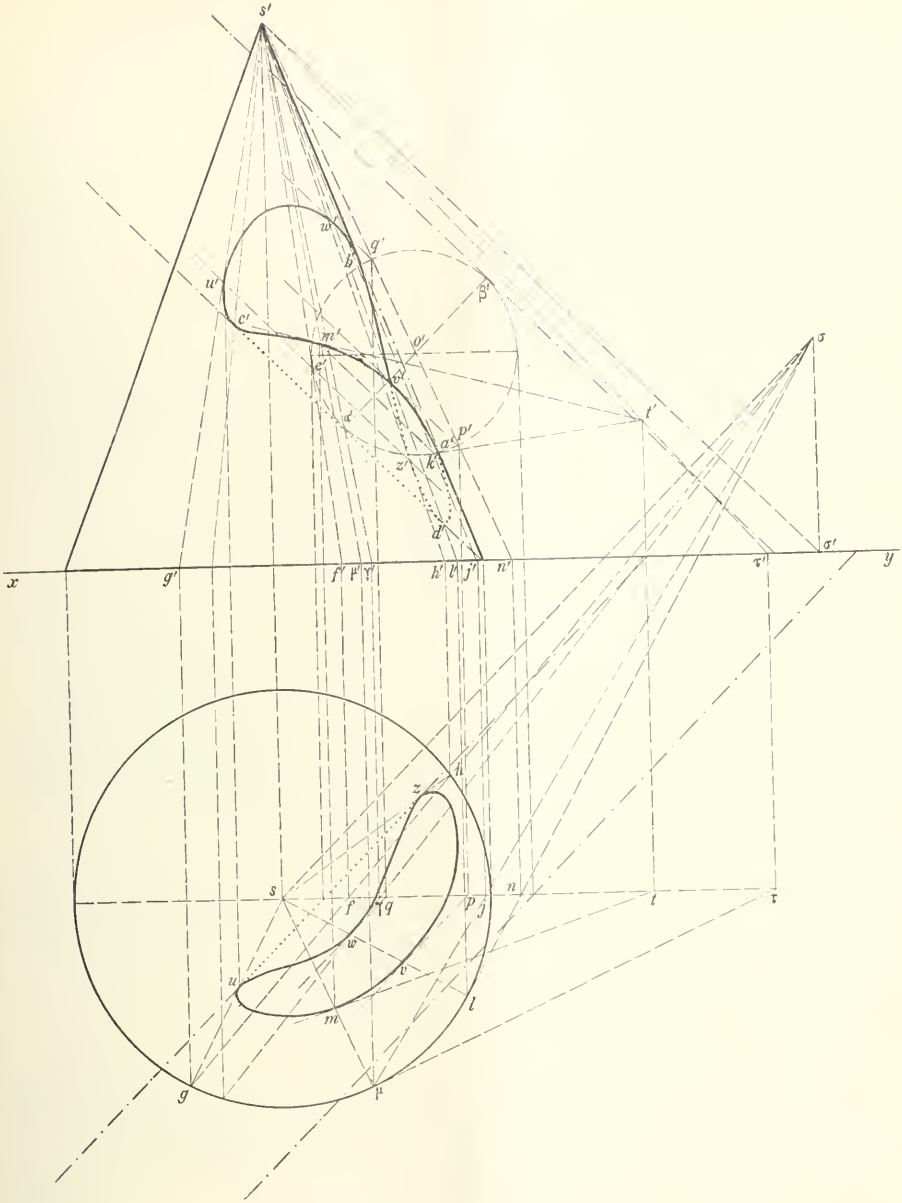
Points sur les contours apparents. — Le plan de front, qui passe par le sommet du cône, contient la directrice du cylindre, et nous avons immédiatement en a' et b' les projections verticales des points de la courbe situés sur le contour apparent vertical du cône.

Cherchons ceux appartenant au contour apparent vertical du cylindre; pour cela si nous prenons la génératrice $c'd'$, le plan auxiliaire qui la contient a pour trace sur le plan de front de S la droite $s'\alpha'\gamma'$, d'où le plan auxiliaire de trace horizontale $\sigma\gamma$ qui donne les points c' et d'.

On a d'une manière analogue ceux sur le contour apparent horizontal du cylindre.

La ligne des *points doubles* en projection verticale est $\alpha'\beta'$, projection verticale de l'intersection des plans des contours apparents verticaux des deux surfaces.

Représentation du solide. — Nous nous proposons de représenter le cône supposé plein et existant seul, en enlevant la partie contenue dans le cylindre.


s'
w'
g'
b'
u'
β'
c'
m'
o'
e'
σ
t'
d'
p'
a'
z'
k'
d'
σ'
x
g'
f'
μ'
γ'
h'
l'
j'
n'
τ'
y
h
z
s
f
q
p
j
n
t
τ
w
v
u
l
m
g
μ

Occupons-nous d'abord de la projection verticale; la portion $a'b'$ de génératrice de contour apparent vertical du cône est intérieure au cylindre, et, par suite, doit être enlevée. Tout le reste du contour apparent subsiste.

Toute la portion $a'c'b'$ de la courbe, tracée sur la partie antérieure du cône est vue sur le cône et par suite vue dans le solide restant; l'autre partie $a'd'b'$ est cachée sur le cône, mais l'arc qui va de b' au point double est vu par l'entaille faite par le cylindre et seul le reste est caché. Quant à la partie $c'd'$ de la génératrice de contour apparent du cylindre, nous l'avons conservée pour limiter le fond de l'entaille faite dans le cône solide; cette portion $c'd'$ est cachée.

En projection horizontale tout est vu, car la courbe est tracée sur la nappe inférieure du cône; pour limiter le fond de l'entaille, nous avons conservé la partie de génératrice de contour apparent du cylindre comprise entre ses points de rencontre avec la courbe; cette partie est d'ailleurs cachée. N. C.

M. E. L'Hoste a envoyé une épure exacte.

PHYSIQUE ET CHIMIE

620. — *Un calorimètre de laiton pesant* 500^{gr} *contient* 1^{kg} *de glace à la température initiale de* $-10°$. *Avec une vitesse constante, on fait tomber dans le calorimètre un filet d'eau à* $80°$ *de façon que dans chaque minute, le poids d'eau écoulé soit de* 50^{gr}.

On supposera que le calorimètre ne subit aucune perte de chaleur et que le mélange se fait instantanément.

On prendra pour chaleur spécifique du laiton 0,095;

id. id. de la glace 0,5;

id. pour chaleur de fusion de la glace à 0° .... 79^{cal}.

On demande :

1° *Au bout de combien de temps la température aura atteint* 0°;

2° *Au bout de combien de temps elle aura atteint* $+10°$;

3° *D'établir la marche de la température en fonction du temps et de la représenter par une courbe. On portera les temps en abscisses et les températures en ordonnées.*

(*École des Mines de Saint-Étienne, 1896.*)

1. Soit x le temps cherché et, par conséquent, $50x$ le poids d'eau écoulé. La chaleur nécessaire pour réchauffer de $-10°$ à 0° le calorimètre et la glace qu'il contient a été fournie par $50x$ grammes d'eau qui se sont refroidis de 80° à 0° puis congelés à 0°. On l'exprime par l'équation

$$500 \times 0{,}095 \times 10 + 1000 \times 0{,}5 \times 10 = 50x(80 + 79),$$

d'où

$$x = 0^{min},689.$$

2. Soit y le temps cherché et, par conséquent, $50y$ le poids d'eau écoulé. La chaleur nécessaire pour réchauffer de $-10°$ à $+10°$ le calorimètre, pour réchauffer la glace de $-10°$ à 0°, la fondre à 0° et réchauffer l'eau de fusion de 0° à 10° a été fournie par $50y$ grammes d'eau qui se sont refroidis de 80° à 10°. On l'exprime par l'équation

$$500 \times 0{,}095 \times 20 + 1000(0{,}5 \times 10 + 79 + 10) = 50y \times 70,$$

d'où

$$y = 27^{min},129.$$

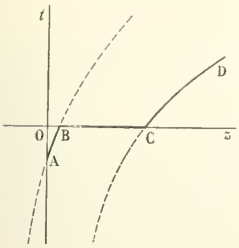
3. Soit z le temps et t la température.

I. — *Avant que la glace soit fondue,* le calorimètre va de $-10°$ à $t°$, l'eau qu'on verse se refroidit de 80° à 0°, se congèle à 0° et la glace qui en résulte se refroidit de 0° à $t°$; on a l'équation

$$500 \times 0{,}095(t + 10) + 1000 \times 0{,}5(t + 10) = 50z(80 + 79 - 0{,}5t),$$

$$t = \frac{7950z - 5475}{547{,}5 + 25z},$$

hyperbole dont les asymptotes sont $t = 318$ et $z = -21,9$.



La partie AB comprise entre $z = 0$ et $z = 0,689$ se rapporte seule à la question.

II. — *Pendant que la glace fond*, la température reste stationnaire à 0°, ce qui donne le segment de droite BC.

III. — *Après la fusion de la glace*, le calorimètre va de $-10°$ à $t°$; la glace qu'il contient va de $-10°$ à 0°, fond à 0° et l'eau de fusion va de 0° à $t°$; l'eau ajoutée se refroidit de 80° à $t°$; on a l'équation

$$500 \times 0,095(t + 10) + 1000(0,5 \times 10 + 79 + t) = 50z(80 - t),$$

$$t = \frac{4000z - 84475}{1047,5 + 50z},$$

hyperbole dont les asymptotes sont $t = 80$ et $z = -20,9$.

On trouve en particulier $t = 0$ pour $z = 21^{\text{min}},119$; c'est le temps au bout duquel toute la glace a fondu. La partie CD de la courbe qui correspond à des abscisses supérieures se rapporte seule à la question.

Assez bonne solution de M. R. Pierrat. Quelques fautes de calcul dans celle de M. J. Gauthier.

---

621. — *On a un mélange de sulfate de potassium et de sulfate de sodium dont le poids est de* 1^{gr}. *On le dissout dans l'eau et on traite la liqueur par un excès de chlorure de baryum. Le poids du précipité est de* $1^{\text{gr}},5$.

On demande quelles étaient les quantités de sulfate de sodium et de sulfate de potassium dans le mélange primitif.

On prendra pour poids atomiques :

Baryum, 137 ; *potassium*, 39 ; *sodium*, 23 ; *soufre*, 32 ; *oxygène*, 16.

(*École des Mines de Saint-Étienne, 1896.*)

Soient x et y les poids respectifs de sulfate de potassium et de sulfate de sodium contenus dans le mélange. On a

$$x + y = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{174} + \frac{y}{142} = \frac{1,5}{233},$$

d'où $x = 0^{\text{gr}},467$ et $y = 0^{\text{gr}},533$.

J. GAUTHIER.

CONCOURS DE 1897 (*Suite*).

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Physique et Chimie.

I. — **723.** — Un tube cylindrique de 10^{mm} de diamètre, fermé à l'une de ses extrémités et gradué en volumes à partir de cette extrémité, est renversé sur une cuve à mercure contenant une quantité indéfinie de liquide. On y introduit une certaine quantité d'oxygène sec, dont on mesure le volume, le niveau du mercure dans le tube se tenant à 5^{cm} au-dessus du niveau extérieur.

Pression atmosphérique. . 740^{mm} de mercure; Température. . 10°; Volume d'oxygène. . 100^{cc}.

On introduit alors dans le tube 50^{cc} d'eau pure, débarrassée de gaz par ébullition. La température s'étant élevée à 15°, la pression atmosphérique à 750^{mm}, et la position du tube étant restée invariable, on demande :

1° Quelle sera la pression de l'oxygène dans le tube;

2° A quelle hauteur au-dessus du mercure de la cuve se tiendra le niveau de l'eau dans le tube;

3° De combien il faudra enfoncer le tube pour que le niveau de l'eau s'y tienne au niveau du mercure de la cuve.

Tension maximum de la vapeur d'eau à 15°.	$12^{mm},7$ de mercure
Coefficient d'absorption de l'oxygène par l'eau, à 15°, le gaz étant ramené à 0°.	0,03
Densité du mercure.	13,6

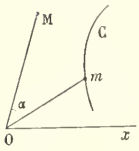
II. — Un carbure d'hydrogène gazeux a pour densité 1,99. Soumis à la combustion, il fournit pour un gramme : $3^{gr},14$ d'anhydride carbonique et $1^{gr},29$ d'eau. Quel est son poids moléculaire?

Expliquer, sur cet exemple, ce que l'on appelle poids moléculaire d'un composé volatil.

Poids atomiques : du carbone. . . . . 12, de l'oxygène. . . . . 16.

Mathématiques.

724. — On considère deux points m et M tels que, O étant l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires ou polaires, OM fasse avec Om, dans le sens direct, un angle de valeur donnée α, et que le rapport $\frac{OM}{Om}$ soit de même donné et égal à k.



Lorsque le point m décrira une courbe C, M décrira une autre courbe C′, transformée de la première et qui lui sera semblable.

I. — Supposant que l'équation de la courbe C est donnée sous l'une des deux formes $f(x, y) = 0$ ou $p = \varphi(\omega)$, on demande de trouver l'équation correspondante de la transformée C′.

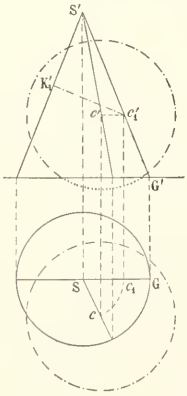
II. — On prend pour C une hyperbole de paramètre p et d'excentricité e, ayant un foyer à l'origine et l'axe des x (ou axe polaire) pour axe transverse, et on pose en outre

$$k = \frac{1}{\cos \alpha};$$

faisant varier α on demande de montrer que les directrices des hyperboles C′ resteront constamment tangentes à des paraboles, et, en outre, de déterminer et discuter les lieux :

1° Des extrémités des diamètres conjugués, soit de la direction de l'axe des x, soit de celle de l'axe des y;

2° De l'intersection de l'axe transverse de l'hyperbole C′ avec le cercle passant par le deuxième foyer de cette hyperbole et ses points d'intersection avec l'axe des y.



Calcul trigonométrique.

Résoudre le triangle ABC dont on connaît

la base AB = $459^{m},9626$, la hauteur CK = $154^{m},0374$, l'angle CAB = 59° 37′ 42″.

Après avoir calculé AC, on déterminera les autres inconnues au moyen de ce côté, de la base AB et de l'angle compris CAB.

Épure de géométrie descriptive.

Intersection d'un cône de révolution droit avec une sphère dont le centre c est sur une génératrice quelconque du cône, et dont le rayon est déterminé comme suit :

On fait tourner le centre c de la sphère autour de l'axe du cône jusqu'à ce qu'il rejoigne la génératrice G de contour apparent, et le rayon de la sphère est égal à la perpendiculaire $c'_1K'_1$ abaissée de la nouvelle position du centre sur l'autre génératrice du contour apparent du cône.

Tangente en un point de l'intersection;

Représentation à part du solide commun;

Développement de sa surface conique.

QUESTIONS PROPOSÉES

725. — On considère toutes les paraboles qui ont pour directrice une droite donnée Oy et qui passent par un point donné A. Soit P l'une d'elles. On mène la tangente en A à la parabole P, et on prend le point B de cette tangente symétrique du point A par rapport au point où elle coupe Oy.

1° Si par le point B on mène la seconde tangente BC à la parabole P, le point de contact étant C, la droite AC est normale en A à la parabole.

2° Trouver le lieu géométrique du point milieu de AC.

3° Trouver le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

4° Le point B décrit une droite. Trouver le lieu géométrique du pôle de cette droite par rapport à chaque parabole P.

5° Trouver le lieu géométrique du sommet de la parabole P.

726. — On considère deux axes rectangulaires Ox, Oy et la droite qui a pour équation

$$t(t^3 - 2)x - (2t^3 - 1)y + 3at^2 = 0,$$

t désignant un paramètre variable.

On demande d'abord l'enveloppe de cette droite, puis les coordonnées du point A où elle touche son enveloppe et celles du point B où elle rencontre à nouveau la courbe.

On demande, en outre, le lieu du milieu de AB, et aussi le lieu du symétrique de O par rapport à la droite AB.

G. Pouilliart.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne, par M. J. RICHARD, ancien élève de l'Ecole normale supérieure, professeur au lycée de Tours. — Paris, *Société d'éditions scientifiques*.

C'est une tâche ingrate et assez délicate que d'extraire de l'enseignement des mathématiques spéciales, tel qu'on le donne aujourd'hui dans les lycées, les principales méthodes de géométrie moderne, éparses dans cet enseignement et exposées presque toutes accessoirement, en passant. Il faut savoir gré à M. Richard de n'avoir pas reculé devant cette tâche et d'avoir réuni dans un volume d'une lecture aisée et d'un maniement facile, tout ce qu'il est essentiel au bon élève de connaître sur ce point, pour approfondir les sujets qui lui sont exposés, pour les pénétrer d'une façon plus intime et même pour aborder des questions plus hautes, plus complexes. Celui qui ne vise pas seulement la réussite à un examen plus ou moins difficile, mais qui tient encore à développer son esprit et à acquérir des connaissances véritablement efficaces, doit s'imprégner de ces idées et éclairer sa route par l'emploi réfléchi des méthodes qui en découlent.

Mon intention n'est pas de donner ici une analyse complète du volume publié par M. Richard. Il me suffira d'en donner un rapide aperçu, par l'indication sommaire des matières qu'il traite.

Le rapport anharmonique, les pôles et les polaires dans le cercle et dans la sphère, les figures polaires réciproques, l'homologie, l'homographie, l'involution, l'introduction des éléments imaginaires et des éléments à l'infini dans le plan et dans l'espace, l'inversion, forment l'objet des dix premières leçons. Les sept leçons suivantes sont consacrées aux sections coniques et aux surfaces du second ordre. Dans la dix-huitième leçon l'auteur étudie les polaires réciproques par rapport aux coniques ou aux surfaces du second ordre ; dans la dix-neuvième il expose rapidement la théorie des transversales, et, dans la vingtième, le théorème de Bézout, puis une théorie élémentaire des cubiques planes. Dans la vingt-et-unième leçon, l'auteur rattache d'une façon très heureuse l'étude des biquadratiques gauches à celle des cubiques planes, en se servant de l'idée si féconde de projection. Il traite ensuite des faisceaux de quadriques, et, en particulier, des quadriques homofocales ; puis il consacre une leçon aux cubiques gauches et une autre à l'étude sommaire des surfaces cubiques, faite surtout au point de vue des droites qu'elles renferment.

Les trois dernières leçons ont pour objet la théorie géométrique du calcul des imaginaires, les divers sys-

tèmes de coordonnées tétraédriques et enfin un exposé très intéressant des principales notions de la géométrie non-euclidienne.

Ce livre, à l'aide duquel les bons élèves de Mathématiques spéciales pourront préciser les notions de géométrie qui leur sont données si rapidement, sera pour eux un précieux auxiliaire.

E. H.

Traité d'Algèbre élémentaire, par MM. N. COR, professeur agrégé au lycée Condorcet, et J. RIEMANN, docteur ès sciences, professeur agrégé au lycée Louis-le-Grand. — Paris, Nony et Cie.

En écrivant leur Traité d'algèbre élémentaire, MM. Cor et Riemann ont eu pour principal objectif d'apporter une clarté et une rigueur absolues dans toutes les questions d'algèbre qui font partie du programme de Mathématiques élémentaires, et ils y ont pleinement réussi. Le souci de ne laisser obscurs aucun raisonnement ni aucune définition se rencontre à chaque page, et aucun mot nouveau n'est employé sans être nettement expliqué, de façon à ne donner lieu à aucune ambiguïté.

Tous ceux qui enseignent ou approfondissent les débuts de l'algèbre savent combien il est difficile de présenter la théorie des nombres algébriques, celle des opérations sur ces nombres, ainsi que celle des opérations sur les polynomes; on risque de manquer de rigueur ou d'entrer dans des longueurs fatigantes. MM. Cor et Riemann ont évité ce double écueil et le premier chapitre de leur algèbre est un modèle d'exposition de ces importantes théories.

Les auteurs du traité actuel ne craignent pas de faire appel, à propos des questions de limites, de fonctions et de continuité, aux notions que l'on a l'habitude de donner dans les cours de Mathématiques spéciales; mais ces notions, telles qu'elles sont présentées ici, sont accessibles à tout élève de Mathématiques élémentaires et lui sont même indispensables. Il vaut mieux donner sur ces points fondamentaux des explications précises, sans craindre les longueurs, que de laisser des confusions dans l'esprit de ceux qui approfondissent ces questions; c'est ce que les auteurs de ce traité ont compris, et il faut les féliciter d'avoir insisté sur ces points délicats; ils n'ont pas craint d'aller jusqu'aux dérivées pour traiter complètement la variation des fonctions ni de considérer le logarithme comme l'inverse de la fonction exponentielle.

Tous les professeurs ne peuvent que gagner à la lecture de ce Traité d'algèbre; les bons élèves d'Elémentaires l'étudieront avec profit, ainsi que tous ceux, soit candidats au baccalauréat, soit élèves de Spéciales ou étudiants des facultés, qui sont soucieux d'établir leurs connaissances en algèbre sur des bases solides, car c'est là une condition essentielle d'une bonne éducation mathématique.

H. VOGT.

Erratum. — Question proposée n° 715 : Le point I indiqué dans la 4e partie est le point commun aux droites AA', TT' et NN'.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

8e Année. N° 5. Février 1898.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES SURFACES DE STEINER

Par M. J. Richard, Professeur au lycée de Tours.

Les surfaces de Steiner sont les surfaces telles que les coordonnées d'un point soient des fonctions rationnelles du second degré de deux paramètres p et q. Dans la question de géométrie proposée cette année au concours général de Mathématiques spéciales, il était question d'une telle surface. Je me propose ici d'étudier ses propriétés en partant de la définition donnée plus haut.

Nous emploierons les coordonnées homogènes x, y, z, t, et, au lieu des deux paramètres p et q, nous en emploierons trois λ, μ, ν, en posant $p = \frac{\lambda}{\nu}$ $q = \frac{\mu}{\nu}$, pour avoir des formules homogènes; ainsi les coordonnées x, y, z, t d'un point de la surface seront proportionnelles à quatre polynomes f_1, f_2, f_3, f_4 du second degré, homogènes en λ, μ, ν.

I. — *La surface ainsi définie est du 4e degré.*

Pour trouver les points où elle est coupée par une droite, remplaçons dans les équations de la droite x, y, z, t par les quatre polynomes. Nous obtenons ainsi deux équations du 2e degré en λ, μ, ν, qui, lorsque l'on considère λ, μ, ν comme les coordonnées homogènes d'un point du plan, représentent deux coniques. Ces deux coniques se coupant en quatre points, la droite donnée et la surface se coupent elles-mêmes en quatre points. On voit qu'il y aurait exception si les quatre coniques $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ $f_4 = 0$ avaient un ou plusieurs points communs. Nous supposons qu'il n'en est rien.

Remarque. — On voit qu'à chaque point de la surface on peut faire correspondre le point du plan dont les coordonnées homogènes sont λ, μ, ν. On dit que la surface est représentable sur le plan. Nous nous servirons dans ce qui suit de ce mode de correspondance.

II. — *Un plan quelconque coupe la surface suivant une courbe unicursale du 4e degré, un plan tangent la coupe suivant deux coniques.*

Si dans l'équation d'un plan nous remplaçons x, y, z, t par les quatre polynomes, nous obtenons une équation du 2e degré en λ, μ, ν qui représente une conique ; cette conique étant unicursale, on peut exprimer λ, μ, ν par des fonctions du 2e degré d'un paramètre θ ; alors x, y, z, t seront des fonctions rationnelles du 4e degré de ce paramètre, ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

Si le plan est tangent, la courbe doit avoir un point double au point de contact, outre les trois qu'elle a déjà. Elle doit donc se décomposer. Sa représentation plane doit donc se décomposer elle-même en deux droites : soit $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$ l'équation d'une de ces droites. Tirant ν de cette équation et portant dans f_1, f_2, f_3, f_4, on a x, y, z, t en fonction homogène du second degré de deux paramètres λ et μ : ce sont là les équations d'une conique dans l'espace.

III. — *La surface est de 3e classe.*

Pour écrire que le plan $ux + vy + wz + ht = 0$ touche la surface, il faut écrire que la conique $uf_1 + vf_2 + wf_3 + hf_4 = 0$ se décompose. Or ceci donne évidemment une relation du 3e degré en u, v, w, h.

IV. — *La surface contient trois droites doubles concourantes.*

La section de la surface par un plan quelconque présentant trois points doubles, le lieu de ces points quand le plan se déplace est une cubique gauche qui peut se décomposer.

Si cette cubique ne se décomposait pas en trois droites concourantes, par un point P quelconque on pourrait mener au moins une droite (sécante double) la rencontrant deux fois ; c'est là une propriété bien connue, résultant du reste immédiatement de ce que la projection d'une cubique générale (faite d'un point P) est une cubique plane à point double. Par un point P *de la surface,* menons donc une sécante rencontrant la ligne double en Q et R ; la droite PQR rencontrerait alors la surface en 5 points, car Q et R comptent pour deux; elle serait située sur la surface, et celle-ci serait réglée. Comme cela n'a pas lieu, c'est que la cubique se réduit à trois droites concourantes.

Remarque. — A un point d'une des droites doubles correspondent deux points dans la représentation plane ; considérons, par exemple, la surface $x = \mu\nu$, $y = \nu\lambda$, $z = \lambda\mu$, $t = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$. Les lignes doubles sont les axes de coordonnées. Au point $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ correspond $\lambda = 0$, et μ et ν ont leur rapport déterminé par l'équation du 2e degré $a = \frac{\mu\nu}{\mu^2 + \nu^2}$.

Pour trouver les droites doubles on peut procéder comme il suit. Une conique sur la surface a pour représentation plane une droite $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$. Tirant ν de cette équation, et portant dans x, y, z, t, on aura les coordonnées d'un point de la conique en fonction homogène de λ et μ, $x = \varphi_1$, $y = \varphi_2$, $z = \varphi_3$, $t = \varphi_4$.

Le plan $ux + vy + wz + ht = 0$ sera le plan de la conique si l'équation $u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + h\varphi_4 = 0$ est une identité.

En écrivant qu'il en est ainsi on aura des équations linéaires en u, v, w, h, donnant les rapports mutuels de ces quantités. Pour écrire que la conique se réduit à une droite, on écrira que le plan de la conique est indéterminé, c'est-à-dire que dans les équations linéaires en u, v, w, h, les mineurs du 1er ordre du déterminant sont nuls ; on aura ainsi des équations qui donneront $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$.

Ceci montre que la représentation plane de l'une des lignes doubles est une droite.

V. — *Il existe quatre plans touchant la surface tout le long d'une conique.*

Pour que le plan $ux + vy + wz + ht = 0$ coupe la surface suivant une conique double, il est évidemment nécessaire et suffisant que la conique

$$uf_1 + vf_2 + wf_3 + hf_4 = 0 \tag{1}$$

se réduise à deux droites confondues. Désignons pour abréger par

$$A\lambda^2 + A'\mu^2 + A''\nu^2 + 2B\mu\nu + 2B'\nu\lambda + 2B''\lambda\mu = 0 \tag{2}$$

cette équation ; A, A', etc., seront des fonctions linéaires et homogènes de u, v, w, h.

Pour que le premier membre de l'équation (2) soit un carré parfait, il faut comme on sait que

$$(3) \qquad A'A'' - B^2 = 0, \qquad A''A - B'^2 = 0, \qquad AA' - B''^2 = 0;$$

$$(4) \qquad AB - B'B'' = 0, \qquad A'B' - B''B = 0, \qquad BB' - A''B'' = 0,$$

et ces six conditions se réduisent toujours à trois distinctes.

Considérons u, v, w, h comme les coordonnées d'un point de l'espace. Les équations (3) et (4) représenteront six surfaces du 2e ordre et à chaque point commun à toutes ces surfaces correspond un plan touchant la surface donnée suivant une conique double.

Il ne saurait y avoir de points communs dans l'un des trois plans $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$; supposons, par exemple, $B'' = 0$; les équations (3) montrent que l'une des quantités A, A', A par exemple, est nul, alors B' doit être nul d'après les mêmes équations, il faudrait donc que le point où se coupent les trois plans $B' = 0$, $B'' = 0$, $A = 0$ fût sur la première surface (3), ce qui n'a pas lieu en général. BB'B'' étant différent de zéro, nous n'avons plus à considérer que les équations (4). Les trois surfaces qu'elles représentent se coupent deux à deux suivant une droite et une cubique gauche. Ces surfaces ont huit points communs; mais en supprimant les points

$$\begin{array}{lll} A = 0, & B' = 0, & B'' = 0; \\ A' = 0, & B'' = 0, & B = 0; \\ A'' = 0, & B = 0, & B' = 0; \\ B = 0, & B' = 0, & B'' = 0, \end{array}$$

il n'en reste que quatre, ce qui démontre la proposition.

Par exemple, pour la surface

$$x = \mu\nu, \qquad y = \nu\lambda, \qquad z = \lambda\mu, \qquad t = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

les quatre coniques sont

$$\lambda + \mu + \nu = 0, \qquad \lambda - \mu + \nu = 0, \qquad -\lambda + \mu + \nu = 0, \qquad \lambda + \mu - \nu = 0.$$

DÉMONSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ DES BIQUADRATIQUES GAUCHES

par M. **J. Lemaire**, Professeur au lycée Voltaire.

Théorème. — *Le rapport anharmonique des quatre plans tangents à une biquadratique, qu'on peut mener par une corde de cette courbe, est constant quand la corde varie.*

Cette propriété bien connue peut être établie comme il suit :

Soient d'abord deux cordes AB et AC qui se coupent sur la courbe; projetons la courbe sur un plan en prenant A pour point de vue; la projection est une cubique passant par les projections b et c de B et C; le rapport anharmonique des plans tangents à la courbe menés par AB est égal à celui des tangentes à la cubique menées par le point b; de même pour la corde AC et le point c. Mais on sait que le rapport anharmonique des 4 tangentes à la cubique issues de b est égal à celui des tangentes issues de c; donc le rapport anharmonique des plans tangents à la biquadratique menés par la corde AB est égal à celui des plans tangents menés par la corde AC.

On déduit immédiatement de là le théorème dans le cas général de deux cordes quelconques, AB et CD : il suffit de passer de l'une à l'autre par l'intermédiaire de la corde BC.

Le même procédé permet d'établir la proposition suivante :

Si par quatre points fixes d'une cubique gauche et une corde variable de cette cubique on fait passer quatre plans, le rapport anharmonique de ce faisceau de plans est constant.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

637. — *On considère une ellipse* (E) *dont les deux foyers sont sur un cercle fixe* (C), *l'un, fixe,* F, *l'autre, mobile,* F′, *et tangente en outre à ce cercle en un point variable* I.

Trouver et construire :

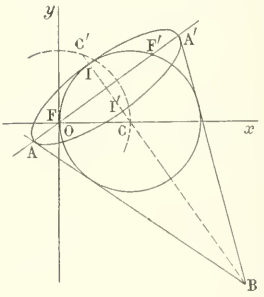
1° *Le lieu des sommets des ellipses* (E) ;

2° *Le lieu des ombilics des ellipses* (E) *et du cercle* (C) ;

3° *L'enveloppe des directrices de ces ellipses ;*

4° *L'enveloppe de la sécante commune à l'ellipse* (E) *et au cercle* (C) *qui est parallèle à la tangente en* I.

Prenons pour axe des x le diamètre du cercle fixe qui passe en F et pour axe des y la tangente à l'extrémité de ce diamètre ; désignons par a le rayon du cercle fixe et par (α, β) les coordonnées du point I où l'ellipse touche le cercle ; nous aurons pour équation du cercle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$; puis, entre α et β, la relation suivante



$$(1) \qquad \alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha = 0, \qquad \text{ou} \qquad (\alpha - a)^2 + \beta^2 = a^2.$$

Cela posé, l'ombilic associé au point I est un certain point B du diamètre CI ; appelons α' et β' ses deux coordonnées ; nous aurons entre ces nombres et les coordonnées du point I la relation $\dfrac{\alpha' - a}{\alpha - a} = \dfrac{\beta'}{\beta}$; nous pouvons donc écrire $\alpha' = a + \lambda(\alpha - a)$, $\beta' = \lambda\beta$, λ étant un paramètre variable. D'autre part, l'équation tangentielle du cercle est $a^2v^2 - 2auw - w^2 = 0$; par suite, celle de l'ellipse est

$$\mu(a^2v^2 - 2auw - w^2) + (\alpha u + \beta v + w)[(a + \lambda\alpha - \lambda a)u + \lambda\beta v + w] = 0,$$

pour certaines valeurs de μ et de λ. Il nous reste maintenant à exprimer que l'origine est foyer, c'est-à-dire que les termes indépendants de w se réduisent à $u^2 + v^2$, à un facteur constant près ; ceci donne

$$\alpha(a + \lambda\alpha - \lambda a) = \lambda\beta^2 + \mu a^2, \qquad a + \lambda\alpha - \lambda a + \lambda\alpha = 0 ;$$

nous en déduisons $\lambda = \dfrac{a}{a - 2\alpha}$, $\mu = -\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{a(a - 2\alpha)}$; par conséquent, l'équation tangentielle de l'ellipse (E) est, toutes réductions faites,

$$(2) \qquad a\alpha^2(u^2 + v^2) - 2\beta^2uw + 2\beta(\alpha - a)vw - aw^2 = 0,$$

et les coordonnées de l'ombilic B sont

$$(3) \qquad \alpha' = \frac{-a\alpha}{a - 2\alpha}, \qquad \beta' = \frac{a\beta}{a - 2\alpha}.$$

Pour simplifier l'équation de l'ellipse, nous avons tenu compte de la relation (1).

1. Les coordonnées du centre sont données par l'équation $f'_w = 0$; ce sont donc $x_0 = \dfrac{\beta^2}{a}$, $y_0 = -\dfrac{\beta(\alpha - a)}{a}$. Désignons alors par u, v, w les coordonnées d'une tangente en un des sommets ; les coordonnées cartésiennes du sommet seront $\dfrac{f'_u}{f'_w}$, $\dfrac{f'_v}{f'_w}$, et, par suite, le coefficient angulaire de la droite qui joint ce point au centre est $\dfrac{f'_v - y_0 f'_w}{f'_u - x_0 f'_w}$; en exprimant que le produit de ce nombre

par $-\frac{u}{v}$ est égal à -1, nous aurons une nouvelle relation que doivent vérifier les coordonnées des tangentes aux sommets ; cette relation se simplifie aisément et se décompose en deux,

$$\beta u - (\alpha - a)v = 0 \qquad \text{et} \qquad (\alpha - a)u + \beta v = 0.$$

La première nous conduit à prendre $u = \alpha - a$, $v = \beta$; l'équation tangentielle de l'ellipse donne alors $w = \pm a\alpha$; à cette relation correspondent donc les deux tangentes aux sommets que voici

$$(\alpha - a)x + \beta y - a\alpha = 0, \qquad (\alpha - a)x + \beta y + a\alpha = 0.$$

La première est la tangente au point I et conduit au lieu de ce point, qui est le cercle proposé. La seconde est la tangente au point I'; ce point est déterminé par cette droite et la perpendiculaire abaissée, soit du centre de l'ellipse, soit du centre du cercle sur cette droite,

$$\beta(x - a) - (\alpha - a)y = 0.$$

Le lieu du point I' s'obtiendra donc en éliminant α et β entre les équations de ces deux droites et la relation $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha = 0$; cette élimination est immédiate et fournit l'équation

$$(4) \qquad (x^2 + y^2 - a^2)^2 - a^2[(x - a)^2 + y^2] = 0,$$

qui représente le lieu.

Cette courbe est un limaçon de Pascal ayant son point double au centre du cercle. Cela est facile à voir géométriquement ; car si l'on décrit du point O comme centre, avec OC pour rayon, un cercle, ce cercle coupe CI en C', et, pour raison de symétrie par rapport à l'axe OF', on a $|CI| = |C'I'| = a$, ce qui montre bien que le point I' décrit une conchoïde du cercle tracé en dernier lieu, par rapport au point C et à la constante a.

Pour avoir le lieu des autres sommets, passons à la seconde relation entre u et v, $(\alpha - a)u + \beta v = 0$; elle donne $u = \beta$, $v = a - \alpha$; l'équation tangentielle de l'ellipse donne alors

$$w^2 + 2a\beta w - a^2\alpha^2 = 0;$$

par conséquent, les tangentes aux sommets de l'axe focal ont pour équations

$$\beta x + (a - \alpha)y + w = 0,$$

w étant donné par la relation précédente. Nous aurons donc le lieu de ces sommets en éliminant w, α et β entre ces deux équations, celle de l'axe focal et la relation $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha = 0$; cette élimination se fait aisément en écrivant l'équation de l'axe focal ainsi, $\frac{\beta}{x} = \frac{a - \alpha}{y} = \rho$. Elle donne l'équation du lieu

$$(5) \qquad [(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2(x^2 + 2y^2)]^2 - 4a^4y^2(x^2 + y^2) = 0;$$

cette équation représente une courbe du 8e degré, dont l'équation en coordonnées polaires est très simple et permet de construire aisément le lieu. Le passage aux coordonnées polaires fournit en effet immédiatement l'équation

$$[\rho^2 - 2a\rho\cos\omega - a^2(1 + \sin^2\omega)]^2 = 4a^4\sin^2\omega;$$

celle-ci se dédouble en

$$\rho^2 - 2a\rho\cos\omega - a^2(1 - \sin\omega)^2 = 0,$$

et

$$\rho^2 - 2a\rho\cos\omega - a^2(1 + \sin\omega)^2 = 0;$$

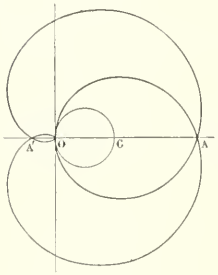
or, ces deux équations représentent la même courbe, car si l'on change dans la seconde ω en $\omega + \pi$, elle devient l'équation en $-\rho$ de la première; donc, pour les valeurs correspondantes ω et $\omega + \pi$, qui définissent les deux directions opposées d'une même droite passant à l'origine, les deux équations donnent les mêmes points.

Maintenant si, dans la première équation, on change ω en $\pi - \omega$, ρ se change en $-\rho$; il y a donc symétrie par rapport à Ox et, de plus, il suffit de faire varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ pour avoir

l'une des moitiés de la courbe. En tirant ρ de la première équation, on obtient

$$\rho = a\left[\cos\omega \pm 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right)\right];$$

sous cette nouvelle forme, on retrouve cette propriété évidente géométriquement que le lieu des milieux des cordes qui passent à l'origine est le cercle décrit sur OC comme diamètre, $\rho = a\cos\omega$. Il n'y a qu'à suivre les variations de la quantité additive $2a\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right)$ et remarquer qu'elle est toujours plus grande que le rayon vecteur du cercle, $a\cos\omega$, pour tracer sans peine la courbe considérée. On peut même, si l'on veut, étudier complètement les variations de chacune des valeurs de ρ.



2. Il y a deux ombilics situés sur l'axe non focal, le point I et le point B. Le lieu du premier est le cercle proposé; le lieu du second s'obtient facilement à l'aide des équations (3) : elles donnent en effet $\alpha = -\frac{a\alpha'}{a-2\alpha'}$, $\beta = \frac{a\beta'}{a-2\alpha'}$, et, en portant ces valeurs dans la relation $\alpha^2+\beta^2-2a\alpha = 0$, nous avons de suite le lieu du point B,

$$3\alpha'^2 - \beta'^2 - 2a\alpha' = 0; \tag{6}$$

c'est une hyperbole ayant pour axe transverse l'axe des x et un sommet à l'origine.

Il y a deux autres ombilics, doubles tous les deux, et situés sur la tangente en I; nous les obtiendrons en coupant la tangente en I par les deux tangentes menées du point B à l'ellipse ou au cercle. Or les tangentes au cercle $C = 0$, issues du point (α', β'), ont pour équation

$$(\alpha'^2+\beta'^2-2a\alpha')C - [(\alpha'-a)x+\beta'y-a\alpha']^2 = 0;$$

en y remplaçant α' et β' par $-\frac{a\alpha}{a-2\alpha}$, $\frac{a\beta}{a-2\alpha}$, nous obtenons l'équation du même couple en fonction des paramètres α et β,

$$(\beta^2-3\alpha^2+2a\alpha)C - [(\alpha-a)x+\beta y+a\alpha]^2 = 0.$$

Il faut éliminer maintenant α et β entre cette équation, la relation (1) et l'équation de la tangente en I au cercle C,

$$(\alpha-a)x+\beta y-a\alpha = 0;$$

de cette dernière, nous tirons $(\alpha-a)x+\beta y = a\alpha$; de la relation (1), $2a\alpha = \alpha^2+\beta^2$, et, en portant dans l'équation du couple des deux tangentes trouvées antérieurement, nous obtenons l'équation plus simple,

$$(\beta^2-\alpha^2)C - 2a^2\alpha^2 = 0.$$

Cette équation est homogène en α et β.

Si donc nous rendons homogène l'équation de la tangente en I à l'aide de la relation

$$\alpha^2+\beta^2-2a\alpha = 0,$$

nous n'aurons plus ensuite qu'à éliminer le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ ou $\frac{\alpha}{\beta}$ entre les deux équations

$$\alpha^2(C+2a^2)-\beta^2C = 0, \qquad \alpha^2(x-2a)+2\alpha\beta y - x\beta^2 = 0;$$

nous trouvons ainsi

$$a^2(C+ax)^2 - Cy^2(C+2a^2) = 0.$$

Posons alors $C_1 \equiv (x-a)^2 + y^2 = C + a^2$; cette équation deviendra

$$a^2[C_1 + a(x-a)]^2 - y^2(C_1^2 - a^4) = 0,$$

ou

$$(a^2 - y^2)C_1^2 + 2a^3C_1(x-a) + a^4C_1 = 0;$$

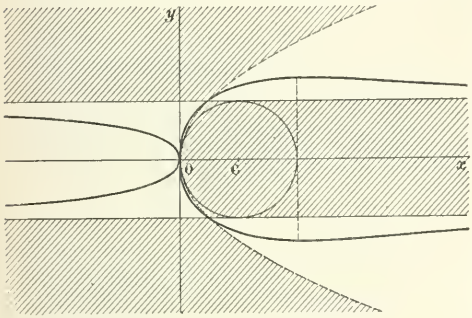
en supprimant le facteur C_1 qui, égalé à 0, représente les deux droites isotropes issues du centre du cercle C, il reste le véritable lieu

$$(a^2 - y^2)C_1 + 2a^3(x-a) + a^4 = 0,$$

ou

$$(7) \qquad y^2(x^2+y^2) - 2axy^2 - a^2x^2 = 0.$$

Pour construire cette courbe, remarquons d'abord qu'elle est symétrique par rapport à Ox, qu'elle admet un point double à l'origine où les deux tangentes sont confondues avec Oy, qu'elle admet pour direction asymptotique réelle Ox et que les deux asymptotes parallèles à cette direction ont pour équations $y = \pm a$; remarquons en outre qu'elle est tout entière à l'extérieur du cercle proposé, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, car son équation peut s'écrire $y^2(x^2+y^2-2ax) - a^2x^2 = 0$; puis enfin, que la forme



$$x^2(y^2 - a^2) + y^2(y^2 - 2ax) = 0$$

donne une nouvelle séparation en régions à l'aide des deux asymptotes et de la parabole $y^2 - 2ax = 0$. Il suffit alors de regarder les coefficients de l'équation du second degré en x

$$x^2(y^2 - a^2) - 2ay^2x + y^4 = 0,$$

et de tenir compte de la condition de réalité pour apercevoir la forme de la courbe. Cette condition montre que y doit être compris entre $-a\sqrt{2}$ et $+a\sqrt{2}$, valeurs qui sont atteintes pour $x = 2a$.

3. Les équations des directrices s'obtiennent facilement au moyen de l'équation tangentielle $E(u, v, w) = 0$.

La directrice, polaire de l'origine F est donnée par $\dfrac{\partial E}{\partial u} = 0$, $\dfrac{\partial E}{\partial v} = 0$;

ou

$$a\alpha^2 u - \beta^2 w = 0 \qquad \text{et} \qquad a\alpha^2 v + \beta(\alpha - a)w = 0.$$

L'équation de la directrice est donc

$$\beta^2 x - \beta(\alpha - a)y + a\alpha^2 = 0.$$

Puisque $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha = 0$, on peut poser $\alpha = \dfrac{2a}{1+t^2}$, $\beta = \alpha t$;

d'où l'équation

$$2t^2x - t(1-t^2)y + 2a = 0.$$

On aura l'enveloppe en éliminant t entre cette équation et la dérivée par rapport à t, égalée à 0,

$$4tx - (1-3t^2)y = 0.$$

Mais il est plus simple de tirer x et y en fonction de t :

$$x = a\frac{1-3t^2}{t^2(1+t^2)}, \qquad y = \frac{4a}{t(1+t^2)},$$

et d'étudier les valeurs de x, y qui correspondent aux valeurs de t comprises entre 0 et $+\infty$ (la courbe étant symétrique par rapport à Fx, on peut se borner à considérer ces valeurs de t).

On trouve facilement

$$\frac{dx}{adt} = \frac{2(1+3t^2)(t^2-1)}{t^3(1+t^2)^2}, \qquad \frac{dy}{adt} = \frac{-4(1+3t^2)}{t^2(1+t^2)^2}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-2t}{t^2-1}.$$

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
$\frac{x}{a}$	$+\infty$	décroît	0	décroît	-1	croît	0
$\frac{dx}{adt}$	$+\infty$	—		—	0	+	0
$\frac{y}{a}$	$+\infty$	décroît	$3\sqrt{3}$	décroît	2	décroît	0
$\frac{dy}{adt}$	$-\infty$	—		—		—	0
$\frac{dy}{dx}$	0	+	$\sqrt{3}$	+	∞	—	0

La courbe est une quartique unicursale de 3e classe ayant un rebroussement à l'origine, et des branches paraboliques dans la direction de Fx.

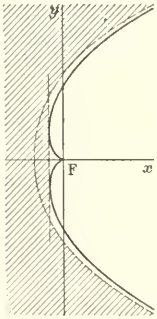
Cherchons la parabole asymptote. On voit d'abord que pour $t = 0$, la limite de $\frac{y^2}{x}$ est $16a$; on a ensuite

$$y^2 - 16ax = \frac{2+3t^2}{(1+t^2)^2} \cdot 16a^2.$$

La limite du second membre pour $t = 0$ est $32a^2$. La parabole asymptote a donc pour équation $y^2 - 16ax - 32a^2 = 0$. On a, du reste,

$$y^2 - 16ax - 32a^2 = -\frac{16a^2t^2(1+2t^2)}{(1+t^2)^2},$$

ce qui montre que la courbe est tout entière à l'intérieur de cette parabole, le second membre étant essentiellement négatif.



Cherchons maintenant l'enveloppe de la deuxième directrice, polaire du foyer F'. L'équation tangentielle de l'ellipse (E) peut s'écrire

$$Pw + a\alpha^2(u^2+v^2) = 0,$$

$P = 0$ étant l'équation tangentielle de F'. Les coordonnées cartésiennes de ce point sont donc $x = \frac{2\beta^2}{a}$, $\quad y = -\frac{2\beta(\alpha-a)}{a}$.

Les coordonnées u, v, w de la directrice correspondante satisfont aux équations

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial u}}{x} = \frac{\frac{\partial E}{\partial v}}{y} = \frac{\frac{\partial E}{\partial w}}{1},$$

ou

$$\frac{a\alpha^2}{\beta^2}u = -\frac{a\alpha^2}{\beta(\alpha-a)}v = \frac{-2\beta^2u + 2\beta(\alpha-a)v - aw}{a}.$$

On déduit de là $v = -\frac{\alpha-a}{\beta}u$, et, par suite, en tenant compte de la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha = 0, \qquad au = \frac{-\beta^2 w}{\alpha^2 + 2\beta^2},$$

d'où l'équation de la directrice

$$\beta^2 x - \beta(\alpha - a)y - a(\alpha^2 + 2\beta^2) = 0;$$

cette équation peut s'écrire

$$\beta^2 X - \beta(\alpha - a)Y + a\alpha^2 = 0,$$

en posant $x - 2a = -X$, $y = -Y$. On retrouve ainsi l'équation de la première directrice, polaire de F. L'enveloppe de la deuxième directrice est donc la courbe symétrique de l'enveloppe de la première directrice par rapport au centre du cercle (C) $x = a$, $y = 0$, ou encore symétrique de la première par rapport à la droite $x - a = 0$. C'était du reste évident géométriquement, les deux directrices étant parallèles et équidistantes du centre de (C).

4. L'équation ponctuelle de (E), déduite de son équation tangentielle, est

$$[a^2\alpha^2 + \beta^2(\alpha - a)^2][x^2 + [a^2\alpha^2 + \beta^4]y^2 + 2\beta^3(\alpha - a)xy - 2a\alpha^2\beta^2 x + 2a\alpha^2\beta(\alpha - a)y - a^2\alpha^4 = 0.$$

On voit très facilement que l'on peut mettre cette équation sous la forme

$$a^2\alpha^2(x^2 + y^2 - 2ax) + [(\alpha - a)x + \beta y - a\alpha][\beta^2(\alpha - a)x + \beta^3 y + a\alpha^3] = 0.$$

On a ainsi mis en évidence la tangente en I et la sécante qui lui est parallèle,

$$\beta^2(\alpha - a)x + \beta^3 y + a\alpha^3 = 0\ ;$$

or, si on pose comme précédemment $\alpha = \dfrac{2a}{1 + t^2}$, $\beta = \alpha t$, cette équation devient

$$t^2(1 - t^2)x + 2t^3 y + 2a = 0.$$

On obtient dès lors les coordonnées x, y d'un point de l'enveloppe de cette droite en résolvant cette équation et l'équation dérivée par rapport à t $(1 - 2t^2)x + 3ty = 0$.

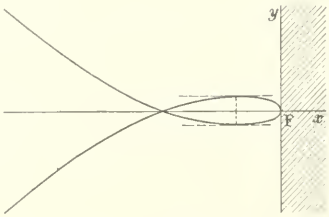
Il vient successivement :

$$x = \frac{-6a}{t^2(1 + t^2)}, \qquad y = \frac{2a(1 - 2t^2)}{t^3(1 + t^2)},$$

$$\frac{dx}{adt} = \frac{12(1 + 2t^2)}{t^3(1 + t^2)^2}, \qquad \frac{dy}{adt} = \frac{6(2t^2 + 1)(t^2 - 1)}{t^4(1 + t^2)^3}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{2t}.$$

On a donc le tableau de discussion ci-dessous.

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$+\infty$
$\frac{x}{a}$	$-\infty$	croît	-8	croît	-3	croît	0
$\frac{dx}{adt}$	$+\infty$	$+$		$+$		$+$	0
$\frac{y}{a}$	$+\infty$	décroît	0	décroît	-1	croît	0
$\frac{dy}{adt}$	$-\infty$	$-$		$-$	0	$+$	0
$\frac{dy}{dx}$	$-\infty$	$-$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-$	0	$+$	∞



Fx étant axe de symétrie, on n'a considéré que les valeurs positives de t.

La courbe enveloppe est une quintique unicursale de 4e classe qui a un point double sur l'axe des x, et des branches paraboliques infinies dans la direction de Fy. Elle est tout entière située dans la région des x négatifs.

VASNIER.

Note sur le problème 638.

La solution analytique et la solution géométrique publiées dans le n° 4 de la *Revue* ne donnent pas, comme cela devrait être, des résultats identiques.

Il est facile de reconnaître que les deux points limites indiqués comme faisant partie du lieu dans la solution analytique n'en font pas partie, c'est-à-dire que le 1er cas examiné dans cette solution ne saurait se présenter.

Je dis, en gardant les notations du n° 638, que l'on ne saurait avoir λ différent de λ', chacun de ces nombres étant différent de -1.

Pour le reconnaître, il suffit d'opérer sur les deux identités

$$(1) \qquad C - P^2 = \lambda(\Gamma - D^2),$$

$$(2) \qquad C' - Q^2 = \lambda'(\Gamma - D^2),$$

seules *nécessaires et suffisantes* pour que les trois équations

$$C - P^2 = 0, \qquad C' - Q^2 = 0, \qquad \Gamma - D^2 = 0$$

représentent la même conique.

Posons $P = lx + my + n$, $Q = l'x + m'y + n'$, $D = ux + vy + w$, $C = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2$,

$$C' = (x-a')^2 + (y-b')^2 - R'^2, \qquad \Gamma = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2.$$

En se bornant à l'identification des termes du second degré dans (1) et (2), on a

$$1 + \lambda = l^2 + \lambda u^2 = m^2 + \lambda v^2, \qquad lm + \lambda uv = 0,$$

$$1 + \lambda' = l'^2 + \lambda' u^2 = m'^2 + \lambda' v^2, \qquad l'm' + \lambda' uv = 0.$$

L'élimination de l et de m, puis de l' et de m' donne facilement

$$(1+\lambda)[1 - \lambda(u^2 + v^2 - 1)] = 0, \qquad (1+\lambda')[1 - \lambda'(u^2 + v^2 - 1)] = 0,$$

d'où l'on conclut que si l'on a

$$1 + \lambda = 0, \qquad 1 + \lambda' = 0,$$

il faut

$$\lambda = \lambda' = \frac{1}{u^2 + v^2 - 1}.$$

A. NAUD.

---

643. — *On considère deux quadriques* Q *et* Q_1 *dont les axes sont parallèles ; la quadrique* Q *est fixe, la quadrique* Q_1 *est variable et assujettie à rester homothétique à elle-même.*

1° *Démontrer que le lieu des centres des quadriques* Q_1 *telles que par leur courbe d'intersection avec* Q *passe un cône du deuxième degré ayant son sommet en un point donné* P *est une droite* Δ.

2° *Si on se donne l'un de ces centres* O_1, *le lieu de* P *est une cubique gauche. A chaque quadrique* Q_1, *il correspond quatre sommets de cônes passant par la courbe indiquée,* P, P_1, P_2, P_3. *Soit* Q_2 *la quadrique homothétique à* Q_1 *et passant par ces quatre points ; elle passe par une conique fixe, son centre décrit une droite et le plan de la section plane commune aux quadriques* Q_1 *et* Q_2 *passe par une droite fixe, quand* Q_1 *varie en gardant le même centre* O_1.

3° *Les quatre droites* Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, *qui correspondent aux sommets* P, P_1, P_2, P_3 *et la ligne des centres* OO_1 *des quadriques* Q *et* Q_1 *sont situées sur un cône du second degré* Γ ; *les hauteurs du tétraèdre* $PP_1P_2P_3$ *sont situées sur un même hyperboloïde* H. *Former les équations de ces deux surfaces et voir dans quels cas* H *est un paraboloïde.*

4° *Examiner le cas particulier où les quadriques* Q_1 *sont des sphères.*

Soient

$$Q \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

l'équation de la quadrique Q rapportée à ses axes, et

$$Q_1 \equiv A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 - 2A_1x_1x - 2B_1y_1y - 2C_1z_1z + D_1 = 0$$

celle d'une quadrique Q_1, ayant pour centre le point (x_1, y_1, z_1), et enfin x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point P.

1. Les cônes passant par la courbe d'intersection de deux quadriques à axes parallèles ont leurs axes parallèles à ceux de ces deux quadriques.

L'équation d'un cône de sommet P sera donc

$$C \equiv \lambda(x - x_0)^2 + \mu(y - y_0)^2 + \nu(z - z_0)^2 = 0,$$

et on doit pouvoir déterminer k de façon que l'on ait $Q_1 + kQ \equiv C$; cette identification donne les équations suivantes :

$$A_1 + kA = \lambda, \qquad B_1 + kB = \mu, \qquad C_1 + kC = \nu, \qquad A_1x_1 = \lambda x_0, \qquad B_1y_1 = \mu y_0, \qquad C_1z_1 = \nu z_0,$$
$$D_1 - k = \lambda x_0^2 + \mu y_0^2 + \nu z_0^2.$$

L'élimination de λ, μ, ν, k, D_1 entre ces sept équations se fait très facilement et fournit le lieu du point (x_1, y_1, z_1) :

$$\text{(1)} \qquad \frac{A_1(x_1 - x_0)}{Ax_0} = \frac{B_1(y_1 - y_0)}{By_0} = \frac{C_1(z_1 - z_0)}{Cz_0}.$$

Ces équations où x_1, y_1, z_1 sont considérées comme coordonnées courantes, représentent une droite passant par le point P. C'est la droite Δ de l'énoncé.

2. Inversement, les équations (1) où x_1, y_1, z_1 sont fixes et x_0, y_0, z_0 les coordonnées courantes, représentent une cubique gauche passant par les centres de Q et de Q_1. C'est le lieu des points P quand Q_1 est fixe.

Les sommets P, P_1, P_2, P_3 des cônes C qui correspondent à une quadrique Q_1 sont les sommets du tétraèdre conjugué à Q et à Q_1.

Les coordonnées de ces points satisfont aux équations

$$\frac{A_1(x - x_1)}{Ax} = \frac{B_1(y - y_1)}{By} = \frac{C_1(z - z_1)}{Cz} = T,$$

en posant

$$T = A_1x_1x + B_1y_1y + C_1z_1z - D_1.$$

En égalant ces rapports deux à deux, on a les équations de six quadriques passant par les points P, P_1, P_2, P_3,

$$f_1 \equiv AxT - A_1(x - x_1) = 0, \qquad f_4 \equiv (CB_1 - BC_1)yz + BC_1z_1y - CB_1y_1z = 0,$$
$$f_2 \equiv ByT - B_1(y - y_1) = 0, \qquad f_5 \equiv (AC_1 - CA_1)zx + CA_1x_1z - AC_1z_1x = 0,$$
$$f_3 \equiv CzT - C_1(z - z_1) = 0, \qquad f_6 \equiv (BA_1 - AB_1)xy + AB_1y_1x - BA_1x_1y = 0.$$

L'équation de la quadrique Q_2 est donc de la forme

$$Q_2 \equiv \lambda_1f_1 + \lambda_2f_2 + \lambda_3f_3 + \lambda_4f_4 + \lambda_5f_5 + \lambda_6f_6 = 0.$$

En exprimant que l'ensemble des termes du 2e degré se réduit à $A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 = 0$, on trouve aisément

$$\lambda_1 = \frac{1}{Ax_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{By_1}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{Cz_1},$$
$$\lambda_4 = \frac{B_1y_1^2 + C_1z_1^2}{(BC_1 - CB_1)y_1z_1}, \qquad \lambda_5 = \frac{C_1z_1^2 + A_1x_1^2}{(CA_1 - AC_1)z_1x_1}, \qquad \lambda_6 = \frac{A_1x_1^2 + B_1y_1^2}{(AB_1 - BA_1)x_1y_1}.$$

Par suite l'équation de Q_2 peut s'écrire

$$Q_2 \equiv A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 - 2A_1x_2x - 2B_1y_2y - 2C_1z_2z + D_2 = 0,$$

avec les notations que voici :

$$x_2 = \frac{1}{2A_1x_1}\left[D_1 + \frac{A_1}{A} + \frac{AB_1(A_1x_1^2 + B_1y_1^2)}{BA_1 - AB_1} + \frac{AC_1(A_1x_1^2 + C_1z_1^2)}{CA_1 - AC_1}\right] = x_2' + \frac{D_1}{2A_1x_1},$$

$$y_2 = \frac{1}{2B_1y_1}\left[D_1 + \frac{B_1}{B} + \frac{BC_1(B_1y_1^2 + C_1z_1^2)}{CB_1 - BC_1} + \frac{BA_1(B_1y_1^2 + A_1x_1^2)}{AB_1 - BA_1}\right] = y_2' + \frac{D_1}{2B_1y_1},$$

$$z_2 = \frac{1}{2C_1z_1}\left[D_1 + \frac{C_1}{C} + \frac{CA_1(C_1z_1^2 + A_1x_1^2)}{AC_1 - CA_1} + \frac{CB_1(C_1z_1^2 + B_1y_1^2)}{BC_1 - CB_1}\right] = z_2' + \frac{D_1}{2C_1z_1},$$

$$D_2 = \frac{A_1}{A} + \frac{B_1}{B} + \frac{C_1}{C}.$$

On voit que lorsque D_1 varie, la quadrique passe par la conique fixe

$$(2) \qquad A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 - 2A_1x_2'x - 2B_1y_2'y - 2C_1z_2'z + D_2 = 0, \qquad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 0.$$

Le lieu des centres des quadriques Q_2 est évidemment la droite

$$(3) \qquad A_1x_1(x - x_2') = B_1y_1(y - y_2') = C_1z_1(z - z_2').$$

Quant au plan de la section plane commune aux quadriques Q_1 et Q_2, il a pour équations $Q_2 - Q_1 = 0$, ou

$$2A_1(x_1 - x_2)x + 2B_1(y_1 - y_2)y + 2C_1(z_1 - z_2)z + D_2 - D_1 = 0;$$

il passe par la droite fixe

$$(4) \qquad 2A_1(x_1 - x_2')x + 2B_1(y_1 - y_2')y + 2C_1(z_1 - z_2')z + D_2 = 0, \qquad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} + 1 = 0.$$

3. Les droites Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les droites joignant O_1 aux points P, P_1, P_2, P_3. Ces quatre droites, ainsi que la ligne des centres OO_1 s'appuient sur la cubique gauche, lieu des points P, qui passe par O_1. Le cône Γ est donc le cône de sommet O_1 qui contient cette cubique. Formons son équation. A cet effet, désignons par

$$(5) \qquad \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = \rho$$

les équations d'une génératrice du cône.

Celles de la cubique sont

$$(6) \qquad \frac{A_1(x - x_1)}{Ax} = \frac{B_1(y - y_1)}{By} = \frac{C_1(z - z_1)}{Cz} = -\sigma.$$

En exprimant que les équations (5) et (6) ont un système de solutions communes en x, y, z, on a

$$Al\rho\sigma + A_1l\rho + Ax_1\sigma = 0, \qquad Bm\rho\sigma + B_1m\rho + By_1\sigma = 0, \qquad Cn\rho\sigma + C_1n\rho + Cz_1\sigma = 0.$$

L'élimination de $\rho\sigma$, ρ, σ entre ces équations donne la condition

$$\begin{vmatrix} Al & A_1l & Ax_1 \\ Bm & B_1m & By_1 \\ Cn & C_1n & Cz_1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation du cône Γ est donc

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} A(x - x_1) & A_1(x - x_1) & Ax_1 \\ B(y - y_1) & B_1(y - y_1) & By_1 \\ C(z - z_1) & C_1(z - z_1) & Cz_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} A_1(x - x_1) & Ax & Ax_1 \\ B_1(y - y_1) & By & By_1 \\ C_1(z - z_1) & Cz & Cz_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les quatre hauteurs d'un tétraèdre sont, comme on sait, sur un hyperboloïde. Nous allons montrer qu'il est le même pour tous les tétraèdres correspondant aux quadriques Q_1 concentriques. Il nous

suffit, pour cela, de chercher le lieu des hauteurs de ces tétraèdres. La perpendiculaire abaissée du point $P(x_0, y_0, z_0)$ sur le plan polaire de P par rapport à Q (face du tétraèdre opposée au sommet P) a pour équations

$$(8) \qquad \frac{x - x_0}{Ax_0} = \frac{y - y_0}{By_0} = \frac{z - z_0}{Cz_0} = \tau.$$

Les coordonnées de P satisfont en outre aux équations (6); substituons dans ces équations, x_0, y_0, z_0 aux coordonnées courantes, et écrivons qu'elles ont une solution commune en x_0, y_0, z_0 avec les équations (8).

Nous trouverons $A_1(x - x_1) + Ax\sigma + AA_1x_1\tau = 0$, et deux équations analogues.

On a, en éliminant σ, τ, l'équation de l'hyperboloïde H

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} A_1(x - x_1) & Ax & AA_1x_1 \\ B_1(y - y_1) & By & BB_1y_1 \\ C_1(z - z_1) & Cz & CC_1z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est un paraboloïde si $(CB_1 - BC_1)(AC_1 - CA_1)(BA_1 - AB_1)x_1y_1z_1 = 0$, c'est-à-dire si les quadriques Q et Q_1 ont une de leurs sections principales homothétiques, ou si le point O_1 est dans un des plans principaux de Q.

4. Lorsque les quadriques Q_1, et, par suite aussi, les quadriques Q, sont des sphères, la droite Δ est la perpendiculaire abaissée du point P sur son plan tangent par rapport à Q. La cubique gauche lieu des sommets des tétraèdres conjugués à Q et Q_1, est la cubique aux pieds des normales de Q relative au point O_1.

Pour toutes les sphères Q_1 concentriques, les sphères Q_2 passent par un cercle fixe. Le lieu de leurs centres est évidemment la perpendiculaire élevée par le centre de ce cercle à son plan, et le plan radical des sphères Q_1 et Q_2 passe par une droite fixe. Enfin, les droites $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, perpendiculaires aux faces du tétraèdre $PP_1P_2P_3$, sont les hauteurs de ce tétraèdre, et la surface H se confond avec le cône F, qui est ici le cône de Chasles sur lequel se trouvent les six normales menées de O_1 à la quadrique Q.

VASNIER.

Bonne solution de M. Jean MERLIN.

---

644. — *Étant donnée une conique* C, *on prend sur une droite* D *un point quelconque* M *et on considère les points de contact* P *et* Q *des tangentes issues de* M *à la conique* C.

1° *Montrer que l'on peut choisir la droite* D *de telle sorte que lorsque* M *parcourt cette droite, les cercles circonscrits au triangle* MPQ *passent par un même point* ω.

2° *Enveloppe de ces droites* D *et lieu du point* ω *correspondant à chacune d'elles.*

3° *Montrer qu'il existe sur chacune de ces droites* D *un point* M *tel que le triangle* MPQ *de tout à l'heure admette pour centre du cercle inscrit et du cercle exinscrit dans l'angle* M *les points où* D *rencontre la conique* C.

4° *Relation entre l'enveloppe des droites* D *et le lieu du point* M *de chacune d'elles déterminé par la troisième partie.*

Nous choisirons pour conique C une ellipse et nous prendrons pour axes de coordonnées les axes principaux de l'ellipse.

Soient alors $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse et X, Y les coordonnées du point M.

L'équation de la polaire de ce point par rapport à l'ellipse est $\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-1=0$, et, par suite, celle du cercle envisagé est de la forme

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\left(\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-1\right)\left(\frac{Xx}{a^2}-\frac{Yy}{b^2}+\mu\right)=0.$$

Exprimons maintenant que cette conique est un cercle; nous aurons $\lambda=\frac{1}{c^2}\left(\frac{b^2X^2}{a^2}+\frac{a^2Y^2}{b^2}\right)$; puis écrivons que ce cercle passe au point (X, Y), nous aurons, en tenant compte du calcul de λ qui vient d'être fait et en réduisant, $\mu=-\frac{X^2+Y^2}{c^2}$. Finalement, le cercle circonscrit au triangle MPQ a pour équation

$$(1)\quad \left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)(x^2+y^2)-\frac{Xx}{a^2}(X^2+Y^2+c^2)-\frac{Yy}{b^2}(X^2+Y^2-c^2)+c^2\left(\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}\right)=0.$$

Le lieu des points pour lesquels ce cercle passe par un point fixe (x, y) est une cubique circulaire, la cubique qui a pour équation

$$(2)\quad (X^2+Y^2)\left(\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}\right)-(x^2+y^2)\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)-\frac{c^2X^2}{a^2}+\frac{c^2Y^2}{b^2}+c^2\left(\frac{Xx}{a^2}-\frac{Yy}{b^2}\right)=0,$$

en désignant par x, y les coordonnées d'un point fixe ω et par X, Y les coordonnées courantes. Pour que le point M puisse décrire une droite dans ces conditions, il faut que cette cubique se décompose en une droite et un cercle, une droite parallèle à la direction asymptotique réelle, et un cercle passant à l'origine; le produit $\left(\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\rho\right)(X^2+Y^2-2\alpha X-2\beta Y)$ devra donc être identique au premier membre de l'équation (2), pour certaines valeurs de α, β, ρ. En identifiant nous trouvons les cinq équations

$$\rho-\frac{2\alpha x}{a^2}=-\frac{x^2+y^2+c^2}{a^2},\qquad -2\alpha\rho=\frac{c^2x}{a^2},$$

$$\rho-\frac{2\beta y}{b^2}=-\frac{x^2+y^2-c^2}{b^2}.\qquad -2\beta\rho=-\frac{c^2y}{b^2},\qquad \frac{\alpha y}{b^2}+\frac{\beta x}{a^2}=0;$$

les deux dernières équations donnent α et β : $2\alpha=-\frac{c^2x}{a^2\rho}$; $2\beta=\frac{c^2y}{b^2\rho}$; ces deux valeurs vérifient identiquement la troisième équation et les deux premières deviennent

$$(3)\qquad \rho+\frac{c^2x^2}{a^4\rho}=-\frac{x^2+y^2+c^2}{a^2},\qquad \rho-\frac{c^2y^2}{b^4\rho}=-\frac{x^2+y^2-c^2}{b^2}.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer ρ entre ces deux équations pour avoir le lieu du point ω. Pour faire ce calcul, retranchons d'abord les deux équations, nous obtiendrons ainsi la valeur de $\frac{1}{\rho}$ et, par suite, une valeur de ρ,

$$\rho=\frac{b^4x^2+a^4y^2}{a^2b^2(x^2+y^2-a^2-b^2)};$$

multiplions ensuite la première équation par $\frac{a^4}{x^2}$, la seconde par $\frac{b^4}{y^2}$, et ajoutons-les, nous aurons une seconde valeur de ρ

$$\rho=-\frac{(x^2+y^2)(a^2y^2+b^2x^2)+c^2(a^2y^2-b^2x^2)}{b^4x^2+a^4y^2};$$

en égalant ces deux valeurs de ρ, nous avons l'équation du lieu du point ω,

$$(4)\qquad (b^4x^2+a^4y^2)^2+a^2b^2(x^2+y^2-a^2-b^2)[(x^2+y^2)(a^2y^2+b^2x^2)+c^2(a^2y^2-b^2x^2)]=0.$$

Or, il est évident *a priori* que tous les points de l'ellipse appartiennent au lieu; par conséquent, l'équation (4) doit contenir le facteur $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$, et le véritable lieu est du quatrième degré. Pour l'obtenir, posons $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2\equiv E$ et remplaçons dans le crochet, $a^2y^2+b^2x^2$ par $E+a^2b^2$; la quantité signalée deviendra $E(x^2+y^2)+b^4x^2+a^4y^2$, et, par suite, l'équation (4)

$$a^2b^2E(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2-b^2)+(b^4x^2+a^4y^2)[b^4x^2+a^4y^2+a^2b^2(x^2+y^2-a^2-b^2)]=0;$$

le nouveau crochet se réduit à $(a^2+b^2)E$; par conséquent, le vrai lieu du point ω a pour équation

$$a^2b^2(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2-b^2)+(a^2+b^2)(b^4x^2+a^4y^2)=0,$$

ou

$$(5)\qquad a^2b^2(x^2+y^2)^2+c^2(a^2+b^2)(a^2y^2-b^2x^2)=0.$$

Ce lieu est donc une quartique bicirculaire à point double ayant les axes de coordonnées pour axes de symétrie. Cette courbe est aisée à construire et il est inutile de s'arrêter sur ce point.

Cherchons maintenant l'enveloppe des droites D. Pour cela, revenons aux équations (3) et à l'équation de la droite D, $\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\rho=0$, et posons $\frac{x}{a^2}=\theta u$, $\frac{y}{b^2}=\theta v$, $\rho=\theta w$. Les équations (3) deviennent alors

$$\theta w+\theta\frac{c^2u^2}{w}=-\frac{\theta^2(a^4u^2+b^4v^2)+c^2}{a^2},\qquad \theta w-\theta\frac{c^2v^2}{w}=\frac{\theta^2(a^4u^2+b^4v^2)-c^2}{b^2},$$

et nous avons à éliminer θ entre ces deux nouvelles équations. Pour faire ce calcul, nous multiplions la première équation par a^2, la seconde par b^2 et nous ajoutons, puis nous retranchons les deux équations ainsi obtenues; nous avons ainsi deux valeurs de θ,

$$\theta=-\frac{c^2(a^2u^2-b^2v^2)+(a^2+b^2)w^2}{2w(a^4u^2+b^4v^2)},\qquad \theta=\frac{-2w}{a^2u^2+b^2v^2+w^2},$$

qu'il suffit d'égaler pour avoir l'équation de l'enveloppe. Nous obtenons finalement

$$(6)\qquad (a^2+b^2)w^4-2(a^4u^2+b^4v^2)w^2+c^2(a^4u^2-b^4v^2)=0.$$

Mais il est évident que les tangentes à l'ellipse sont des droites D et que, par conséquent, l'ellipse fait partie de l'enveloppe des droites D. Le premier membre de l'équation (6) doit donc contenir en facteur $a^2u^2+b^2v^2-w^2$. Nous mettrons ce résultat en évidence en résolvant l'équation (6) par rapport à w^2; nous trouverons ainsi

$$w^2=a^2u^2+b^2v^2,\qquad \text{et}\qquad w^2=\frac{c^2}{a^2+b^2}(a^2u^2-b^2v^2).$$

La première donne l'ellipse proposée et la seconde la véritable enveloppe.

Cette enveloppe est une hyperbole homofocale à l'ellipse donnée et dont l'équation ponctuelle est

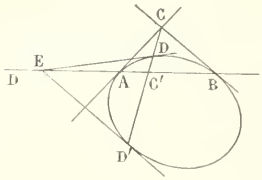
$$(7)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{c^2}{a^2+b^2}=0.$$

Il n'y a plus qu'à se reporter à la question 582 dont la solution a été publiée antérieurement pour apercevoir de suite les solutions des deux dernières parties de la question actuelle.

L'hyperbole (7) est, en effet, le lieu des points M tels que l'une des bissectrices de l'angle PMQ coupe l'ellipse en deux centres de cercles inscrits dans le triangle MPQ; elle est aussi l'enveloppe de cette bissectrice. Tout ce qui suit est donc évident.

Deuxième solution. — Cette question nous paraît assez importante pour que nous en donnions une autre solution. Nous allons commencer par démontrer que lorsque le point M décrit une droite quelconque D, le

triangle MPQ reste conjugué par rapport à une conique fixe. Pour cela désignons par A et B les points de rencontre de la droite D avec l'ellipse et par C le pôle de cette droite ; menons par le point C une droite quelconque qui rencontre l'ellipse en D et D′ et la droite en C′, et cherchons le lieu des points M et M′ qui divisent harmoniquement les deux couples D et D′ et C et C′. En désignant par x_0 et y_0 les coordonnées du point C, par λ et μ les paramètres de la droite CC′, les coordonnées d'un point quelconque de cette droite sont $x = x_0 + \lambda\rho$, $y = y_0 + \mu\rho$, ρ étant un paramètre variable ; les valeurs de ρ qui correspondent aux points de rencontre de la sécante CC′ avec l'ellipse sont les racines de l'équation



$$\left(\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2}\right)\rho^2 + 2\left(\frac{\lambda x_0}{a^2} + \frac{\mu y_0}{b^2}\right)\rho + E_0 = 0,$$

dans laquelle E_0 désigne la quantité $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1$; les valeurs de ρ qui correspondent aux points C et C′ sont racines de l'équation

$$\left(\frac{\lambda x_0}{a^2} + \frac{\mu y_0}{b^2}\right)\rho^2 + E_0\rho = 0.$$

Si nous désignons alors par $\alpha\rho^2 + 2\beta\rho + \gamma = 0$, celle qui admet pour racines les paramètres des points M et M′, nous aurons les deux relations

$$\alpha E_0 - 2\beta\left(\frac{\lambda x_0}{a^2} + \frac{\mu y_0}{b^2}\right) + \gamma\left(\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2}\right) = 0, \qquad -\beta E_0 + \gamma\left(\frac{\lambda x_0}{a^2} + \frac{\mu y_0}{b^2}\right) = 0;$$

de là nous déduirons

$$\gamma = E_0, \qquad \beta = \frac{\lambda x_0}{a^2} + \frac{\mu y_0}{b^2}, \qquad \alpha = \frac{2\left(\frac{\lambda x_0}{a^2} + \frac{\mu y_0}{b^2}\right)^2 - E_0\left(\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2}\right)}{E_0}.$$

Nous aurons alors le lieu des points M et M′ en formant l'équation du second degré qui fournit les valeurs de ρ correspondant à ces points et en y remplaçant $\lambda\rho$ par $x - x_0$, $\mu\rho$ par $y - y_0$. Ce calcul donne immédiatement l'équation suivante

$$2(P - E_0)^2 - E_0(E + E_0 - 2P) + 2E_0(P - E_0) + E_0^2 = 0,$$

dans laquelle E et P désignent, pour abréger, les fonctions $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ et $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1$; le lieu cherché a donc pour équation $EE_0 - 2P^2 = 0$. Cela posé, donnons-nous l'équation de la droite D, $ux + vy + w = 0$; nous aurons alors $\frac{x_0}{a^2} = \theta u$, $\frac{y_0}{b^2} = \theta v$, $-1 = \theta w$, et l'équation précédente s'écrira

$$(1) \qquad (a^2u^2 + b^2v^2 - w^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - 2(ux + vy + w)^2 = 0.$$

Le lieu des points M et M′ est donc une conique doublement tangente à l'ellipse donnée aux points de rencontre de cette ellipse avec la droite D.

Si nous menons alors les tangentes à l'ellipse aux points D et D′, elles se coupent en un point E de la droite D et le triangle EDD′ est un des triangles indiqués ; il est visible, d'après ce qui précède, que les trois sommets de ce triangle sont deux à deux conjugués par rapport à la conique (1) ; par conséquent, la propriété annoncée est établie.

Il en résulte alors que le cercle circonscrit au triangle MPQ de l'énoncé, ou EDD′ de la figure ci-dessus, reste orthogonal à un cercle fixe, le cercle orthoptique de la conique (1). Nous exprimerons donc que ce cercle passe par un point fixe en exprimant que le cercle orthoptique de (1) a un rayon nul, c'est-à-dire que cette conique (1) est une hyperbole équilatère. Nous trouvons ainsi

$$(a^2u^2 + b^2v^2 - w^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - 2(u^2 + v^2) = 0,$$

ou

$$a^2u^2 - b^2v^2 - \frac{a^2 + b^2}{c^2}w^2 = 0;$$

c'est l'enveloppe des droites D. Quant au point ω, c'est le centre de l'hyperbole équilatère ; il est donné par les

deux équations $\frac{Ax}{a^2} - 2uP = 0$, $\frac{Ay}{b^2} - 2vP = 0$, où A désigne la quantité $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2$ et P la fonction linéaire $ux + vy + w$; ces équations donnent aisément

$$x = -\frac{2a^2uw}{a^2u^2 + b^2v^2 + w^2}, \qquad y = -\frac{2b^2vw}{a^2u^2 + b^2v^2 + w^2};$$

et nous aurons le lieu du point ω en éliminant u, v, w entre ces deux équations et l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites D. Cette élimination se fait aisément : les deux dernières équations donnent en effet $u = \sigma\frac{x}{a^2}$, $v = \sigma\frac{y}{b^2}$, puis $\sigma^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + 2\sigma w + w^2 = 0$; la première devient

$$\sigma^2\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{a^2 + b^2}{c^2}w^2 = 0,$$

et il reste à éliminer $\frac{\sigma}{w}$ entre ces deux équations. On trouve ainsi

$$a^2b^2(x^2 + y^2)^2 + c^2(a^2 + b^2)(a^2y^2 - b^2x^2) = 0;$$

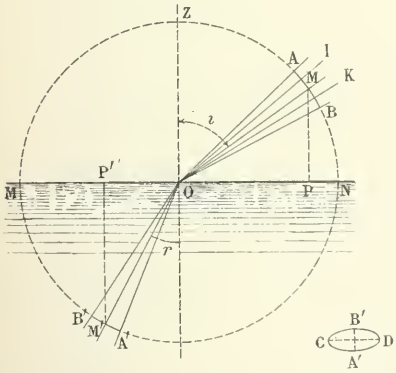
c'est le lieu du point ω.

Bonne solution, analogue à la première, de M. Jean MERLIN.

PHYSIQUE

619. — *La surface d'une masse d'eau éclairée par le soleil est couverte d'un écran mince, opaque, percé d'une très petite ouverture de section ε. Quelle est la forme du faisceau lumineux qui pénètre dans l'eau au travers de cette ouverture ? Quel éclairement produit-il sur un écran placé à une distance d de l'ouverture et normal à la direction moyenne des rayons réfractés ?*

Prenons pour plan de la figure le plan d'incidence moyen et coupons les faisceaux incident et réfracté par une sphère de rayon 1, ayant son centre à l'ouverture O. La section du faisceau incident sera un cercle projeté en AB; la section du faisceau réfracté sera une courbe projetée en A′B′ et représentée à part en CA′DB′.



Soit $AOB = 2\alpha$ le diamètre apparent du soleil. Considérons les différents plans verticaux passant par la verticale OZ de l'ouverture. Dans chacun d'eux, les rayons extrêmes, IO et KO, venus du soleil sont assez rapprochés pour que l'angle qu'ils forment puisse être assimilé à une variation très petite, di, de l'angle d'incidence moyen ; les rayons réfractés correspondants forment de même un angle dr et ces angles, di et dr, sont mesurés par des cordes correspondantes dans le cercle AB et dans la courbe A′B′.

Or, $\sin i = n \sin r$, d'où $\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r}$.

Ce rapport est constant ; donc la section du faisceau réfracté est une *ellipse* dont l'axe A′B′, en particulier, est donné par l'équation

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\cos i}{n \cos r} \qquad \text{ou} \qquad A'B' = \frac{2\alpha}{n}\frac{\cos i}{\cos r}.$$

L'axe CD, projeté en M', est compris entre les deux plans d'incidence extrêmes à une distance OP' de leur intersection OZ ; la droite projetée en M, et égale à 2α, est comprise entre les mêmes plans à une distance OP de leur intersection. Donc

$$\frac{CD}{2\alpha} = \frac{OP'}{OP} = \frac{\sin r}{\sin i}, \qquad \text{ou} \qquad CD = \frac{2\alpha}{n}.$$

L'axe CD est donc constant, tandis que l'axe A'B' se raccourcit à mesure que l'angle d'incidence augmente.

Éclairement. — Si l'on désigne par s la surface de l'ellipse A'B' et par q la quantité de lumière qu'elle reçoit, l'éclairement e est donné par la formule

$$e = \frac{q}{s}.$$

En désignant par k l'éclat du soleil et par T un coefficient de transmission qui diminue quand l'angle i augmente, on a

$$q = Tk\pi\alpha^2\varepsilon \cos i.$$

D'autre part, en appliquant la formule connue de la surface de l'ellipse, on a

$$s = \pi \frac{\alpha^2}{n^2} \frac{\cos i}{\cos r},$$

d'où

$$e = Tkn^2\varepsilon \cos r.$$

Si l'écran est placé à une distance d, la surface éclairée est d^2 fois plus grande et on a

$$e = \frac{Tkn^2\varepsilon \cos r}{d^2}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

727. — On considère les hyperboles équilatères de grandeur constante bitangentes à une parabole donnée et on demande :

1° Le lieu des centres de ces hyperboles et le lieu des pôles des cordes de contact ;

2° L'enveloppe Σ de ces cordes de contact ;

3° Par un point P on peut mener quatre normales à la courbe Σ. Lieu des points P tels que les tangentes aux pieds de ces normales à la courbe Σ forment un quadrilatère inscriptible à un cercle ; lieu du centre de ce cercle, et lieu des six sommets du quadrilatère.

VASNIER.

728. — On considère une sphère donnée (S) tangente à un plan donné P en un point A et un plan variable Q qui touche la sphère en un point M. Ce plan coupe le plan P suivant une droite D ; par la droite D et le centre de la sphère on mène un plan qui coupe cette sphère suivant un grand cercle et on considère enfin le cylindre ayant ce grand cercle pour directrice et ses génératrices parallèles à une direction donnée.

1° Trouver, lorsque le point M se meut sur un cercle de la sphère, le lieu des projections du point A sur la droite D ;

2° Trouver, dans les mêmes conditions, le lieu du centre et le lieu des sommets de la conique d'intersection du cylindre avec le plan P.

G. POUILLIART.

DEUXIEME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

642. — *On donne un cercle* (C) *et un point* A ; *on considère un cercle variable* (C′) *passant par le point* A *et orthogonal au cercle* (C). *On mène une tangente commune à ces deux cercles, trouver le lieu du point de contact avec le cercle* (C′). *Construire ce lieu dans le cas particulier où le point* A *est sur le cercle* (C).

Prenons pour axe des x le diamètre du cercle (C) qui passe au point A et pour axe des y le diamètre perpendiculaire ; soient R le rayon de ce cercle et a l'abscisse du point A.

L'équation générale des cercles orthogonaux au cercle (C) est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + R^2 = 0 ;$$

écrivons que ce cercle passe par le point A, nous avons $a^2 - 2\alpha a + R^2 = 0$, d'où nous tirons

$$\alpha = \frac{a^2 + R^2}{2a}.$$

On peut donc considérer l'équation (1) comme l'équation du cercle (C′), α ayant pour valeur $\frac{a^2 + R^2}{a}$ et β étant une variable.

La tangente au point (x, y) au cercle (C′) a pour équation

$$X(x - \alpha) + Y(y - \beta) - \alpha x - \beta y + R^2 = 0,$$

x, y vérifiant l'équation (1).

Pour que cette droite soit tangente au cercle (C) Il faut qu'on ait

$$(2) \qquad R^2[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] = (\alpha x + \beta y - R^2)^2.$$

On aura l'équation du lieu en éliminant β entre les équations (1) et (2).

De l'équation (1) on tire sans difficulté

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2 \qquad \text{et} \qquad \alpha x + \beta y - R^2 = \frac{x^2 + y^2 - R^2}{2} ;$$

par suite l'équation (2) peut s'écrire

$$R^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = \frac{(x^2 + y^2 - R^2)^2}{4}$$

et en y remplaçant β par $\frac{x^2 + y^2 - 2\alpha x + R^2}{2y}$, on obtient

$$R^2\left[\alpha^2 - R^2 + \frac{(x^2 + y^2 - 2\alpha x + R^2)^2}{4y^2}\right] = \frac{(x^2 + y^2 - R^2)^2}{4}$$

ou

$$R^2[4(\alpha^2 - R^2)y^2 + (x^2 + y^2 - 2\alpha x + R^2)^2] = (x^2 + y^2 - R^2)^2 y^2.$$

C'est l'équation du lieu.

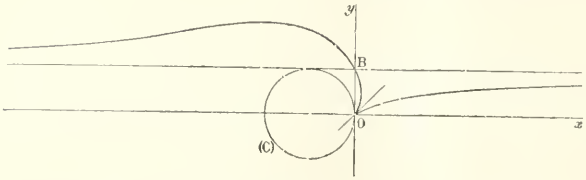
Si le point A est sur le cercle (C) on a $a = R$ et $\alpha = \frac{a^2 + R^2}{a} = R$; l'équation précédente devient

$$R^2(x^2 + y^2 - 2Rx + R^2)^2 = (x^2 + y^2 - R^2)^2 y^2,$$

ce qu'on peut écrire

$$R[(x - R)^2 + y^2] = \pm y(x^2 + y^2 - R^2).$$

Cette équation représente deux courbes du troisième degré symétriques par rapport à Ox.



Considérons l'une d'elles, par exemple $R[(x-R)^2+y^2]=y(x^2+y^2-R^2)$; transportons l'origine des coordonnées au point $(R, 0)$, l'équation s'écrit

$$(x^2+y^2)y - R(x-y)^2 = 0.$$

Elle représente une cissoïde oblique qui a pour point de rebroussement l'origine, pour tangente en ce point la bissectrice $x-y=0$ des axes.

Son asymptote est la droite $y-R=0$. elle rencontre la cissoïde au point $B(0, R)$.

---

646. — *On donne deux points* F, P *et une droite* D. *On demande :*

1° *L'équation générale des coniques ayant pour foyer le point* F *passant par le point* P *et tangentes à la droite* D ;

2° *Le lieu des centres de ces coniques. Ce lieu est une conique dont on déterminera les foyers réels ;*

3° *Parmi ces coniques il y a deux paraboles. Quel lieu doit décrire le point* P *pour que les axes de ces paraboles fassent un angle donné ?*

1. Prenons des axes rectangulaires ayant leur origine au point F et dont l'axe des y est parallèle à la droite D. Soient a l'abscisse de cette droite et x_0, y_0 les coordonnées du point P.

L'équation d'une conique ayant pour foyer le point F est

$$x^2+y^2=(lx+my+h)^2.$$

En écrivant que la droite $x=a$ est tangente à cette conique, on obtient une condition qui peut être mise sous la forme $a^2m^2+(la+h)^2=a^2$,

ce qui permet d'exprimer l et m au moyen d'un seul paramètre en posant

$$la+h=a\cos\varphi, \qquad m=\sin\varphi,$$

de sorte que l'équation de la conique devient

$$x^2+y^2=\left[\left(\cos\varphi-\frac{h}{a}\right)x+y\sin\varphi+h\right]^2,$$

ou encore, en remplaçant $\frac{h}{a}$ par λ,

$$(1) \qquad x^2+y^2=[x\cos\varphi+y\sin\varphi-\lambda(x-a)]^2.$$

Écrivons maintenant que cette conique passe par le point P, nous avons

$$x_0^2+y_0^2=[x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi-\lambda(x_0-a)]^2;$$

nous en tirons

$$(2) \qquad x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi-\lambda(x_0-a)=p,$$

p désignant la quantité $\pm\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, ou

$$\lambda=\frac{x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi-p}{x_0-a}.$$

Il en résulte que l'équation générale demandée est

$$x^2+y^2=\left[x\cos\varphi+y\sin\varphi-(x-a)\frac{x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi-p}{x_0-a}\right]^2.$$

2. Pour simplifier l'écriture, nous supposerons que la conique variable soit représentée par l'équation (1), les paramètres λ et φ étant liés par la relation (2).

Les coordonnées du centre de cette conique sont déterminées par les équations

$$x = (\cos\varphi - \lambda)[x\cos\varphi + y\sin\varphi - \lambda(x-a)],$$

(3) $$y = \sin\varphi[x\cos\varphi + y\sin\varphi - \lambda(x-a)];$$

nous en déduisons $$\frac{x}{y} = \frac{\cos\varphi - \lambda}{\sin\varphi},$$

ou

(4) $$x\sin\varphi - y\cos\varphi + \lambda y = 0;$$

par suite, nous aurons le lieu du centre en éliminant λ et φ entre les équations (2), (3) et (4).

La relation (3) peut s'écrire $y\cos^2\varphi = x\sin\varphi\cos\varphi - \lambda\sin\varphi(x-a)$,

ou $$\cos\varphi(y\cos\varphi - x\sin\varphi) + \lambda\sin\varphi(x-a) = 0.$$

Remplaçons-y $y\cos\varphi - x\sin\varphi$ par la valeur λy tirée de la relation (4); nous obtenons

$$\lambda y\cos\varphi + \lambda(x-a)\sin\varphi = 0,$$

ou, comme λ ne peut être nul,

$$\frac{\cos\varphi}{x-a} = \frac{\sin\varphi}{-y} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}. \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

Il ne nous reste plus qu'à éliminer λ entre les équations (2) et (4) et à remplacer dans l'équation obtenue $\cos\varphi$ par $\dfrac{\varepsilon(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$ et $\sin\varphi$ par $\dfrac{-\varepsilon y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$. On obtient ainsi successivement

$$\frac{x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - p}{x_0 - a} = \frac{y\cos\varphi - x\sin\varphi}{y}, \qquad \frac{\varepsilon x_0(x-a) - \varepsilon y_0 y - p\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{x_0 - a} = \frac{\varepsilon y(x-a) + \varepsilon xy}{y},$$

$$-\varepsilon p\sqrt{(x-a)^2+y^2} = (x_0 - 2a)x + yy_0 + a^2, \quad \text{et enfin} \quad (x-a)^2 + y^2 = \frac{1}{x_0^2+y_0^2}[(x_0-2a)x + yy_0 + a^2]^2.$$

Le lieu est donc une conique admettant pour foyer le point $A(a, 0)$; le carré de l'excentricité est égal à $\dfrac{(x_0-2a)^2+y_0^2}{x_0^2+y_0^2}$. Par suite, cette conique est une ellipse si l'on a $x_0 - a > 0$, c'est-à-dire si les points P et F sont de part et d'autre de la droite D, et une hyperbole si les points P et F sont d'un même côté de cette droite.

Il n'y a pas lieu d'examiner le cas où l'on a $x_0 - a = 0$.

Pour déterminer le deuxième foyer réel, nous calculerons les coordonnées du centre; elles sont définies par les équations

$$x - a = \frac{x_0 - 2a}{x_0^2+y_0^2}[(x_0-2a)x + yy_0 + a^2], \qquad y = \frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}[(x_0-2a)x + yy_0 + a^2].$$

On en tire aisément $$x = \frac{x_0}{4} + \frac{a}{2}, \qquad y = \frac{y_0}{4};$$

il en résulte que les coordonnées du second foyer sont $\dfrac{x_0}{2}$ et $\dfrac{y_0}{2}$; par conséquent, ce point est le milieu de FP.

2. Ecrivons que l'équation (1) représente une parabole; nous avons $(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = 1$, on en déduit

$$\lambda = 2\cos\varphi,$$

et par suite, l'équation générale des paraboles ayant pour foyer le point F et tangentes à la droite D est

$$x^2 + y^2 = [x\cos\varphi - y\sin\varphi - 2a\cos\varphi]^2,$$

ou, en posant $\operatorname{tg}\varphi = t$, $$x^2 + y^2 = \frac{(tx - y - 2at)^2}{1-t^2}.$$

Par le point P passent deux de ces paraboles; les valeurs correspondantes de t sont racines de l'équation $x_0^2 + y_0^2 = \dfrac{(tx_0 - y_0 - 2at)^2}{t^2+1}$,

ou $$t^2(y_0^2 + 4ax_0 - 4a^2) + 2ty_0(x_0 - 2a) + x_0^2 = 0.$$

Les racines t' et t'' de cette équation désignent les coefficients angulaires des directrices des deux

paraboles qui passent au point P; l'angle θ des axes, qui est le même que celui des directrices, est donné par la formule

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{(t'-t'')^2}{(1+t't'')^2} = \frac{(t'+t'')^2 - 4t't''}{(1+t't'')^2},$$

ou, en remplaçant $t'+t''$ par $\dfrac{2y_0(x_0-2a)}{y_0^2+4ax_0-4a^2}$ et $t't''$ par $\dfrac{x_0^2}{y_0^2+4ax_0-4a^2}$,

$$\operatorname{tg}^2\theta = 4\,.\,\frac{y_0^2(x_0-2a)^2 - x_0^2(y_0^2+4ax_0-4a^2)}{(x_0^2+y_0^2+4ax_0-4a^2)^2},$$

ou encore : $$(x_0^2+y_0^2+4ax_0-4a^2)^2\operatorname{tg}^2\theta + 4(x_0^2+y_0^2)(4ax_0-4a^2) = 0.$$

Telle est l'équation du lieu. Cette équation est homogène et de deuxième degré par rapport à $x_0^2+y_0^2$ et $4ax_0-4a^2$. On peut donc l'écrire

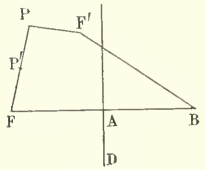
$$[x_0^2+y_0^2+t_1(4ax_0-4a^2)][x_0^2+y_0^2+t_2(4ax_0-4a^2)] = 0,$$

t_1 et t_2 désignant les racines de l'équation $(t+1)^2\operatorname{tg}^2\theta + 4t = 0$.

Cette équation a toujours ses racines réelles ; par suite, le lieu se compose de deux cercles ayant leurs centres sur l'axe des x.

Solution géométrique. — 2. Nous chercherons le lieu du deuxième foyer F′ de la conique variable (C), car le lieu est homothétique du lieu du centre, le centre d'homothétie étant le point F, et le rapport d'homothétie étant égal à 2.

Premier cas. — *Les points* F *et* P *sont du même côté de la droite* D.



1° La conique (C) est une ellipse.

La distance du point F′ au symétrique B de F par rapport à la droite D est égale au grand axe de l'ellipse ; nous avons donc $F'B = FP + F'P$, par suite $F'B - F'P = FP$.

Il en résulte que le lieu du point F′ est une branche de l'hyperbole (H) qui a pour foyers B et P et pour longueur d'axe réel FP (c'est la branche voisine du foyer P).

2° La conique (C) est une hyperbole.

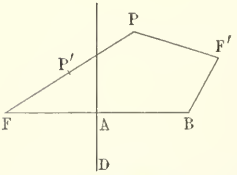
D'après les hypothèses, le point P appartient à la branche voisine du foyer F ; nous avons alors $F'B = F'P - FP$,

ou $$F'P - F'B = FP.$$

Par suite, le lieu du point F′ est la branche (voisine de B) de l'hyperbole (H).

On voit aussi que dans le cas considéré le lieu du foyer F′ est l'hyperbole (H), le lieu du centre de la conique (C) est alors une hyperbole ayant pour foyers le point A et le point P′ (milieu de OP) et pour axe réel FP′.

Deuxième cas. — *Les points* F *et* P *sont de part et d'autre de la droite* D.

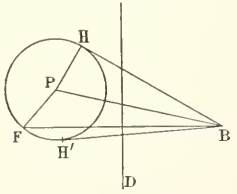


La conique (C) est nécessairement une hyperbole, et le point P appartient à la branche voisine de foyer F′. On a $F'B = FP - F'P$, ou $F'B + F'P = FP$.

On en conclut que le lieu du point F′ est une ellipse qui a pour foyers B et P et pour longueur du grand axe FP.

Par suite, le lieu du centre est une ellipse ayant pour foyers A et P′ et pour grand axe FP′.

3. Cherchons à construire la directrice d'une parabole ayant pour foyer le point F, passant par le point P et tangente à la droite D. Cette directrice passe par le point B, symétrique de F par rapport à D ; en outre, comme sa distance au point P est égale à PF, elle est tangente au cercle de centre P et de rayon PF.



Il existe donc deux paraboles répondant à la question, et leurs directrices sont les tangentes BH et BH′ menées du point B au cercle mentionné plus haut.

Tout revient à trouver le lieu du point P quand l'angle HBH′ a une valeur constante θ.

Dans le triangle rectangle PBH on a $PB = \dfrac{PH}{\sin\frac{\theta}{2}}$, ou $PB = \dfrac{PF}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

Le rapport des distances du point P aux points fixes B et F étant constant, le lieu du point P est une circonférence dont le centre est sur la droite FB.

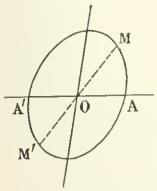
En remplaçant θ par son supplément nous obtenons une deuxième circonférence qui, jointe à la première, constitue le lieu demandé.

Solution analytique par M. E. N. Barisien.

648. — *On considère les hyperboles qui passent par un point A d'une ellipse et qui admettent pour asymptotes deux diamètres conjugués de cette courbe. Chacune de ces hyperboles H rencontre l'ellipse en deux points variables M et M'. Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes à l'hyperbole H en ces deux points M et M' avec la tangente à cette même courbe au point A.*

Cas particulier où l'ellipse se réduit à un cercle.

Prenons pour axe des x le diamètre de l'ellipse E qui passe par le point A et pour axe des y le diamètre conjugué. L'équation de l'ellipse sera de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.



Les coordonnées du point M seront de la forme $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, et la droite MM' aura pour équation $\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{b\sin\varphi}$.

L'équation générale des coniques passant par les 4 points A, A', M, M' est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda\frac{y}{b}\left(\frac{x}{a\cos\varphi} - \frac{y}{b\sin\varphi}\right) = 0.$$

En écrivant que les asymptotes forment un système de diamètres conjugués de l'ellipse E $\left(mm' = -\frac{b^2}{a^2}\right)$, on obtient $\lambda = 2\sin\varphi$,

d'où l'équation générale des hyperboles H

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2xy}{ab}\operatorname{tg}\varphi - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La tangente en A a pour équation

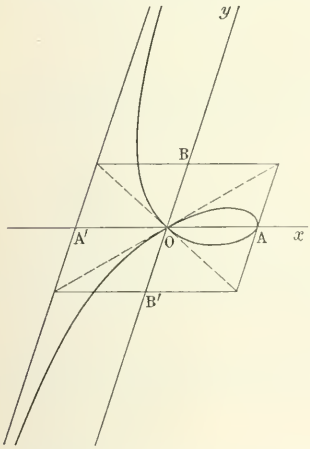
$$(1) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0,$$

elle est parallèle à la tangente en M à l'ellipse ; les tangentes en M et M' ont pour équations

$$(2) \qquad x = \pm a\cos\varphi.$$

Elles sont parallèles à la tangente en A à l'ellipse.

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant φ entre les équations (1) et (2). On tire de (1)



$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\frac{x}{a} - 1}{\frac{y}{b}};$$

de (2), $\cos\varphi = \pm\frac{x}{a}$.

Ecrivons que $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, il vient

$$\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 = \frac{y^2}{b^2},$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\frac{y^2}{b^2} + \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 \cdot \frac{x^2}{a^2} = 0,$$

ou, en divisant par $\frac{x}{a} - 1$ (ce qui fait disparaître la droite $x = a$, solution particulière pour $\varphi = 0$),

$$(x + a)\frac{y^2}{b^2} + \left(x - a\right)\frac{x^2}{a^2} = 0.$$

Cette équation représente une courbe du 3e degré présentant la disposition ci-dessus. Elle a un point double à l'origine et admet pour tangentes en ce point les diagonales du parallélogramme construit sur les deux diamètres conjugués AA' et BB' de l'ellipse.

Si l'ellipse E se réduit à un cercle, AA′ et BB′ sont rectangulaires, l'équation du lieu devient

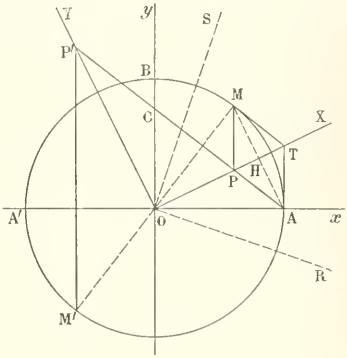
$$x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0.$$

Le lieu est une strophoïde droite.

Solution géométrique. — On peut toujours considérer l'ellipse E comme la projection d'un cercle; il suffit donc de traiter la question dans le cas du cercle. L'hyperbole H est alors équilatère; soient OR, OS ses asymptotes, OX, OY les axes de symétrie qui sont les bissectrices des angles formés par les asymptotes; A et M sont symétriques par rapport à OX, A et M′ symétriques par rapport à OY; les points de rencontre P et P′ de la tangente en A avec les tangentes en M et M′ sont donc respectivement sur OX et sur OY. Tout revient à montrer que MP et M′P′ sont parallèles au diamètre OB, car C étant le milieu de PP′, dans le triangle rectangle POP′, on a

$$CP = CP' = CO,$$

et le lieu de P et P′ est une strophoïde.



Pour cela, nous remarquerons que la parallèle à OS menée par le point M est bissectrice de l'angle PMO; on a donc, en remarquant que $\widehat{HMK} = 45°$,

$$\widehat{HMO}+\widehat{HMP} = 2\widehat{HMK} = 1^d = \widehat{HMO}+\widehat{HMT},$$

d'où

$$\widehat{HMP} = \widehat{HMT},$$

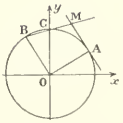
$$HP = HT.$$

APMT est un losange; MP est parallèle à AT et AP à MT.

En particulier, MP et, par suite, M′P′ sont perpendiculaires à OA, c'est-à-dire parallèles à OB. (Cela résulte d'ailleurs immédiatement d'une propriété connue de l'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle rectangle).

Bonne solution analytique de M. E.-N. Barisien.

QUESTIONS PROPOSÉES



729. — On donne une circonférence de rayon R rapportée à deux diamètres rectangulaires. Un angle droit AOB pivote autour du point O. On mène la tangente au point A et l'on trace BC.

Trouver l'équation du lieu du point M où la droite BC coupe la tangente quand l'angle droit tourne autour du point O.

Construire ce lieu.

730. — On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy et une droite variable AB qui rencontre Ox en A, Oy en B. En A et en B, on élève des perpendiculaires à AB qui rencontrent respectivement Oy et Ox en B′ et en A′; soient H la projection de O sur AB, I, K et L les milieux de OH, AB′ et BA′.

On demande de montrer d'abord que le triangle IKL a une aire égale à la moitié de celle du triangle OA′B′ et de calculer le produit OK.OL en fonction de OA et de OB.

On demande ensuite de trouver: 1° les lieux des points I, K, L; 2° les enveloppes des droites A′B′, AB′, BA′; 3° le lieu du point de rencontre des droites AB, AB′, LK, lorsque AB se déplace de façon que l'on ait l'une des relations suivantes: $OA.OB = a^2$, $OA+OB = a$, $OA-OB = a$, $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2 = a^2$, $\overline{OA}^2-\overline{OB}^2 = a^2$.

E. N. Barisien.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

8e Année. N° 6. Mars 1898.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

PROCÉDÉ D'UNE SIMPLICITÉ EXTRÊME POUR PROUVER LA CONVERGENCE DE LA VARIANTE $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$,

par M. **Ch. Méray**, professeur à la Faculté des sciences de Dijon.

1. — La tendance de notre enseignement qui est certainement la plus accentuée consiste à préférer à tout la brièveté de chaque détail considéré comme s'il était le seul à traiter. Certaines personnes pourront donc prendre quelque intérêt à la note suivante, parce qu'elle dégage entièrement des séries, même de la formule du binome, la démonstration sur laquelle les habitudes classiques font reposer la théorie du logarithme et de l'exponentielle.

2. — La partie essentielle du point en question ne repose que sur la seconde des inégalités suivantes.

Si a, b sont des quantités positives quelconques, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} (a+b)^m > a^m, \\ (a+b)^m > a^m + \frac{m}{1}\, a^{m-1}b, \\ (a+b)^m > a^m + \frac{m}{1}\, a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}\, a^{m-2}b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

pourvu que l'exposant m, entier et positif, soit respectivement $> 1, 2, 3, \dots$

Pour établir la troisième inégalité, par exemple, on réitère indéfiniment la multiplication de l'égalité

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

par $(a+b)$, en négligeant chaque fois le dernier terme du produit qui est toujours positif.

3. — *Quand l'entier positif m augmente indéfiniment, l'expression*

$$(2)\qquad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

tend vers une certaine limite.

I. — *Il en est ainsi pour*

$$(3)\qquad \left(1-\frac{1}{m}\right)^m$$

et la limite n'est pas nulle.

Car on a [2]

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}=\left[1-\frac{1}{m}+\frac{1}{m(m+1)}\right]^{m+1}>\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m+1}+\frac{m+1}{1}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m}\frac{1}{m(m+1)},$$

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}>\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m}\left[1-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\right]>\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Cette expression va donc en croissant toujours, et, comme elle reste évidemment limitée (<1), elle ne peut manquer d'avoir une limite >0.

II. — Maintenant, on peut écrire

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m}=1:\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m}=1:\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m}=\left(1-\frac{1}{m+1}\right):\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1},$$

quotient de deux expressions dont la première tend évidemment vers 1, et la seconde vers quelque limite $\neq 0$ (1).

4. — Les inégalités suivantes permettraient de calculer avec une approximation quelconque les limites des expressions (2) et (3) par suite.

Sous les conditions du lemme [2], accompagnées par

$$a-b>0,$$

on a les inégalités algébriques alternantes

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} (a-b)^m<a^m, \\ (a-b)^m>a^m-\dfrac{m}{1}a^{m-1}b, \\ (a-b)^m<a^m-\dfrac{m}{1}a^{m-1}b+\dfrac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

La démonstration est identique à celle des inégalités (1), à cela près que, pour la troisième, par exemple, il faut partir de

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

multiplier indéfiniment par $(a-b)$, et supprimer chaque fois le dernier terme du produit, qui reste ici essentiellement négatif.

5. — Le raisonnement ci-dessus [3, I] appuyé sur la seconde inégalité (4) montrerait à frais aussi minimes que l'expression (2), comme (3), va aussi en croissant toujours.

QUELQUES QUESTIONS D'EXAMEN

Nous nous proposons, dans cette note, de donner la solution directe de quelques questions générales sur les coniques, posées aux examens oraux.

Notations. — Soit, comme d'ordinaire, en axes rectangulaires

$$F(x, y, z)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=\varphi(x, y, z)+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0$$

l'équation générale d'une conique, rendue homogène. Nous désignerons par

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

son discriminant et par $a, b, \ldots, f$ les coefficients de A, B, ..., F dans le développement de Δ :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} a = CF - E^2, & b = DE - BF, \\ c = AF - D^2, & d = BE - CD, \\ f = AC - B^2, & e = BD - AE. \end{cases}$$

On sait que l'on a

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} cf - e^2 = A\Delta, & de - bf = B\Delta, \\ af - d^2 = C\Delta, & be - cd = D\Delta, \\ ac - b^2 = F\Delta, & bd - ae = E\Delta. \end{cases}$$

De plus, si F est indécomposable,

$$\Phi(u, v, w) = au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0$$

est son équation tangentielle, et on a

$$\text{(III)} \qquad \Phi(u, v, w) = -\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}.$$

Enfin, si F se réduit à deux droites, Φ est le carré parfait d'une fonction linéaire qui, égalée à zéro, est l'équation tangentielle du point d'intersection des deux droites.

Question I. — *On donne la conique* $F(x, y, z) = 0$ *et une droite* D, $ux + vy + wz = 0$, *qui la coupe en* A *et* B ; *condition pour que les droites* ωA, ωB *qui joignent le centre* ω *de* F, *aux points* A *et* B, *soient diamètres conjugués de* F.

Remarquons d'abord que cela suppose que $F = 0$ soit une ellipse $(f > 0)$, car dans l'hyperbole les extrémités de deux diamètres conjugués sont, l'une sur l'hyperbole, l'autre sur l'hyperbole conjuguée.

Cela étant, il suffit d'écrire que les tangentes en A et B à la conique forment avec ωA, ωB, un parallélogramme, ou que le milieu de ωC, C désignant le pôle de AB, coïncide avec le milieu de AB. Comme ωC passe déjà par le milieu de AB, il suffit d'écrire que son milieu est sur AB. Les équations de ω et C étant

$$dU + eV + fW = 0, \qquad \Phi'_u U + \Phi'_v V + \Phi'_w W = 0;$$

le milieu de ωC a pour coordonnées

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{f} + \frac{\Phi'_u}{\Phi'_w}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{e}{f} + \frac{\Phi'_v}{\Phi'_w}\right);$$

en écrivant qu'il est sur AB, nous aurons la condition cherchée

$$u(d\Phi'_w + f\Phi'_u) + v(e\Phi'_w + f\Phi'_v) + 2wf\Phi'_w = 0,$$

ou, en tenant compte de

$$u\Phi'_u + v\Phi'_v = 2\Phi(u, v, w) - w\Phi'_w,$$

$$(du + ev + fw)\Phi'_w + 2f.\Phi(u, v, w) = 0,$$

ou enfin

$$\text{(1)} \qquad (du + ev + fw)^2 + f.\Phi(u, v, w) = 0.$$

Cette relation (1) n'est autre que l'équation tangentielle de l'enveloppe des cordes AB, joignant les extrémités de deux diamètres conjugués. On voit que c'est une conique concentrique et homothétique à la première.

Question II. — *On donne la conique* $F = 0$ *et la droite* D ; *trouver l'équation du système des tangentes à la conique aux points où elle est coupée par* D.

C'est une question à peu près classique. L'équation cherchée est de la forme

$$F(x, y, z) - \lambda(ux + vy + wz)^2 = 0,$$

λ étant donné par l'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant de cette conique, équation qu'on peut écrire

$$\begin{vmatrix} A - \lambda u^2 & B - \lambda uv & D - \lambda uw & 0 \\ B - \lambda uv & C - \lambda v^2 & E - \lambda vw & 0 \\ D - \lambda uw & E - \lambda vw & F - \lambda w^2 & 0 \\ u & v & w & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aux éléments de la première ligne, ajoutons ceux de la dernière multipliés par λu, puis à ceux de la deuxième, ceux de la dernière multipliés par λv et enfin à ceux de la troisième, ceux de la dernière multipliés par λw. Nous aurons

$$\begin{vmatrix} A & B & D & \lambda u + 0 \\ B & C & E & \lambda v + 0 \\ D & E & F & \lambda w + 0 \\ u & v & w & 0 + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin, en vertu de (III),

$$-\lambda\Phi(u, v, w) + \Delta = 0.$$

Donc l'équation cherchée est

$$\Phi(u, v, w)F(x, y, z) - \Delta(ux + vy + wz)^2 = 0. \tag{2}$$

Remarque. — Si l'on écrit que (2) est une conique du genre cercle, on a les deux conditions exprimant que D est directrice de la conique proposée

$$\Phi(u, v, w)(A - C) - \Delta(u^2 - v^2) = 0, \qquad \Phi(u, v, w)B - \Delta uv = 0.$$

Remarque. — Si D est la droite de l'infini ($u = v = 0$, $w = 1$), (2) donne l'équation quadratique des asymptotes de F,

$$F(x, y, z) - \frac{\Delta}{f} z^2 = 0.$$

Question III. — *On donne la conique* $F = 0$ *et la droite* D *qui la coupe en* A *et* B; *calculer la distance* AB.

Mettons la droite D sous la forme symétrique

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \rho, \qquad \text{avec} \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Alors $ux_1 + vy_1 + w = 0$ et $\alpha = \lambda v$, $\beta = -\lambda u$ avec $\lambda^2(u^2 + v^2) = 1$.

L'équation aux ρ des points d'intersection de D avec F est

$$\rho^2\varphi(\alpha, \beta) + \rho(\alpha F'_{x_1} + \beta F'_{y_1}) + F(x_1 y_1) = 0.$$

Alors l, distance cherchée, est la différence des racines de cette équation en ρ

$$l = \frac{\sqrt{(\alpha F'_{x_1} + \beta F'_{y_1})^2 - 4\varphi(\alpha, \beta)F(x_1 y_1)}}{\varphi(\alpha, \beta)}.$$

Prenons $y_1 = 0$; alors $ux_1 + w = 0$, d'où

$$l^2 = 4\,\frac{[\alpha(Ax_1 + D) + \beta(Bx_1 + E)]^2 - (A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2)(Ax_1^2 + 2Dx_1 + F)}{[\varphi(\alpha, \beta)]^2}.$$

Remplaçant α, β, x_1 par leurs valeurs, et tenant compte de la valeur de λ, nous aurons finalement

$$(3) \qquad l^2 = \frac{-4\Phi(u, v, w)(u^2+v^2)}{(Cu^2-2Buv+Av^2)^2}.$$

Remarque. — Pour écrire que la droite D coupe la conique en des points réels, il suffit d'écrire que l^2 est positive, d'où la condition connue $\Phi(u, v, w) < 0$.

Remarque. — Si F n'est pas décomposable, ce qui est le cas général, on peut transformer le dénominateur de la formule (3) ainsi qu'il suit. Remplaçons dans ce dénominateur, A, B, C par les valeurs tirées des formules II ; il s'écrit

$$\frac{1}{\Delta}(cf-e^2)v^2 - 2(de-bf)uv + (af-d^2)u^2 \;;$$

le crochet s'écrit

$$f(au^2+2buv+cv^2)-(du+ev)^2, \qquad \text{ou encore} \qquad f\Phi(u, v, w)-(du+ev+fw)^2.$$

Donc, dans ce cas,

$$(3)' \qquad l^2 = \frac{-4\Delta^2\Phi(u, v, w)(u^2+v^2)}{[f\Phi(u, v, w)-(du+ev+fw)^2]^2}.$$

Remarque. — La formule (3) nous montre que l'enveloppe des cordes AB de longueur constante est une courbe de quatrième classe.

Question IV. — *Trouver les cordes parallèles à* D *et interceptant sur la conique une longueur maximum ou minimum.*

On peut alors considérer u, v comme donnés, w comme inconnue; la dérivée de l^2, (formule (3)), par rapport à w égalée à zéro donne

$$\Phi'_w = 0,$$

ce qui montre que la corde passe par le centre. Nous n'insisterons pas sur la discussion.

Question V. — *On donne la conique* F *et la droite* D ; *trouver l'aire du triangle* ωAB, ω *désignant toujours le centre de la conique.*

Le carré de cette aire est $l^2 \times \frac{\delta^2}{4}$, δ désignant la distance du centre de la conique à la droite. On a

$$\delta^2 = \frac{(du+ev+fw)^2}{f^2(u^2+v^2)}.$$

Donc

$$S^2 = \frac{l^2}{4} \times \frac{(du+ev+fw)^2}{f^2(u^2+v^2)}.$$

Si $F = 0$ se réduit à deux droites, on prendra pour l^2 la formule (3), sinon on prendra la formule (3)′, ce qui donne

$$(4) \qquad S^2 = \frac{-\Delta^2\Phi(u, v, w)(du+ev+fw)^2}{f^2[f\Phi(u, v, w)-(du+ev+fw)^2]^2}.$$

Si δ^2 est constant, l'enveloppe de D est, en général, une courbe de quatrième classe. Si F se réduit à deux droites, comme $\Phi(u, v, w)$ est alors carré parfait, on pourra extraire les racines carrées et l'enveloppe sera de seconde classe, ce qui est bien connu [on prend alors pour l^2 la formule (3)].

Question VI. — *Trouver les droites* D *telles que l'aire* ωAB *soit maximum.*

Cette question ne se pose que pour l'ellipse; supposons donc $f > 0$ et $\Phi(u, v, w) < 0$, de façon à ce que la droite coupe réellement l'ellipse.

Posons alors

$$-\Phi(u, v, w) = \lambda, \qquad (du + ev + fw)^2 = \mu;$$

alors λ et μ sont positifs. Cherchons le minimum de $\frac{1}{S^2}$; en négligeant des facteurs positifs, $\frac{1}{S^2}$ s'écrit

$$\frac{(\lambda f + \mu)^2}{\lambda\mu}$$

ou

$$\frac{\lambda f^2}{\mu} + 2f + \frac{\mu}{\lambda};$$

f est constant et positif; le produit des deux termes extrêmes est constant. Donc le maximum de δ^2 aura lieu quand

$$\frac{\lambda f^2}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda}$$

ou, en tenant compte des signes indiqués, $\lambda f = \mu$,

ou enfin

$$(du + ev + fw)^2 + f\Phi(u, v, w) = 0.$$

La formule (1) nous montre qu'alors ωA, ωB sont deux diamètres conjugués de l'ellipse. Dans ces conditions, la formule (4) donne pour valeur du maximum $\frac{\Delta^2}{4f^3}$, ce qui nous donne en même temps le deuxième théorème d'Apollonius : l'aire du triangle ωAB, ωA et ωB étant deux diamètres conjugués, est constante. En appelant α', β' les demi-diamètres conjugués, θ leur angle, nous aurons

$$\frac{\alpha'^2\beta'^2 \sin^2\theta}{4} = \frac{\Delta^2}{4f^3}, \qquad \text{ou} \qquad \alpha'^2\beta'^2 \sin^2\theta = \alpha^2\beta^2 = \frac{\Delta^2}{f^3},$$

α et β étant les demi-axes de l'ellipse.

Question VII. — *Aire du triangle* $\omega A'B'$, A' *et* B' *étant les points où la droite* D *coupe les asymptotes de la conique, supposée être une hyperbole.*

Il suffit, d'après ce que nous avons vu, de prendre au lieu de la conique, la conique

$$F(x, y, z) - \frac{\Delta}{f} z^2 = 0.$$

Dans la formule (4), la quantité $\Phi(u, v, w)$ du numérateur change seule; car, d'après ce que nous avons vu, elle n'est qu'en apparence au dénominateur. Il suffit, dans les expressions (1) de a, b, $-f$ de remplacer F par $F - \frac{\Delta}{f}$. a, c, b changent seuls et deviennent

$$a - \frac{\Delta}{f}C, \qquad c - \frac{\Delta}{f}A, \qquad b + \frac{\Delta}{f}B.$$

Donc, Φ se rapportant à l'équation des asymptotes, devient

$$\Phi(u, v, w) - \frac{\Delta}{f}(Cu^2 - 2Buv + Av^2),$$

ou, d'après la seconde remarque de la question III,

$$\frac{(du + ev + fw)^2}{f}.$$

Nous avons bien un carré parfait, comme nous l'avons prévu. Donc

$$(5) \qquad S'^2 = \frac{-\Delta^2(du + ev + fw)^4}{f^3[f\Phi(u, v, w) - (du + ev + fw)^2]^2}.$$

Remarque. — Supposons que D soit tangente à l'hyperbole; alors $\Phi(u, v, w) = 0$ et S'^2 devient

$$-\frac{\Delta^2}{f^3}.$$

Donc l'aire du triangle formé par une tangente à l'hyperbole et ses asymptotes est constante, ce qui est bien connu. Remarquons que f est ici négatif et (5) donne bien pour S^2 une valeur positive.

Question VIII. — *On donne la conique* $F = 0$, *un point* $P(\alpha, \beta, \gamma)$ *et une droite* D; *trouver la longueur interceptée sur la droite par les tangentes issues du point.*

Nous emploierons notre formule (3) en l'appliquant au système des tangentes issues du point P, système dont l'équation est

$$F(\alpha, \beta, \gamma)F(x, y, z) - \left(x\frac{1}{2}F'_\alpha + y\frac{1}{2}F'_\beta + z\frac{1}{2}F'_\gamma\right)^2 = 0.$$

Calculons $\Phi(u, v, w)$ pour cette équation. Puisqu'elle représente deux droites, nous savons que ce sera un carré parfait et de plus le carré de $u\alpha + v\beta + w\gamma$, équation du point P intersection des deux droites, à un facteur constant près. Il nous suffit donc de calculer le terme en u^2 dans $\Phi(u, v, w)$ qui est

$$C_1F_1 - E_1^2.$$

Nous avons

$$C_1 = CF(\alpha, \beta, \gamma) - \left(\frac{1}{2}F'_\beta\right)^2 = f\alpha^2 - 2d\alpha\gamma + a\gamma^2.$$

Nous omettons le développement de ce calcul. De même

$$F_1 = c\alpha^2 - 2b\alpha\beta + a\beta^2, \qquad E_1 = -e\alpha^2 + d\alpha\beta + b\alpha\gamma - a\beta\gamma.$$

En formant $C_1F_1 - E_1^2$ et se servant des relations (II), nous trouvons

$$C_1F_1 - E_1^2 = \Delta\alpha^2 F(\alpha, \beta, \gamma).$$

Donc, d'après ce qui a été dit,

$$\Phi(u, v, w) = \Delta F(\alpha, \beta, \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma)^2.$$

Reste le dénominateur de la formule (3) qui est $C_1u^2 - 2B_1uv + A_1v^2$.

On trouve $\qquad A_1 = f\beta^2 - 2e\beta\gamma + c\gamma^2, \qquad B_1 = -f\alpha\beta + e\alpha\gamma + d\beta\gamma - b\gamma^2.$

Donc le dénominateur s'écrit

$$(f\alpha^2 - 2d\alpha\gamma + a\gamma^2)u^2 - 2uv(-f\alpha\beta + e\alpha\gamma + d\beta\gamma - b\gamma^2) + (f\beta^2 - 2e\beta\gamma + c\gamma^2)v^2.$$

On peut le mettre sous une forme plus symétrique

$$f(u\alpha + v\beta)^2 - 2\gamma(u\alpha + v\beta)(du + ev) + \gamma^2(au^2 + 2buv + cv^2)$$

ou, en ajoutant et retranchant des termes,

$$\gamma^2\Phi(u, v, w) + f(u\alpha + v\beta + w\gamma)^2 - 2\gamma(du + ev + fw)(u\alpha + v\beta + w\gamma).$$

Donc, finalement,

$$(6) \qquad l^2 = \frac{-4\Delta F(\alpha, \beta, \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma)^2(u^2 + v^2)}{[\gamma^2\Phi(u, v, w) + f(u\alpha + v\beta + w\gamma)^2 - 2\gamma(du + ev + fw)(u\alpha + v\beta + w\gamma)]^2}.$$

Les facteurs du numérateur auraient pu être prévus *a priori*, car on voit facilement quand l doit s'annuler. Quant au dénominateur égalé à zéro et si l'on y regarde α, β, γ comme des coordonnées courantes, il représente évidemment l'ensemble des deux tangentes à la conique parallèles à D.

Remarque. — En écrivant que l^2 doit être positif quand les tangentes issues de α, β, γ à la conique sont réelles, on retrouve la condition $\Delta F(\alpha, \beta, \gamma) < 0$, qui exprime que le point est extérieur à la conique.

Remarque. — Si on assujettit l^2 à être constant, on voit que le lieu du point α, β, γ est une courbe du 4e degré. Si la droite D est tangente à la conique, alors $\Phi(u, v, w) = 0$ et (6) se simplifie et devient

$$l^2 = \frac{-4\Delta F(\alpha, \beta, \gamma)(u^2 + v^2)}{[f(u\alpha + v\beta + w\gamma) - 2\gamma(du + ev + fw)]^2},$$

et le lieu de P, quand l est constant, est une conique. Ce dernier résultat est bien connu.

Remarque. — Si α, β, γ est le centre de la conique, les tangentes issues de ce point deviennent les asymptotes et on retrouve un résultat employé dans la question VII. Alors on peut prendre $\alpha = d$, $\beta = e$, $\gamma = f$; $F(\alpha, \beta, \gamma)$ se réduit à

$$F(d, e, f) = d(Ad + Be + Df) + e(Bd + Ce + Ef) + f(Dd + Ee + Ff) = f\Delta,$$

de sorte que l^2 devient
$$\frac{-4f\Delta^2(du + ev + fw)^2(u^2 + v^2)}{[f^2\Phi(u, v, w) - f(du + ev + fw)^2]^2},$$
ce qui est bien la formule employée.

Question IX. — *Du point* P, *on mène à* F *les deux tangentes* PA, PB; *trouver l'aire du triangle* PAB.

En supposant que dans le problème précédent, D se réduise à AB, nous pourrons calculer la longueur AB. Dans le cas actuel

$$u = \frac{1}{2} F'\alpha, \qquad v = \frac{1}{2} F'\beta, \qquad w = \frac{1}{2} F'\gamma;$$

$u\alpha + v\beta + w\gamma$ devient $F(\alpha, \beta, \gamma)$; quant à $du + ev + fw$, il devient

$$d(A\alpha + B\beta + D\gamma) + e(B\alpha + C\beta + E\gamma) + f(D\alpha + E\beta + E\gamma),$$

ou, en tenant compte des propriétés de Δ, $\gamma\Delta$.

Enfin, $\Phi(u, v, w)$ s'écrit $\qquad u\,\frac{1}{2}\,\Phi'u + v\,\frac{1}{2}\,\Phi'v + w\,\frac{1}{2}\,\Phi'w.$

Nous venons de voir que $\frac{1}{2}\,\Phi'w$ devient $\gamma\Delta$; de même, $\frac{1}{2}\,\Phi'u$, $\frac{1}{2}\,\Phi'v$ deviennent $\alpha\Delta$, $\beta\Delta$. Donc Φ devient

$$\Delta(u\alpha + v\beta + w\gamma) = \Delta . F(\alpha, \beta, \gamma).$$

En tenant compte de tout cela dans la formule (6), nous aurons

$$\overline{AB}^2 = \frac{-\Delta F(\alpha, \beta, \gamma)\,[(F'\alpha)^2 + (F'\beta)^2]}{[\gamma^2\Delta - fF(\alpha, \beta, \gamma)]^2}.$$

Pour avoir le carré de l'aire, il faut multiplier cette quantité par le carré de la demi-distance de P à AB, qui est

$$\frac{1}{4}\,\frac{(u\alpha + v\beta + w\gamma)^2}{\gamma^2(u^2 + v^2)} = \frac{(u\alpha + v\beta + w\gamma)^2}{\gamma^2[(F'\alpha)^2 + (F'\beta)^2]} = \frac{[F(\alpha, \beta, \gamma)]^2}{\gamma^2[(F'\alpha)^2 + (F'\beta)^2]}.$$

Donc, finalement,

$$(7) \qquad S^2 = \frac{-\Delta[F(\alpha, \beta, \gamma)]^3}{\gamma^2[\gamma^2\Delta - fF(\alpha, \beta, \gamma)]^2}.$$

Nous voyons que si S est constant, le lieu de P est une courbe du 6e degré. Si la conique est une parabole, on a $f = 0$; S^2 se simplifie et le lieu de P, si δ^2 est constant, est la parabole primitive déplacée parallèlement à elle-même.

Remarquons que S sera infini, si $\gamma = 0$, et alors le point est à l'infini, ou bien si

$$\gamma^2\Delta - fF(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

et alors, d'après une formule vue, le point est sur une asymptote de la conique. Ces résultats étaient évidents *a priori*. Remarquons enfin qu'on aurait pu, dans la question actuelle, calculer la longueur AB au moyen de la question III, ce qui fournit en même temps un contrôle.

Question X. — *Etant donné* $F = 0$ *qui représente deux droites et un point* $P(\alpha, \beta)$, *reconnaître si le point est dans l'angle aigu, ou dans l'angle obtus des deux droites.*

On a alors l'identité $\qquad F(x, y, z) \equiv (u_1x + v_1y + w_1z)(u_2x + v_2y + w_2z),$
puisque F se réduit à deux droites.

Du point P, abaissons la perpendiculaire sur une des droites $\frac{x-\alpha}{u_1} = \frac{y-\beta}{v_1} = \rho$; elle coupe les deux droites en A et B; si les deux segments MA, MB sont de sens contraires, M est dans l'angle aigu; sinon, il est dans l'angle obtus. L'équation aux ρ des points d'intersection est

$$\rho^2\varphi(u_1v_1) + \rho(u_1f'_\alpha + v_1f'_\beta) + F(\alpha, \beta) = 0.$$

Donc le point sera dans l'angle aigu si $\varphi(u_1v_1)F(\alpha, \beta) < 0$.

On a du reste $\varphi(u_1v_1) \equiv (u_1^2 + v_1^2)(u_1u_2 + v_1v_2) \equiv (u_1^2 + v_1^2)(A + C)$ en vertu de l'identité posée au début.

En négligeant le facteur positif $u_1^2 + v_1^2$, on voit que le point sera dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus suivant que $(A + C)F(\alpha, \beta)$ sera négatif ou positif. Si $A + C = 0$, les deux droites sont perpendiculaires.

Question XI. — *Etant données deux hyperboles conjuguées, distinguer celle qui est située dans l'angle aigu des asymptotes.*

Soit l'hyperbole $$F(x, y) = 0.$$

L'équation des asymptotes est $F(x, y) - \frac{\Delta}{f} = 0$, et celle de l'hyperbole conjuguée

$$F(x, y) - \frac{2\Delta}{f} = 0.$$

D'ailleurs, le discriminant Δ' de cette seconde hyperbole est égal à $-\Delta$.

Cela étant, soit α, β un point de $F = 0$; pour qu'il soit dans l'angle aigu des asymptotes, il faut que

$$(A + C)\left[F(\alpha, \beta) - \frac{\Delta}{f}\right] < 0$$

d'après la question précédente; ou, en tenant compte de $F(\alpha, \beta) = 0$ et $f < 0$, $(A + C)\Delta < 0$.

D'ailleurs, dans les mêmes conditions, on aura $(A + C)\Delta' > 0$, puisque $\Delta' = -\Delta$, et l'hyperbole conjuguée sera dans l'angle obtus, puisque la première est dans l'angle aigu.

Donc, en résumé, celle des deux hyperboles qui est dans l'angle aigu est celle pour laquelle le discriminant est de signe contraire à $A + C$.

G. LAPOINTE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

645. — *On considère une ellipse et un point de son plan par lequel passe une corde variable. Trouver, lorsque cette corde tourne autour du point choisi :*

1° *L'enveloppe du cercle C décrit sur cette corde comme diamètre ;*

2° *L'enveloppe de la polaire du point fixe par rapport à ce cercle, et aussi l'enveloppe de la polaire du centre de l'ellipse par rapport au même cercle ;*

3° *L'enveloppe de la corde commune au cercle et à l'ellipse, qui est associée au diamètre donné pour le cercle C ; et le lieu du point de rencontre de ces deux cordes communes.*

Choisissons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse et soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de cette courbe, et x_0, y_0 les coordonnées du point fixe P autour duquel tourne la sécante variable. Si nous désignons par $y - y_0 - m(x - x_0) = 0$ l'équation de cette sécante, celle de la seconde sécante

commune au cercle et à l'ellipse associée de la précédente sera $y + mx + \mu = 0$ et l'équation du cercle indiqué sera de la forme

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + (y - mx - y_0 + mx_0)(y + mx + \mu) = 0;$$

en exprimant que cette conique est un cercle, nous aurons $\lambda = -\frac{a^2b^2}{c^2}(1 + m^2)$, et, par suite, l'équation précédente deviendra

$$(1 + m^2)(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) - c^2(y - mx - y_0 + mx_0)(y + mx + \mu) = 0,$$

ou

$$(a^2m^2 + b^2)(x^2 + y^2) + c^2m(\mu + y_0 - mx_0)x - c^2(\mu - y_0 + mx_0)y - a^2b^2(1 + m^2) + c^2\mu(y_0 - mx_0) = 0.$$

Il faut exprimer maintenant que le centre du cercle est sur la droite $y - y_0 - m(x - x_0) = 0$, et ce calcul déterminera μ en fonction de m; nous trouvons ainsi $\mu = \frac{a^2 + b^2}{c^2}(y_0 - mx_0)$; par conséquent, l'équation du cercle devient définitivement, une fois cette valeur substituée à μ,

$$(1) \qquad (a^2m^2 + b^2)(x^2 + y^2) + 2a^2m(y_0 - mx_0)x - 2b^2(y_0 - mx_0)y + (a^2 + b^2)(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2(1 + m^2) = 0.$$

1. Nous aurons l'enveloppe de ce cercle en exprimant que l'équation précédente regardée comme déterminant m a une racine double; ce calcul fournit immédiatement l'équation

$$(2) \qquad [a^2(x^2 + y^2) - 2a^2xx_0 + (a^2 + b^2)x_0^2 - a^2b^2][b^2(x^2 + y^2) - 2b^2yy_0 + (a^2 + b^2)y_0^2 - a^2b^2] - [a^2xy_0 + b^2yx_0 - (a^2 + b^2)x_0y_0]^2 = 0,$$

qui représente une quartique bicirculaire.

2. La polaire du point P et celle du point O ont respectivement pour équations

$$m^2[a^2yy_0 + b^2(x_0^2 - a^2)] + m[a^2xy_0 + b^2yx_0 - (a^2 + b^2)x_0y_0] + b^2xx_0 + a^2(y_0^2 - b^2) = 0,$$

$$m^2[a^2xx_0 - (a^2 + b^2)x_0^2 + a^2b^2] - m[a^2xy_0 + b^2yx_0 - 2(a^2 + b^2)x_0y_0] + b^2yy_0 - (a^2 + b^2)y_0^2 + a^2b^2 = 0.$$

Les enveloppes de ces droites s'obtiennent immédiatement; ce sont les paraboles

$$(3) \qquad [a^2xy_0 + b^2yx_0 - (a^2 + b^2)x_0y_0]^2 - 4[a^2yy_0 + b^2(x_0^2 - a^2)][b^2xx_0 + a^2(y_0^2 - b^2)] = 0$$

et

$$(4) \qquad [a^2xy_0 + b^2yx_0 - 2(a^2 + b^2)x_0y_0]^2 - 4[a^2xx_0 - (a^2 + b^2)x_0^2 + a^2b^2][b^2yy_0 - (a^2 + b^2)y_0^2 + a^2b^2] = 0.$$

3. La seconde corde commune au cercle et à l'ellipse a pour équation

$$y + mx + \frac{a^2 + b^2}{c^2}(y_0 - mx_0) = 0.$$

Nous voyons de suite qu'elle passe par le point fixe $x = +\frac{a^2 + b^2}{c^2}x_0$, $\qquad y = -\frac{a^2 + b^2}{c^2}y_0$.

Le lieu du point de rencontre des deux sécantes communes s'obtient en remplaçant m par $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ dans cette dernière équation. On obtient ainsi l'hyperbole équilatère

$$(5) \qquad c^2xy + b^2y_0x - a^2x_0y = 0;$$

c'est l'hyperbole d'Apollonius relative au point P.

E.-N. BARISIEN.

Bonne solution, M. Jean Merlin.

---

649. — *Lorsque dans une équation entière à coefficients réels, quatre coefficients de termes consécutifs, ax^k, bx^{k-1}, cx^{k-2}, dx^{k-3} vérifient l'inégalité $(b^2 - ac)(bd - c^2) > 0$, l'équation admet au moins deux racines imaginaires.*

Soit $$\ldots\ldots + ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + dx^{k-3} + \ldots\ldots = 0$$
l'équation proposée ; multiplions le premier membre par $x - \lambda$, λ étant réel ; nous aurons la nouvelle équation
$$\ldots\ldots + (b - a\lambda)x^k + (c - b\lambda)x^{k-1} + (d - c\lambda)x^{k-2} + \ldots\ldots = 0.$$

Or, nous pouvons déterminer la quantité réelle λ de façon que $c - b\lambda = 0$; nous aurons alors $\lambda = \frac{c}{b}$, puis la lacune simple
$$\left(b - \frac{ac}{b}\right)x^k + \left(d - \frac{c^2}{b}\right)x^{k-2};$$
si les coefficients des deux termes sont de même signe, c'est-à-dire si $(b^2 - ac)(bd - c^2) > 0$, les deux équations ont chacune deux racines imaginaires au moins. C'est ce qu'il fallait établir.

J. AMAR.

---

650. — *Lorsque dans une équation entière à coefficients réels, quatre coefficients de termes consécutifs, ax^k, bx^{k-1}, cx^{k-2}, dx^{k-3}, vérifient l'inégalité $(bc - ad)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) > 0$, l'équation admet au moins deux racines imaginaires.*

Ce théorème renferme les théorèmes de l'Abbé de Gua et de M. Hermite.

Multiplions le premier membre de l'équation proposée par $x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu$, nous aurons
$$\ldots + [c - b(\lambda + \mu) + a\lambda\mu]x^k + [d - c(\lambda + \mu) + b\lambda\mu]x^{k-1} + \ldots = 0.$$

Nous pouvons alors créer une lacune double en annulant les deux coefficients de x^k et de x^{k-1} ; λ et μ seront ainsi déterminés par les deux équations
$$a\lambda\mu - b(\lambda + \mu) + c = 0, \qquad b\lambda\mu - c(\lambda + \mu) + d = 0;$$
or, elles donnent
$$\frac{\lambda\mu}{c^2 - bd} = \frac{\lambda + \mu}{bc - ad} = \frac{1}{b^2 - ac};$$
par conséquent, λ et μ sont racines de l'équation du second degré
$$(ac - b^2)\lambda^2 + (bc - ad)\lambda + bd - c^2 = 0,$$
et les racines de cette équation sont réelles si l'on a
$$(bc - ad)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) \geqslant 0.$$

Dans ce cas, les deux équations ont les mêmes racines imaginaires, et, comme la seconde a une lacune double, elle a au moins deux racines imaginaires. La première jouit donc des mêmes propriétés.

On sait que M. Hermite a établi que lorsque quatre coefficients consécutifs d'une équation réelle et entière sont en progression arithmétique, cette équation a au moins deux racines imaginaires. Or, cette proposition découle immédiatement de la dernière que nous venons de démontrer ; car, si l'on pose
$$a = a, \qquad b = a + r, \qquad c = a + 2r, \qquad d = a + 3r,$$
on a successivement $bc - ad = 2r^2$, $\quad ac - b^2 = -r^2$, $\quad bd - c^2 = r^2$;
par conséquent, on a aussi
$$(bc - ad)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) = 0.$$

On démontrera de même le théorème suivant dû à l'abbé de Gua : que toute équation réelle et entière ayant quatre coefficients consécutifs en progression géométrique a au moins deux racines imaginaires.

J. AMAR.

Bonnes solutions des deux questions 649 et 650 : MM. G. Le Sourd (Collège Stanislas) ; J.-A. Gauthier (Valbenoîte) ; Jean Merlin.

---

651. — *On donne un cercle* (C) *et une droite* (D), *puis on considère un point* M *variable sur le cercle* (C) *et la tangente en ce point ; on prend la symétrique,* Δ, *de la droite* (D) *par rapport à cette tangente, et on demande :*

1° *L'enveloppe de la droite* Δ ;

2° *Le lieu des projections du point* M *sur la droite* Δ.

Construire les courbes ainsi trouvées. Généraliser la question.

Nous prendrons pour axe des x la droite D et pour axe des y le diamètre du cercle (C) perpendiculaire à la droite D. Soient a l'ordonnée du centre du cercle (C), R le rayon de ce cercle et φ l'angle que fait Ox avec le rayon qui aboutit au point M. Les équations du cercle et de la tangente en M sont

$$x^2 + (y - a)^2 - R^2 = 0,$$

et

$$x \cos\varphi + (y - a) \sin\varphi - R = 0.$$

Désignons par λ et θ les coordonnées d'un point quelconque de l'axe des x, par x et y celles de son symétrique par rapport à la tangente ; en exprimant que le milieu de ce couple de points est sur la tangente en M, nous aurons l'équation $(x + \lambda) \cos\varphi + (y - 2a) \sin\varphi - 2R = 0$; puis, en exprimant que la droite qui joint les deux points est perpendiculaire à la tangente,

$$(x - \lambda) \sin\varphi - y \cos\varphi = 0.$$

Nous aurons l'équation de la symétrique de l'axe des x par rapport à la tangente en éliminant λ entre ces deux équations, cela donne

$$(1) \qquad x \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi - 2a \sin^2\varphi - 2R \sin\varphi = 0.$$

Nous aurons les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur cette droite, en prenant le symétrique du pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Ox, c'est-à-dire en faisant $\lambda = R \cos\varphi$ dans les deux premières équations, puis les résolvant par rapport à x et y ; ce calcul donne

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \cos\varphi[R(2 - \cos^2\varphi) + 2a \sin\varphi], \\ y = 2(R \sin\varphi + a) \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Ces équations représentent analytiquement, quand φ varie, le lieu de la projection du point M sur la droite Δ.

Pour avoir l'enveloppe de cette droite Δ, il faut prendre la dérivée de l'équation (1) par rapport à φ, puis résoudre par rapport à x et à y le système formé par cette équation et celle de la droite Δ. On retrouve ainsi les équations (2). Les deux courbes demandées coïncident donc.

Proposons-nous maintenant de construire la courbe (2). A cet effet, remarquons d'abord que x et y ne contiennent que le sinus et le cosinus de l'angle φ ; il suffira donc de faire varier φ dans un intervalle total d'étendue 2π ; remarquons en outre que si l'on change φ en $\pi - \varphi$, y ne change pas et x change simplement de signe : la courbe est donc symétrique par rapport à Oy, et, en s'aidant de cette symétrie, il suffit de faire varier φ de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Prenons alors les dérivées de x et de y par rapport à φ ; nous aurons

$$x' = \cos 2\varphi(2a + 3R \sin\varphi), \qquad y' = \sin 2\varphi(2a + 3R \sin\varphi).$$

Nous désignerons par α l'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus a pour valeur $\frac{2a}{3R}$, si cette quantité est plus petite que 1 ; alors le classement des diverses racines des dérivées nous conduit à étudier 3 cas principaux :

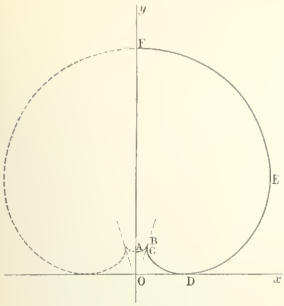


Fig. 1

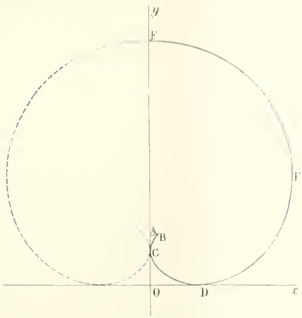


Fig. 2

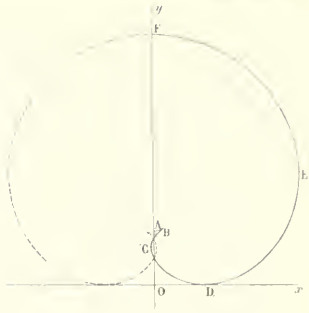


Fig. 3

φ	x'	x	y'	y	μ
$-\frac{\pi}{2}$		0		$2(a-R)$	0 A
	+	croît	+	croît	croît
$-\frac{\pi}{4}$	0	$R\sqrt{2}-a$. Max.		$a-\frac{R}{\sqrt{2}}$	$\pm\infty$ B
	—	décroît		croît	
$-\alpha$	0	$R\cos^3\alpha$. Min.	0	$\frac{2a}{3}\sin^2\alpha$. Max.	croît C
		croît	—	décroît	
0	+	R	0	0 Min.	0 D
		croît		croît	croît
$\frac{\pi}{4}$	0	$R\sqrt{2}+a$. Max	+	$a+\frac{R}{\sqrt{2}}$	$\pm\infty$ E
	—	décroît		croît	croît
$\frac{\pi}{2}$		0		$2(a+R)$	0 F

Premier cas :

$$a<\frac{3R}{2\sqrt{2}}.$$

— Dans ce cas, le tableau ci-contre contient une indication suffisante des variations simultanées de x et de y, ainsi que celles du coefficient angulaire de la tangente.

Si $a<R$, on a la figure 1 ; si $a=R$, la fig. 2 ; enfin si $a>R$, on a la figure 3. On pourrait encore, pour placer le point B par rapport à Ox, dans le premier cas, distinguer l'un de l'autre les deux cas où $a<\frac{R}{\sqrt{2}}$ et $a>\frac{R}{\sqrt{2}}$. Mais cette distinction est sans importance.

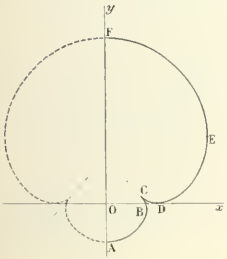


Fig. 4

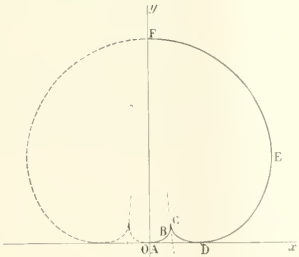


Fig. 5

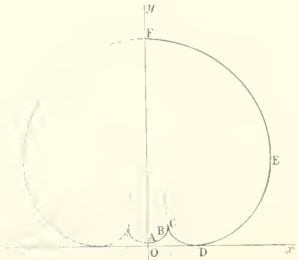


Fig. 6

φ	x'	x	y'	y	μ	
$-\frac{\pi}{2}$		0		$2(a-R)$	0	A
	+	croît	+	croît	croît	
$-\alpha$	0	$R\cos^3\alpha$. Max.	0	$\frac{2a}{3}\sin^2\alpha$. Max.	$tg^2\alpha > 0$	B
	—	décroît			croît	
$-\frac{\pi}{4}$	0	$R\sqrt{2}-a$. Min.	—	décroît	$\pm\infty$	C
		croît			croît	
0	+	R	0	0. Min.	0	D
		croît			croît	
$\frac{\pi}{4}$	0	$R\sqrt{2}+a$. Max.		croît	$\pm\infty$	E
	—	décroît	+		croît	
$\frac{\pi}{2}$		0		$2(a+r)$	0	F

Deuxième cas : $\frac{3R}{2\sqrt{2}} < a < \frac{3R}{2}$. — Comme dans le cas précédent, il nous semble inutile d'insister sur l'étude des deux fonctions x et y, et nous nous bornons à construire un tableau qui contienne les variations simultanées de ces deux fonctions.

Pour construire la courbe, il est nécessaire de distinguer les divers cas où $R\sqrt{2}-a$ est positif, négatif ou nul; car dans chacun de ces cas on a une forme particulière pour la courbe. Les figures 4, 5 et 6 correspondent à ces divers cas : $R\sqrt{2}-a>0$, $R\sqrt{2}-a=0$ et $R\sqrt{2}-a<0$.

Troisième cas : $a > \frac{3R}{2}$. — Dans ce cas, le nombre α n'existe plus et les tableaux précédents se simplifient. De même que précédemment,

φ	x'	x	y'	y	μ
$-\frac{\pi}{2}$		0		$2(a-R)$	0
	—	décroît	—	décroît	croît
$-\frac{\pi}{4}$	0	$R\sqrt{2}-a$. Min.			$\pm\infty$
		croît			croît
0	+	R	0	0 Min.	0
		croît		croît	croît
$\frac{\pi}{4}$	0	$R\sqrt{2}+a$. Max.			$\pm\infty$
		décroît	+		croît
$\frac{\pi}{2}$	—	0		$2(a+R)$	0

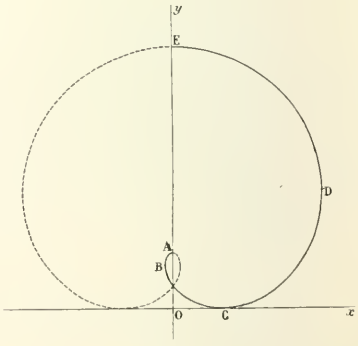
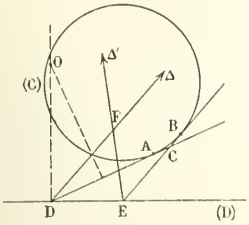


Fig. 7

la forme de la courbe résulte immédiatement de cette discussion. Nous la donnons ci-dessus.

Remarques géométriques. — Une étude très simple et purement géométrique de la question permet de montrer que les deux lieux indiqués sont identiques et fournit une construction de cette courbe par points et par tangentes. Il est visible en effet que l'angle DFE est le double de l'angle DCE, et, par suite, que le cercle circonscrit au triangle DFE passe au centre de celui qui est circonscrit au triangle DCE. A la limite, quand le point E est venu au point D, ces deux cercles sont tangents en D à la droite donnée et homothétiques dans le rapport $\frac{1}{2}$; le cercle circonscrit au triangle DEC est alors un cercle tangent à la droite (D) en D et passant en A; le point F a pour limite le milieu de la corde interceptée par Δ dans ce cercle; d'autre part, le point A est le milieu de l'arc intercepté par la droite Δ dans ce même cercle; la position limite du point F, qui est le point de contact de Δ avec son enveloppe, est donc aussi le pied de la perpendiculaire abaissée du point de contact A sur Δ. Les deux lieux coïncident donc.



Nous aurons un point quelconque du lieu en élevant en D une perpendiculaire sur la droite (D), en menant une autre droite perpendiculaire à AD à son milieu et prenant le point de rencontre O de ces deux droites; il reste alors à décrire sur OD et AD comme diamètres deux cercles et à prendre le second point de rencontre de ces deux cercles; c'est le point du lieu qui correspond au point A. Nous obtenons de la sorte très facilement les tangentes remarquables du lieu avec leurs points de contact.

Si l'on veut tracer la droite Δ, la construction la plus simple du point du lieu est celle qui est indiquée par l'énoncé. Elle se prête très aisément à la recherche des points et des tangentes remarquables.

---

652. — *On considère trois coniques* S, S' *et* Σ *ayant un foyer commun* F; *la conique* Σ *varie en restant tangente aux coniques* S *et* S' *qui sont fixes; soient* A *et* A' *les points de contact. On demande:*

1° *L'enveloppe de la directrice* D *de* Σ *qui correspond au foyer* F, *et le lieu du point de rencontre de* D *avec chacune des tangentes en* A *et* A' *à la conique* Σ;

2° *De démontrer que la droite* AA' *passe par un point fixe;*

3° *De trouver le lieu du pôle de cette droite par rapport à la conique* Σ.

Je ferai d'abord les remarques suivantes relatives à deux coniques S et S' ayant un même foyer F :

Le point F étant un ombilic réel des deux coniques S et S', il lui correspondra un second ombilic réel F';

Le point I, intersection des directrices Δ et Δ' relatives au foyer F a même polaire par rapport aux deux coniques ; cette polaire commune est la perpendiculaire élevée en F à la droite IF. Le point I est donc le point de rencontre de deux sécantes communes aux coniques S et S'.

Ceci posé, transformons la figure par polaires réciproques. Aux coniques S, S', Σ correspondent trois cercles C, C', Γ dont les deux premiers C, C' sont fixes, le troisième, Γ, variant en leur restant tangent. Le lieu de son centre γ est donc une conique (C). Soient ω et ω' les centres des cercles C et C'; α et α' les points de contact de Γ avec C et C'.

1. A la directrice D de Σ relative au foyer F, correspond dans la figure transformée le point γ. L'enveloppe de D est donc la conique S transformée de C.

Aux points de rencontre M et M' de D avec chacune des tangentes en A et A' à la conique Σ, correspondent les droites $\alpha\gamma$, $\alpha'\gamma$ qui pivotent autour des points ω et ω'. Le lieu des points M et M' se compose donc des directrices Δ, Δ' des coniques S et S' relatives au foyer F.

2. A la droite AA' correspond dans la figure transformée le point de rencontre m des tangentes en α et α' au cercle Γ. Quand Γ varie, le lieu du point m est l'axe radical des cercles C et C'. Revenant à la figure primitive, on en conclut que la droite AA' pivote autour du point F'.

3. Au pôle de la droite AA′ par rapport à la conique Σ correspond dans la figure transformée la droite $\alpha\alpha'$. Cette droite est assujettie à passer par l'un des centres de similitude des cercles C et C′, c'est-à-dire par l'un des deux ombilics de ces cercles qui sont sur la ligne des centres $\omega\omega'$. Donc, le lieu des pôles de la droite AA′ par rapport à la conique Σ se composera du couple de sécantes communes aux coniques S et S′, dont le centre est au point I, intersection des directrices Δ et Δ′ de ces deux coniques.

VICTOR BERTRAND.

Solutions analogues par MM. E. BALLY et E. BABBÉ.

QUESTIONS PROPOSÉES

731. — D'un point P pris sur la normale en un point A d'un paraboloïde, on peut mener à la surface quatre autres normales ayant pour pieds B, C, D, E.

1° Déterminer la position du point P de façon que le tétraèdre BCDE soit orthocentrique ;

2° Lieu du point P, de l'orthocentre, et du centre de gravité du tétraèdre, lorsque le point A décrit le paraboloïde ;

3° Lieu du centre, et enveloppe de la sphère circonscrite.

P. PUIG.

732. — En un point M d'une ellipse ayant pour centre le point O, on décrit un cercle ayant pour centre le point M et pour rayon le demi-diamètre conjugué du diamètre OM. Démontrer que la polaire du point O par rapport à ce cercle passe par le centre de courbure relatif au point M et trouver l'enveloppe de cette polaire.

E.-N. BARISIEN.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

647. — *On donne une hyperbole équilatère de centre O et un point A. Par le point A on mène une sécante quelconque et on considère les paraboles bitangentes à l'hyperbole aux points de rencontre avec la sécante. Soit C le pôle de cette sécante.*

1° *Démontrer que la directrice de la parabole est perpendiculaire à OC en son milieu ;*

2° *Lieu du point de rencontre de la directrice et de la sécante.*

1. Soit $x^2 - y^2 - a^2 = 0$ l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes et x', y' les coordonnées du point C. L'équation générale des coniques bitangentes à l'hyperbole aux points de rencontre de cette courbe et de la polaire du point C est

$$x^2 - y^2 - a^2 + \lambda(xx' - yy' - a^2)^2 = 0;$$

pour que cette équation représente une parabole, il faut qu'on ait $(1 + \lambda x'^2)(-1 + \lambda y'^2) - \lambda^2 x'^2 y'^2 = 0$.

On en tire $\lambda = \dfrac{1}{y'^2 - x'^2}$; par suite, l'équation de la parabole considérée est

$$(y'^2 - x'^2)(x^2 - y^2 - a^2) + (xx' - yy' - a^2)^2 = 0,$$

ou

$$f(x, y) \equiv (xy' - yx')^2 - 2a^2(xx' - yy') + a^2(x'^2 - y'^2 + a^2) = 0.$$

Pour obtenir aisément l'équation de la directrice de cette parabole, on peut considérer cette droite comme le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe deux tangentes rectangulaires.

L'équation de l'ensemble des tangentes issues du point (x, y) à la parabole est

$$(Xf'_x + Yf'_y + f'_z)^2 - 4f(x, y)f(X, Y) = 0;$$

pour que ces deux droites soient perpendiculaires, il faut qu'on ait

$$f'^2_x + f'^2_y - 4(x'^2 + y'^2)f(x, y) = 0.$$

Cette équation représente la directrice ; on peut l'écrire

$$[y'(xy' - yx') - a^2x']^2 + [-x'(xy' - yx') + a^2y']^2 - (x'^2 + y'^2)[(xy' - yx')^2 - 2a^2(xx' - yy') + a^2(x'^2 - y'^2 + a^2)] = 0,$$

ou

$$-4a^2x'y'(xy' - yx') + 2a^2(x'^2 + y'^2)(xx' - yy') - a^2(x'^2 + y'^2)(x'^2 - y'^2 + a^2) = 0,$$

ou encore, en simplifiant,

$$2(xx' + yy') - (x'^2 + y'^2) = 0.$$

On voit ainsi que la directrice est perpendiculaire à OC en son milieu.

Remarque. — La démonstration est un peu plus simple en faisant usage de coordonnées tangentielles.

L'équation tangentielle de l'hyperbole est

$$a^2(u^2 - v^2) - w^2 = 0;$$

l'équation générale des coniques bitangentes aux points de rencontre avec la polaire du point C est

$$a^2(u^2 - v^2) - w^2 + \lambda(ux' + vy' + w)^2 = 0,$$

et, en particulier, l'équation de la parabole s'obtient en faisant $\lambda = 1$,

$$a^2(u^2 - v^2) - w^2 + (ux' + vy' + w)^2 = 0.$$

Les valeurs de u et de v relatives aux tangentes issues d'un point (x, y) à cette parabole sont données par l'équation

$$a^2(u^2 - v^2) - (ux + vy)^2 + [u(x' - x) + v(y' - y)]^2 = 0;$$

écrivons que la somme des coefficients de u^2 et de v^2 est nulle, nous obtiendrons l'équation de la directrice de la parabole. Nous avons immédiatement

$$-(x^2 + y^2) + (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad 2xx' + 2yy' - x'^2 - y'^2 = 0.$$

2. Un point du lieu est défini par les équations

$$xx' - yy' - a^2 = 0, \qquad 2xx' + 2yy' - x'^2 - y'^2 = 0;$$

il faut écrire que la polaire du point C passe par le point A dont nous désignerons les coordonnées par p et q. Nous obtenons

$$px' - qy' - a^2 = 0.$$

Nous aurons l'équation du lieu en éliminant x' et y' entre ces trois équations. De la première et de la dernière, on tire sans difficulté

$$x' = \frac{a^2(y - q)}{py - qx}, \qquad y' = \frac{a^2(x - p)}{py - qx},$$

et en remplaçant x' et y' par ces valeurs dans la deuxième équation, nous avons

$$\frac{2a^2[x(y - q) + y(x - p)]}{py - qx} - \frac{a^4[(x - p)^2 + (y - q)^2]}{(py - qx)^2} = 0,$$

ou

$$2(py - qx)[x(y - q) + y(x - p)] - a^2[(x - p)^2 + (y - q)^2] = 0.$$

On reconnaît ainsi que le lieu est une courbe du troisième degré admettant le point A comme point double. Transportons-y l'origine, l'équation devient

$$2(py - qx)[2xy + py + qx] - a^2(x^2 + y^2) = 0, \qquad \text{ou} \qquad 4xy(py - qx) + (2p^2 - a^2)y^2 - (2q^2 + a^2)x^2 = 0.$$

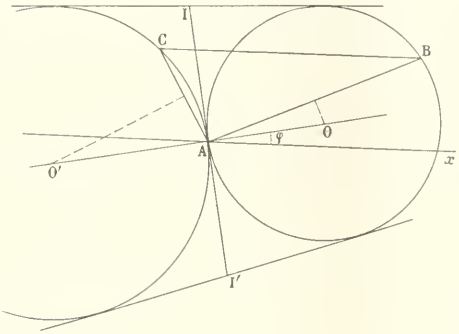
La construction de cette courbe ne présente pas de difficulté.

B. DUCASSÉ.

Bonnes solutions par MM. E.-N. Barisien et G.-A. Pouilliart.

656. — *On considère un triangle fixe* ABC *et deux cercles variables passant respectivement en* A *et* B, *puis en* A *et* C *et tangentes en* A, *et l'on demande les lieux des milieux des tangentes communes autres que la tangente en* A.

Désignons les côtés et les angles du triangle ABC par les notations habituelles. Prenons des coordonnées polaires, le pôle étant en A et l'axe polaire Ax étant parallèle à BC. Soient O et R le centre et le rayon du cercle passant par A et B, O′ et R′ le centre et le rayon du cercle passant par A et C.



La droite OO′ passe par A; la tangente en A qui est perpendiculaire à OO′ rencontre les deux autres tangentes communes extérieures en I et I′, tels que $AI = AI' = \sqrt{RR'}$; de plus, I et I′ sont les milieux de ces tangentes communes.

Si φ est l'angle variable que fait OO′ avec l'axe polaire, on a dans les triangles OAC et O′AC

$$(1)\qquad R = \frac{c}{2\cos(B-\varphi)}, \qquad R' = \frac{b}{2\cos(C+\varphi)}.$$

Les coordonnées polaires du point I sont $AI = r$, $\widehat{IAx} = \theta = 90^\circ + \varphi$.

Les valeurs de R et R′ sont donc, en fonction de θ,

$$(2)\qquad R = \frac{c}{2\sin(\theta - B)}, \qquad R' = \frac{b}{2\sin(\theta + C)}.$$

Or, comme $r = \sqrt{RR'}$, il en résulte immédiatement que l'équation du lieu est, en coordonnées polaires,

$$(3)\qquad r^2 = \frac{bc}{4\sin(\theta - B)\sin(\theta + C)}.$$

Cette équation s'écrit, en la transformant en coordonnées rectangulaires,

$$4(x\sin B - y\cos B)(x\sin C + y\cos C) + bc = 0;$$

elle représente une hyperbole ayant pour asymptotes les droites

$$x\sin B - y\cos B = 0, \qquad x\sin C + y\cos C = 0.$$

Cette hyperbole est équilatère si l'on a

$$\sin B\sin C - \cos B\cos C = 0$$

ou

$$\cos(B + C) = 0, \qquad A = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. — On démontre aussi très facilement que le lieu du centre S de similitude externe des deux cercles O et O′ est une ligne droite.

En effet, on a $\frac{2}{AS} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$ et, comme ici $AS = r$ et $\theta = \varphi = \widehat{SAx}$, on a immédiatement l'équation du lieu en coordonnées polaires

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos(B-\theta)}{c} - \frac{\cos(C+\theta)}{b}.$$

C'est l'équation d'une droite représentée en coordonnées rectangulaires par

$$(5)\qquad x(b\cos B - c\cos C) + y(b\sin B + c\sin C) = bc.$$

Si le triangle ABC est rectangle en A, la droite (5) est parallèle à BC.

E.-N. BARISIEN.

657. — *On donne une parabole* P *et un point fixe* A ; *par ce point, on mène une droite quelconque* D *et l'on considère l'hyperbole équilatère* H *ayant pour asymptotes la droite* D *et la perpendiculaire abaissée du foyer sur cette droite, et passant par le sommet de la parabole.*

On demande les lieux du centre, des sommets, des foyers de l'hyperbole H, *et le lieu du point de rencontre de deux sécantes communes à la parabole* P *et à l'hyperbole* H.

Prenons pour axe des x l'axe de la parabole et pour axe des y la tangente au sommet. Désignons par $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole et par a, b, les coordonnées du point A.

L'équation de l'hyperbole équilatère H est

$$[(x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi]\left[\left(x - \frac{p}{2}\right)\sin\varphi - y\cos\varphi\right] + \lambda = 0,$$

φ et λ désignant deux paramètres variables. Si nous exprimons que cette courbe passe au sommet de la parabole, nous obtenons $\lambda = -\frac{p}{2}\sin\varphi(a\cos\varphi + b\sin\varphi)$; par suite, l'équation de l'hyperbole H est

$$(1) \qquad 2PQ - p\sin\varphi\, P - 2(a\cos\varphi + b\sin\varphi)Q = 0,$$

P et Q désignant les deux fonctions linéaires $P \equiv x\cos\varphi + y\sin\varphi$, $Q \equiv x\sin\varphi - y\cos\varphi$.

1. Nous aurons le lieu du centre en éliminant l'angle φ entre les équations des deux asymptotes

$$(x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi = 0, \qquad y\cos\varphi - \left(x - \frac{p}{2}\right)\sin\varphi = 0;$$

nous trouvons ainsi

$$(2) \qquad (x-a)\left(x - \frac{p}{2}\right) + y(y-b) = 0;$$

cette équation représente le cercle décrit sur AF comme diamètre (F est le foyer de la parabole). Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*.

2. Les axes de l'hyperbole H ont pour équations

$$(x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi = \pm\left[\left(x - \frac{p}{2}\right)\sin\varphi - y\cos\varphi\right];$$

les lieux des sommets s'obtiennent en éliminant φ entre l'une ou l'autre des équations des deux axes et l'équation de l'hyperbole. Chacun de ces calculs est immédiat, car de l'équation de l'axe envisagé, on déduit des quantités proportionnelles à $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, et il suffit de porter ces expressions dans l'équation de l'hyperbole H pour avoir le lieu correspondant. On trouve ainsi

$$(3) \quad \left[x^2 + y^2 - \left(a + b - \frac{p}{2}\right)x + ay - a\left(b - \frac{p}{2}\right)\right]\left[x^2 + y^2 - \left(a + \frac{p}{2}\right)x - by + a\frac{p}{2}\right]$$
$$+ \frac{p}{2}(x + y - a)\left[(a+b)x + (b-a)y - a\frac{p}{2}\right] = 0,$$

$$(4) \quad \left[x^2 + y^2 - \left(a + \frac{p}{2}\right)x - by + \frac{ap}{2}\right]\left[x^2 + y^2 - \left(a + \frac{p}{2}\right)x - by + \frac{ap}{2}\right]$$
$$+ \frac{p}{2}(x - y - a)\left[(a-b)x + (a+b)y - \frac{ap}{2}\right] = 0.$$

Ce sont deux courbes circulaires du quatrième degré.

3. Pour avoir les lieux des foyers, nous nous appuierons sur l'identité $P^2 + Q^2 \equiv x^2 + y^2$; elle nous permet d'écrire $(P+Q)^2 \equiv x^2 + y^2 + 2PQ$, et, par suite, l'équation de l'hyperbole équilatère H ainsi

$$(P+Q)^2 - x^2 - y^2 - p\sin\varphi P - 2(a\cos\varphi + b\sin\varphi)Q = 0,$$

ou

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (P+Q)^2 - p\sin\varphi P - 2(a\cos\varphi + b\sin\varphi)Q - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2.$$

Nous exprimerons que le point (α, β) est un foyer en écrivant que le second membre est un carré

parfait; pour cela, il faut d'abord écrire que la fonction linéaire $P+Q$ et celle qui suit $(P+Q)^2$ dans le second membre ont leurs coefficients proportionnels, ce qui donne

$$\mu = \frac{p \sin\varphi \cos\varphi - 2\sin\varphi(a\cos\varphi + b\sin\varphi) - 2\alpha}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{p\sin^2\varphi + 2\cos\varphi(a\cos\varphi + b\sin\varphi) - 2\beta}{\sin\varphi - \cos\varphi};$$

ensuite, si l'on désigne par H la fonction linéaire $\dfrac{P+Q}{\cos\varphi + \sin\varphi}$, le second membre étudié s'écrit

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 H^2 - \mu(\cos\varphi + \sin\varphi)H + \alpha^2 + \beta^2 = 0;$$

il nous reste à exprimer que c'est un carré parfait, ce qui nous donne $\mu^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$.

Pour éliminer μ et φ entre les deux équations précédentes et celle-ci, nous multiplierons le premier rapport par $\cos\varphi$, le second par $\sin\varphi$ et nous les ajouterons terme à terme; puis nous multiplierons le premier rapport par $\sin\varphi$, le second par $\cos\varphi$ et nous les retrancherons terme à terme; nous obtiendrons ainsi

$$2\mu \sin\varphi\cos\varphi = (p - 2\beta)\sin\varphi - 2\alpha\cos\varphi, \qquad \mu = 2(\beta - a)\cos\varphi - 2(b + \alpha)\sin\varphi.$$

En multipliant maintenant ces deux équations membre à membre, puis en élevant la seconde au carré, membre à membre aussi, nous aurons deux équations du second degré en $\operatorname{tg}\varphi$ entre lesquelles l'élimination de φ est facile; il n'y aura plus alors qu'à remplacer dans le résultat μ par $2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Nous aurons un second lieu de foyers en partant de l'identité $(P-Q)^2 \equiv x^2 + y^2 - 2PQ$ et en procédant de même.

---

658. — *Dans un cercle fixe, on considère un rayon fixe* OA *et un rayon variable* OM; *le point* M *se projette en* P *sur* OA *et on demande de trouver :*

1° *Le lieu du centre de gravité du triangle* OMP;

2° *Les lieux des centres des cercles inscrits dans ce triangle.*

Prenons pour axe des x le rayon fixe OA et pour axe des y le rayon OB perpendiculaire. Soient R le rayon du cercle, $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$ les coordonnées du point M.

1. Le centre de gravité du triangle OMP a pour coordonnées

$$x = \frac{2R\cos\varphi}{3}, \qquad y = \frac{R\sin\varphi}{3};$$

par suite, le lieu de ce point a pour équation

$$\frac{9x^2}{4R^2} + \frac{9y^2}{R^2} = 1.$$

Cette équation représente une ellipse.

2. Les divers lieux qu'il nous reste à trouver sont évidemment symétriques par rapport à Ox et Oy; par suite, il suffira de construire les portions de ces lieux qui correspondent aux valeurs du paramètre φ comprises entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

Dans cette hypothèse, les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle O du triangle OMP ont respectivement pour équations $y = x\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ et $y = -\dfrac{x}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}$; celles de l'angle P,

$$y + x - R\cos\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad y - x + R\cos\varphi = 0.$$

1. — Le centre du cercle inscrit est déterminé par les équations

$$y = x\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad y + x - R\cos\varphi = 0.$$

Éliminons φ entre ces deux équations, en remarquant que $\cos\varphi = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$; nous obtenons sans difficulté

$$(x + y)(x^2 + y^2 - Rx + Ry) = 0.$$

D'après la remarque faite plus haut, nous ne considérons que les points de ce lieu qui correspondent aux valeurs de φ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire aux valeurs de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ comprises entre 0 et 1.

La droite $x + y = 0$ est donc à rejeter. D'autre part, l'équation $x^2 + y^2 - Rx + Ry = 0$ représente le cercle circonscrit au triangle OAB'; nous ne conserverons de ce cercle que l'arc OCA situé dans l'angle AOB.

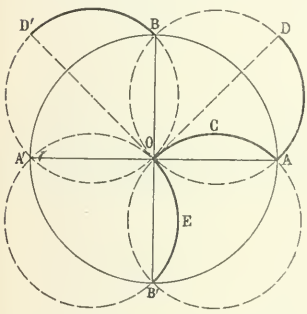
II. — Le centre du cercle exinscrit dans l'angle O est défini par les équations

$$y = x \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad y - x + R\cos\varphi = 0.$$

En éliminant φ entre ces deux équations, nous trouvons

$$(x - y)[x^2 + y^2 - Rx - Ry] = 0.$$

Le lieu se compose donc de l'arc AD du cercle circonscrit au triangle OAB.



La droite $x - y = 0$ correspond à la valeur $\varphi = \frac{\pi}{2}$; les deux bissectrices considérées sont alors confondues suivant cette droite.

III. — Le centre du cercle exinscrit dans l'angle P est à l'intersection des deux droites

$$y = -\frac{x}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}, \qquad y + x - R\cos\varphi = 0.$$

En éliminant φ, nous obtenons

$$(x + y)(x^2 + y^2 + Rx - Ry) = 0;$$

la portion de lieu relative aux valeurs de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ comprises entre 0 et 1 est l'arc BD' du cercle circonscrit au triangle OA'B.

IV. — Enfin, par une méthode toute semblable, on reconnaîtra sans difficulté que le lieu du centre du cercle exinscrit à l'angle M est l'arc OEB' du cercle circonscrit au triangle OA'B'.

En achevant par symétrie, on voit que le lieu complet se compose des quatre circonférences circonscrites aux triangles OAB, OA'B, OAB' et OA'B'.

Les solutions reçues ne sont pas complètes.

---

660. — *On considère deux cercles fixes* C *et* C'. *Par le centre de* C' *on mène un diamètre variable qui dépend d'un paramètre arbitraire* λ; *soit* D_λ *cette droite. On considère, en outre, tous les cercles qui passent par l'intersection de* C' *et de* D_λ; *ces cercles contiennent un nouveau paramètre variable* μ; *soit* C_μ^λ *un d'eux.*

1° *Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de* C *sur l'axe radical des cercles* C_μ^λ *et* C *quand* μ *varie seul.*

2° *Trouver les coordonnées des points de contact des cercles* C_μ^λ *et* C, *quand* μ *prend des valeurs parti-*

culières, λ restant fixe, et l'équation de la droite, $\Delta_\lambda = 0$, qui joint ces points. Montrer que cette droite passe par un point fixe, quand λ varie.

3° *Lieu du point de rencontre de D_λ et de Δ_λ, quand λ varie. Ce lieu est une conique. Dans quels cas est-elle un cercle ou une hyperbole équilatère?*

Prenons pour axe des y la ligne des centres et pour origine le centre du cercle C. Si nous désignons par R et R′ les rayons des deux cercles C et C′ et par a l'ordonnée du centre de C′, nous aurons alors pour équations de ces deux cercles,

$$C \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0, \qquad C' \equiv x^2 + (y-a)^2 - R'^2 = 0.$$

Une droite quelconque passant par le centre de C′ a pour équation $D_\lambda \equiv y - a - \lambda x = 0$, et les cercles C_μ^λ ont pour équation générale

$$C_\mu^\lambda \equiv x^2 + (y-a)^2 - R'^2 + 2\mu(y - a - \lambda x) = 0.$$

1. L'équation de l'axe radical des deux cercles C et C_μ^λ s'obtient en remplaçant dans l'équation du second $x^2 + y^2$ par R^2. La droite que l'on obtient ainsi,

$$-2ay + R^2 - R'^2 + a^2 + 2\mu(y - a - \lambda x) = 0,$$

passe visiblement par un point fixe quand μ varie seul ; par conséquent, le lieu du point demandé est un cercle. Nous aurons l'équation de ce cercle en éliminant μ entre l'équation de l'axe radical et celle de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite ; cette dernière est $(\mu - a)x + \mu\lambda y = 0$; elle donne $\mu = \dfrac{ax}{x + \lambda y}$ et, en portant cette valeur dans la première équation, nous obtenons

$$(x + \lambda y)(-2ay + R^2 - R'^2 + a^2) + 2ax(y - \lambda x - a) = 0,$$

ou

$$(1) \qquad 2a\lambda(x^2 + y^2) - (R^2 - R'^2 - a^2)x - (R^2 - R'^2 + a^2)\lambda y = 0.$$

2. Pour exprimer que le cercle C_μ^λ est tangent au cercle C, il suffit d'exprimer que l'axe radical de ces deux cercles touche le cercle C. Or cet axe radical passe par un point fixe dont les coordonnées vérifient les deux équations

$$-2ay + R^2 - R'^2 + a^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda x = y - a;$$

ces deux équations donnent

$$y = \frac{R^2 - R'^2 + a^2}{2a} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{R^2 - R'^2 - a^2}{2a\lambda};$$

par conséquent, la droite qui joint les deux points de contact des cercles C_μ^λ avec le cercle C est la polaire de ce point par rapport au cercle C. Elle a donc pour équation

$$\Delta_\lambda \equiv (R^2 - R'^2 - a^2)x + (R^2 - R'^2 + a^2)\lambda y - 2a\lambda R^2 = 0.$$

Cette droite passe par le point fixe dont les coordonnées sont $x = 0$ et $y = \dfrac{2aR^2}{R^2 - R'^2 + a^2}$.

Les coordonnées des points de contact des cercles C et C_μ^λ s'obtiennent sans difficulté en cherchant les points de rencontre du cercle C avec la droite Δ_λ.

3. Le lieu du point de rencontre des deux droites D_λ et Δ_λ s'obtient en éliminant λ entre les équations de ces deux droites. Nous trouvons ainsi $\lambda = \dfrac{y - a}{x}$, puis

$$(R^2 - R'^2 - a^2)x^2 + (R^2 - R'^2 + a^2)y(y - a) - 2aR^2(y - a) = 0,$$

ou

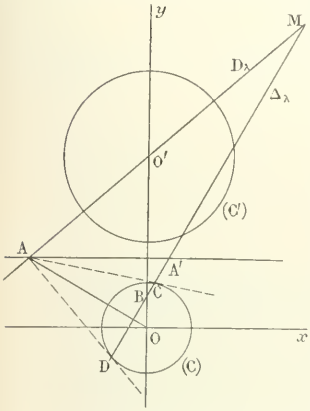
$$(2) \qquad (R^2 - R'^2)(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2) - ay(3R^2 - R'^2 + a^2) + 2a^2R^2 = 0.$$

Cette équation représente une conique ayant pour axe de symétrie l'axe des y.

C'est un cercle quand a est nul, c'est-à-dire quand les deux cercles sont concentriques ; c'est une hyperbole équilatère quand $R' = R$, c'est-à-dire quand les deux cercles sont égaux.

Bonne solution : M. F. Pégourier, à Cette.

Solution géométrique. — Le point de rencontre A de D_λ avec l'axe radical des cercles fixes C et C′ est le centre radical des trois cercles C, C′ et C'^{λ}_{μ} ; par conséquent, l'axe radical des deux cercles C et C'^{λ}_{μ} passe au point A. Le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur cette droite est donc un cercle, le cercle décrit sur OA comme diamètre.



Les points de contact des cercles C'^{λ}_{μ} avec le cercle C, λ étant fixe, sont les points de contact des tangentes menées du point A au cercle C. La droite qui les joint est la polaire du point A par rapport à ce cercle ; elle passe par un point fixe B, le pôle de l'axe radical des cercles C et C′ par rapport au cercle C. Soit A′ le point où elle perce cet axe radical ; les deux points A et A′ décrivent sur cette droite une involution ; par conséquent, les droites D_λ et Δ_λ décrivent deux faisceaux homographiques ayant pour centres les points O′ et B. Le lieu de leurs points de rencontre est donc une conique passant aux points O′ et B.

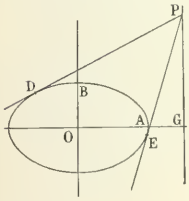
Pour avoir les directions asymptotiques de cette conique, il faut chercher à quel moment les droites D_λ et Δ_λ sont parallèles, c'est-à-dire, puisque OA est perpendicutaire à Δ_λ, à quel moment OA et D_λ sont rectangulaires. Nous trouverons les points A qui correspondent à ces directions en cherchant les points de rencontre du cercle décrit sur OO′ comme diamètre avec l'axe radical de C et C′. Les directions asymptotiques s'obtiendront en joignant le point O′ à ces deux points. Il est donc facile de voir, dans chaque cas, quelle est la nature de cette conique.

Pour que les deux directions asymptotiques soient rectangulaires, il faut que la droite AA′ passe au milieu de OO′, et, par suite, que les deux cercles C et C′ soient égaux. Dans ce cas, la conique est une hyperbole équilatère.

Pour que ce soit un cercle, il faut que les deux directions asymptotiques soient isotropes, c'est-à-dire que les deux points de rencontre avec l'axe radical de C et C′ soient les points cycliques. Donc cet axe doit être rejeté à l'infini, et, par suite, les deux cercles doivent être concentriques.

QUESTIONS PROPOSÉES

733. — On donne une ellipse rapportée à ses axes OA, OB et un point P.



1° Former l'équation d'une conique C ayant pour centre le point P, ayant ses axes parallèles à ceux de l'ellipse et passant par les points de contact D, E, des tangentes à l'ellipse menées par le point P.

2° On suppose que le point P décrive une perpendiculaire PG au grand axe de l'ellipse. $OG = \alpha$. Montrer que les coniques C passent par deux points fixes H et H′. Construire ces points.

3° Trouver dans les mêmes conditions le lieu géométrique L des foyers des coniques C et construire ce lieu.

4° Soit K le pôle de la droite PG par rapport à l'ellipse OAB. Trouver le lieu des points d'intersection de la courbe L avec la perpendiculaire au grand axe de l'ellipse menée par le point K quand α varie. Construire la courbe obtenue.

734. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, et un point A sur l'axe des x ; l'abscisse du point A est a. Par le point A on mène une perpendiculaire à la bissectrice de l'angle xOy, et on donne sur cette perpendi-

culaire un point P dont l'abscisse est x_0. On considère les coniques passant par les trois points O, A, P et telles que la droite AP leur soit normale au point A.

1° Trouver le lieu géométrique H du point d'intersection de la normale OM au point O avec la parallèle à l'axe des x menée par le point B où la parallèle à l'axe des y tracée par le point A rencontre la courbe.

2° On suppose que, le point A restant fixe, on fasse varier la position du point P sur la droite AP. Trouver le lieu C des points de contact des tangentes aux courbes H parallèles à l'axe des y. Distinguer sur la courbe C les points correspondant aux cas où le point P est par rapport à l'axe des x du côté des y positifs ou négatifs.

3° Lieu du centre des courbes H.

4° On fait varier la position du point A sur l'axe des x, et, pour chacune de ces positions, on construit la parallèle à la droite AP qui coupe l'axe des x au point ayant pour abscisse $\frac{K^2}{a}$, K étant une longueur donnée. Trouver le lieu des points d'intersection des droites L et des courbes C.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons d'algèbre, par CH. BRIOT, revues et mises au courant des nouveaux programmes par M. E. LACOUR, maître de conférences à l'Université de Nancy, ancien professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. — 2e Partie, à l'usage des Elèves de la classe de Mathématiques spéciales, 17e édition. — Paris, libr. Delagrave.

L'éloge de l'Algèbre de Briot n'est plus à faire; le grand succès qu'ont obtenu, d'une façon bien méritée, les éditions successives de cet ouvrage tient aux qualités dont l'auteur a fait preuve dans tous ses écrits, et en particulier à la clarté et à la simplicité avec lesquelles sont présentées les théories les plus difficiles.

M. Lacour, dont l'enseignement clair et précis comme professeur de Mathématiques spéciales a été très remarquable, possède toutes les qualités nécessaires pour mettre l'œuvre de Briot au niveau des programmes actuels. L'écueil qu'il a su éviter est d'effrayer les débutants par des théories trop générales qu'ils ont de la peine à saisir et à s'assimiler; il conduit le lecteur par une pente insensible depuis les premières notions jusqu'aux théories les plus élevées relatives aux séries et aux produits infinis et à la définition précise de l'intégrale définie; il montre souvent la nature des raisonnements sur des exemples numériques ou des cas simples avant de passer au cas général, et donne de chaque théorie de nombreuses applications. C'est dans cet esprit que sont traitées les questions relatives aux déterminants, aux équations linéaires, à la continuité des fonctions, aux radicaux, aux séries, aux dérivées, à la décomposition en carrés, à la résolution des équations; chaque règle ou théorème est exposé simplement et suivi d'exemples appropriés. En particulier, la séparation des racines des équations, leur détermination et la théorie des différences sont enrichies de calculs numériques qu'il est rare de rencontrer en aussi grand nombre dans les traités d'Algèbre; on trouve là les méthodes propres aux calculs d'approximation des racines, trop souvent négligées et cependant si utiles dans les sciences d'applications.

La théorie des séries est heureusement complétée par des chapitres relatifs aux séries entières et aux produits infinis à termes constants ou variables; la règle de l'Hopital est exposée d'une manière claire et entièrement rigoureuse; on trouvera aussi dans cet ouvrage des notions sur les transformations linéaires, sur les invariants et covariants des formes homogènes, avec applications à l'équation du 4e degré; ce sont là des questions trop importantes pour qu'on puisse les ignorer aujourd'hui.

M. Lacour a ajouté à l'édition précédente plusieurs questions intéressantes, par exemple la réduction de la transformation linéaire générale à trois transformations élémentaires, la propriété du nombre e de n'être racine d'aucune équation algébrique à coefficients rationnels, et le théorème de Bezout relatif à l'élimination de deux inconnues entre trois équations. En somme, l'ouvrage actuel, par la simplicité et la rigueur des raisonnements, est un des meilleurs traités d'algèbre non seulement pour les candidats aux Ecoles, mais encore pour les élèves des Facultés des sciences qui y trouveront de précieuses indications.

H. VOGT.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

8e Année. N° 7. Avril 1898.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA DÉTERMINATION DU POINT DOUBLE D'UNE CUBIQUE UNICURSALE

par M. **A. Naud**, Professeur au lycée Charlemagne.

Soient

$$x = a_1t^3 + b_1t^2 + c_1t + d_1, \qquad y = a_2t^3 + b_2t^2 + c_2t + d_2, \qquad z = a_3t^3 + b_3t^2 + c_3t + d_3,$$

les expressions des coordonnées homogènes d'un point de la cubique en fonction du paramètre variable t. Il faut chercher deux valeurs t et t' de la variable telles que les valeurs correspondantes (x, y, z), (x', y', z') des coordonnées soient proportionnelles, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}.$$

Cela revient à dire que si l'on forme le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} x & x' & \alpha \\ y & y' & \beta \\ z & z' & \gamma \end{vmatrix},$$

il doit être nul, quels que soient α, β, γ.

Pour écrire plus simplement les calculs, appelons A, B, C, D les coefficients de a, b, c, d dans le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Cela posé, choisissons α, β, γ de manière à simplifier le plus possible le déterminant δ. En faisant d'abord

$$\alpha = a_1, \qquad \beta = a_2, \qquad \gamma = a_3,$$

on a

$$\delta = \begin{vmatrix} (a_1t^3 + b_1t^2 + c_1t + d_1) & (a_1t'^3 + b_1t'^2 + c_1t' + d_1) & a_1 \\ (a_2t^3 + b_2t^2 + c_2t + d_2) & (a_2t'^3 + b_2t'^2 + c_2t' + d_2) & a_2 \\ (a_3t^3 + b_3t^2 + c_3t + d_3) & (a_3t'^3 + b_3t'^2 + c_3t' + d_3) & a_3 \end{vmatrix},$$

ou, en développant,

$$\delta = (t' - t)[Dtt' - C(t + t') + B],$$

ce qui donne, après division par $t' - t$, l'équation

$$\text{(1)} \qquad B - C(t + t') + Dtt' = 0.$$

En faisant $\alpha = d_1$, $\beta = d_2$, $\gamma = d_3$, on a

$$\delta = tt'(t - t')[Ctt' - B(t + t') + A].$$

La solution $tt' = 0$ provient du choix particulier que nous avons fait des nombres α, β, γ et doit être rejetée ; nous aurons donc, en général, l'équation

$$(2) \qquad A - B(t + t') + Ctt' = 0,$$

distincte de (1), sauf dans des cas particuliers.

Les inconnues t et t' sont racines de l'équation en T

$$(3) \qquad T^2 - T(t + t') + tt' = 0.$$

Les équations (3), (2), (1) donnent immédiatement

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} T^2 & T & 1 \\ A & B & C \\ B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du second degré ayant pour racines t et t' ; la règle qui permet de la déduire du tableau des coefficients a_1, b_1, c_1, ..., etc. m'a paru assez simple pour mériter d'être signalée.

ÉQUATION MULTILINÉAIRE DES CONIQUES

par M. **P. Barbarin**, Professeur au lycée de Bordeaux.

Dans un assez grand nombre de problèmes, l'équation de la conique lieu d'un point M se présente sous une forme telle que

$$(1) \qquad a_1\overline{MP_1}^2 + \ldots\ldots + a_m\overline{MP_m}^2 + b_1\overline{MH_1}^2 + \ldots\ldots + b_n\overline{MH_n}^2 = 0,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_m$ étant m points donnés, $MH_1, \ldots, MH_n$, désignant les distances de M a n droites données $D_1, \ldots, D_n$; les $m + n$ paramètres $a_1, \ldots, b_n$ sont connus en grandeur et en signe. Les équations cartésienne ordinaire, trilinéaire, focale, bipolaire, sont toutes des cas particuliers directs ou indirects de la forme (1) qui peut évidemment représenter toutes les variétés de coniques. Il n'est point nécessaire de décomposer cette forme pour reconnaître certaines propriétés de la courbe ; au contraire, cette forme même peut conduire plus avantageusement à la découverte de quelques-unes ; c'est ainsi, par exemple, que la tangente en M résulte de ce théorème :

Si on affecte les points $P_1, \ldots, P_m, H_1, \ldots, H_n$ *respectivement de coefficients égaux à* $a_1, \ldots, b_n$ *et qu'on construise le centre* ω *de leurs distances proportionnelles*, ωM *est la normale en* M.

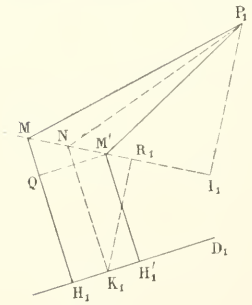


Fig. 1

Effectivement, soit M' un point du lieu voisin de M ; quand on passe de M à M', la variation du premier membre de l'équation (1) donne

$$(2) \qquad \Sigma a_1(\overline{MP_1}^2 - \overline{M'P_1}^2) + \Sigma b_1(\overline{MH_1}^2 - \overline{M'H'_1}^2) = 0;$$

abaissons P_1I_1 perpendiculaire sur MM', NK_1 perpendiculaire sur D_1 du milieu N de MM', K_1R_1 perpendiculaire sur MM', et M'Q perpendiculaire sur MH_1 (*fig.* 1) ; nous avons

$$\overline{MP_1}^2 - \overline{M'P_1}^2 = 2\overline{MM'} \times \overline{NI_1},$$

$$\overline{MH_1}^2 - \overline{M'H'_1}^2 = 2\overline{MQ} \times \overline{NK_1} = 2\overline{MM'} \,.\, \overline{NR_1};$$

alors, en divisant les deux membres de l'équation (2) par $2\overline{MM'}$, nous obtenons

$$\Sigma a_1 NI_1 + \Sigma b_1 NR_1 = 0;$$

donc, si MM′ devient la tangente TT′ en M, et qu'on projette sur sa direction les $m+n$ points $P_1, \ldots, H_n$ en $p_1, \ldots, h_n$, on a (*fig.* 2)

$$\Sigma a_1 \overline{Mp_1} + \Sigma b_1 \overline{Mh_1} = 0. \tag{3}$$

Soit ω le centre des distances proportionnelles relatif à M ; son abscisse X, calculée sur TT′ par rapport à l'origine M, est déterminée par l'équation

$$X = \frac{\Sigma a_1 \overline{Mp_1} + \Sigma b_1 \overline{Mh_1}}{\Sigma a_1 + \Sigma b_1} = 0;$$

donc ωM est perpendiculaire à TT′.

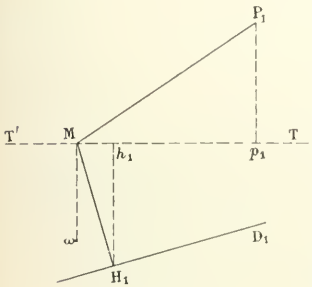


Fig. 2

Il en résulte que si dans la figure 2 on substituait simplement au point P_1 une droite Δ_1 perpendiculaire à MP_1 en ce point, cette nouvelle droite étant supposée fixe, l'équation (1) représenterait une seconde conique tangente en M à TT′.

On doit remarquer que si le point P_m ou la droite D_n s'éloignent à l'infini dans une direction déterminée, l'équation (1) ne peut avoir lieu qu'en supposant $a_m = 0$, $b_n = 0$; alors les termes correspondants se réduisent à des constantes; ils disparaissent donc de l'équation (2) et la tangente en M ne dépend que des éléments finis.

Exemple I. — Soit M un point d'une conique conjuguée au triangle ABC,

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0;$$

projetons ce point en p, q, r sur les côtés du triangle, et, ces points étant affectés des coefficients a, b, c, construisons le centre ω de leurs distances proportionnelles; ωM est la normale.

Si l'on suppose que Z s'éloigne indéfiniment, l'équation devient

$$aX^2 + bY^2 = K$$

et représente une conique ayant pour centre le point de rencontre des droites X, Y et ω est déterminé par la condition

$$a.\overline{\omega p} + b.\overline{\omega q} = 0;$$

on retombe ainsi sur une propriété connue.

Exemple II. — L'équation bipolaire d'une ellipse $MF + MF' = 2a$ est identique à la suivante

$$(\rho^2 + \rho'^2) - 2\,\frac{c^2x^2}{a^2} - 2a^2 = 0;$$

donc, si l'on affecte chaque foyer d'un coefficient égal à a^2, et la projection H de M sur l'axe Oy du coefficient $-2c^2$, ω est sur HO prolongé, de sorte que

$$\frac{\overline{O\omega}}{\overline{OH}} = -\frac{c^2}{b^2},$$

ce qui est conforme à la propriété de la normale.

Exemple III. — Soient un cercle ayant pour centre P et R pour rayon et une droite D. L'équation focale de la conique (M) exprimant que la puissance de M par rapport au cercle est proportionnelle au carré de sa distance à la droite, a la forme

$$\overline{MP}^2 + a\overline{MH}^2 - R^2 = 0. \tag{4}$$

Pour construire la tangente en M, prenons sur HP le point ω tel que $\overline{\omega P} + a.\overline{\omega H} = 0$;

il n'y a plus qu'à tirer MT perpendiculaire à ωM (*fig.* 3); le point ω qui vient d'être obtenu est indépendant de R; donc, si P, D demeurant fixes, et a constant, on coupe par une perpendiculaire à D toutes les coniques représentées par (4), les normales aux points de rencontre concourent en ω, et les tangentes enveloppent une parabole qui a ω pour foyer. Soient Q, S les rencontres de MT avec D et la perpendiculaire à PM.

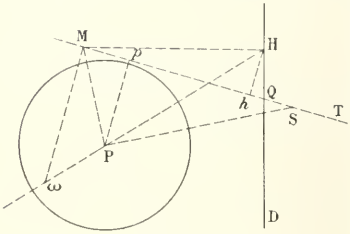


Fig. 3.

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{MS}} = \overline{Mp}, \qquad \frac{\overline{MH}^2}{\overline{MQ}} = \overline{Mh};$$

donc
$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{MS}} = \frac{-a\overline{MH}^2}{\overline{MQ}} = \frac{R^2}{\overline{QS}}.$$

par conséquent, lorsque $R = 0$, Q et S se confondent, P devient foyer, et l'on sait que la tangente MT et la perpendiculaire PS au rayon vecteur PM se coupent sur la directrice. Pour une valeur quelconque de R, S décrit une quartique.

L'équation de toute conique peut être, d'une infinité de manières, ramenée à la forme (1) *où* $m = 1$ $n = 2$, *soit*

$$\overline{MP}^2 + a\overline{MH}^2 + a'\overline{MH'}^2 = 0, \tag{5}$$

le point P *étant arbitrairement choisi.*

Le cercle point (P) et la conique $f(x, y) = 0$ ont en commun quatre points imaginaires et un seul couple de sécantes communes UV réelles; il existe une valeur réelle λ_1 autre que zéro, pour laquelle on a

$$-\lambda_1 f(x, y) \equiv (P) + UV = (P) + \left(\frac{U+V}{2}\right)^2 - \left(\frac{U-V}{2}\right)^2.$$

Les droites D, D', qui ont pour équations $U + V = 0$, $U - V = 0$, sont harmoniquement conjuguées par rapport aux sécantes U et V; on peut donc les choisir d'une infinité de façons et ramener de la sorte l'équation de la conique f à la forme (5).

D et D' sont perpendiculaires entre elles quand elles sont bissectrices des angles formés par U et V, ou parallèles aux directions principales de f. Pour que U et V deviennent parallèles à une de ces mêmes directions, ou que l'une des droites D, D' s'éloigne à l'infini, il faut et il suffit que P appartienne à l'un des axes de symétrie de f.

Alors l'équation (5) se réduit à

$$\overline{MP}^2 + a\overline{MH}^2 = K,$$

K désignant une constante. Un cercle réel de rayon $R = \sqrt{\pm K}$, suivant que K est $\gtrless 0$, et décrit de P comme centre, est *focal* ou *pseudo-focal*, c'est-à-dire qu'à tout point M de la conique, on peut faire correspondre un point réel N de ce cercle, tel que $\frac{MN}{MH}$ égale un rapport constant.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1897).

Mathématiques (Paris et Départements).

661. — *Soient oabc un tétraèdre* T *trirectangle au sommet o dont les arêtes oa, ob, oc ont la même longueur l, et d le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.*

On suppose que le tétraèdre T *se déplace par rapport à un trièdre trirectangle fixe* OX, OY, OZ *de manière que les points* a, b, c, d *décrivent respectivement les plans qui ont pour équations*

$$Y + Z = 0, \qquad Z + X = 0, \qquad X + Y = 0, \qquad X + Y + Z + \frac{l}{2} = 0.$$

1° *Démontrer que les points symétriques des points* a, b, c, d *par rapport aux arêtes* oa, ob, oc *du tétraèdre* T *décrivent également des plans.*

2° *Trouver l'équation de la surface* S *décrite par le sommet* o *du tétraèdre* T. — *Cette surface, qui est du quatrième ordre, a un point triple et trois droites doubles.*

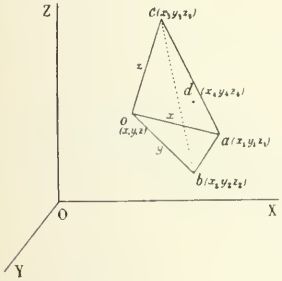
3° *Par chaque point* α *d'une droite double passent deux droites* δ, δ' *qui rencontrent la surface* S *en quatre points confondus.* — *Chercher pour quelles positions du point* α *sur cette droite double les droites* δ, δ' *coïncident.*

4° *Montrer que tout plan tangent à la surface* S *coupe cette surface suivant deux coniques, et que ces deux coniques se confondent pour quatre positions particulières du plan tangent.*

Nota. — *Pour éviter une perte de temps aux concurrents qui croiraient devoir faire usage des formules d'Euler, on rappelle que l'on a*

$$a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \qquad a' = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \qquad a'' = \sin\varphi\sin\theta,$$
$$b = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \qquad b' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \qquad b'' = \cos\varphi\sin\theta,$$
$$c = \sin\psi\sin\theta, \qquad c' = -\cos\psi\sin\theta, \qquad c'' = \cos\theta.$$
$$X = ax + by + cz, \qquad Y = a'x + b'y + c'z, \qquad Z = a''x + b''y + c''z.$$

Désignons par x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4 les coordonnées des points o, a, b, c, d.



Nous avons les relations

$$\text{(I)} \qquad y_1 + z_1 = 0, \qquad z_2 + x_2 = 0, \qquad x_3 + y_3 = 0,$$
$$x_4 + y_4 + z_4 + \frac{l}{2} = 0;$$

en faisant $l = 1$, cette dernière relation devient

$$x_4 + y_4 + z_4 + \frac{1}{2} = 0.$$

D'autre part, les formules de transformation des coordonnées sont :

$$X = ax + by = cz, \qquad Y = a'x + b'y + c'z, \qquad Z = a''x + b''y + c''z,$$

et les formules d'Euler donnent, pour les neuf cosinus, les valeurs suivantes :

$$a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \qquad a' = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \qquad a'' = \sin\varphi\sin\theta,$$
$$b = -\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \qquad b' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \qquad b'' = \cos\varphi\sin\theta,$$
$$c = \sin\psi\sin\theta, \qquad c' = -\cos\psi\sin\theta, \qquad c'' = \cos\theta.$$

En tenant compte des formules de transformation, on a immédialement

$$x_1 = x + a, \qquad x_2 = x + b, \qquad x_3 = x + c, \qquad x_4 = \frac{a + b + c}{2} + x,$$

$$y_1 = y + a', \qquad y_2 = y + b', \qquad y_3 = y + c', \qquad y_4 = \frac{a' + b' + c'}{2} + y,$$

$$z_1 = z + a'', \qquad z_2 = z + b'', \qquad z_3 = z + c'', \qquad z_4 = \frac{a'' + b'' + c''}{2} + z;$$

et, en portant ces valeurs dans les relations (I), on obtient

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} y+z+a'+a''=0, \\ x+z+b+b''=0, \\ x+y+c+c'=0, \end{cases}$$

$$x+y+z+\frac{a+b+c+a'+b'+c'+a''+b''+c''+1}{2}=0.$$

Les égalités (II) permettent de simplifier cette dernière relation ; elle devient

$$a+b'+c''+1=0.$$

Remplaçons dans cette dernière égalité a, b', c'' par leur valeur, il vient

$$\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta+\cos\theta+1=0,$$

ou

$$(\cos\theta+1)[\cos(\varphi+\psi)+1]=0;$$

ce qui donne soit $\theta=\pi$, soit $\varphi+\psi=\pi$.

La première hypothèse est inadmissible : elle correspond en effet à une position particulière du tétraèdre T ; on a donc

$$\varphi+\psi=\pi$$

Les formules d'Euler deviennent alors

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} a=-\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cos\theta, & b=a'=\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\theta), & c=a''=\sin\varphi\sin\theta, \\ b'=-\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\cos\theta, & c'=b''=\cos\varphi\sin\theta, & c''=\cos\theta. \end{cases}$$

1. Soient x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées du symétrique du point a par rapport au plan ocb, ou, ce qui revient au même, par rapport aux arêtes ob et oc ; on a

$$x'_1=x-a,\qquad y'_1=y-a'\qquad z'_1=z-a'';$$

d'où

$$x=x'_1+a,\qquad y=y'_1+a',\qquad z=z'_1+a'';$$

en remplaçant dans les formules (II) x, y, z par ces valeurs, il vient

$$y'_1+z'_1+2(a'+a'')=0,\qquad x'_1+z'_1+a+a''+b''+b=0,\qquad x'_1+y'_1+a+a'+c+c'=0.$$

On aura le lieu du point x'_1, y'_1, z'_1 en éliminant φ et θ entre ces trois équations. En retranchant les deux dernières membre à membre, et en tenant compte des relations (III) on obtient

$$z'_1-y'_1=0.$$

Le symétrique du point a par rapport à obc décrit le plan $z-y=0$,
de même le symétrique du point b par rapport à oac décrit $x-z=0$,
— — c — oab — $y-x=0$.

D'autre part, en désignant par x'_4, y'_4, z'_4 les coordonnées du symétrique du point d par rapport à oc, on a

$$x'_4=\frac{c-a-b}{2}+x,\qquad y'_4=\frac{c'-a'-b'}{2}+y,\qquad z'_4=\frac{c''-a''-b''}{2}+z;$$

d'où l'on tire

$$x=x'_4+\frac{a+b-c}{2},\qquad y=y'_4+\frac{a'+b'-c'}{2},\qquad z=z'_4+\frac{a''+b''-c''}{2};$$

en portant ces valeurs dans les relations (II), on obtient

$$y'_4+z'_4+\frac{a'+b'-c'+a''+b''-c''}{2}+a'+a''=0,\qquad x'_4+z'_4+\frac{a+b-c+a''+b''-c''}{2}+b''+b=0,$$

$$x'_4+y'_4+\frac{a'+b'-c'+a+b-c}{2}+c+c'=0,$$

ou, en simplifiant à l'aide des relations (III),

$$y'_4+z'_4+\frac{3(a'+a'')+b'-c''}{2}=0,\qquad x'_4+z'_4+\frac{a+3(b+b'')-c''}{2}=0,\qquad x'_4+y'_4+\frac{a+a'+b+b'+c+c'}{2}=0;$$

en éliminant φ et θ entre ces trois équations, on aura l'équation du lieu du point x'_4, y'_4, z'_4. Multiplions les deux membres de la première égalité par -1, les deux membres de la seconde par -1, les deux membres de la troisième par 3 et ajoutons membre à membre, il vient

$$2(x'_4+y'_4-z'_4)+\frac{3a+3a'+3b+3b'+3c-3(a'+a'')-b'+c''-a-3(b+b'')+c''}{2}=0,$$

ou, en simplifiant à l'aide des relations (III),

$$2(x'_4+y'_4-z'_4)+a+b'+c''=0;$$

mais on sait que $$a+b'+c''+1=0;$$

l'équation du lieu est donc $$x'_4+y'_4-z'_4-\frac{1}{2}=0.$$

Le symétrique du point d par rapport à oc décrit le plan $x+y-z-\frac{1}{2}=0$,

de même le symétrique du point d par rapport à ob décrit le plan $x-y+z-\frac{1}{2}=0$,

et le symétrique par rapport à oa décrit le plan $y+z-x-\frac{1}{2}=0$.

2. Les deux premières relations (II) donnent

$$x-y+b'-a''=0;$$

cette relation devient $$x-y+\sin\theta(\cos\varphi-\sin\varphi)=0;$$

la 3e relation (II) devient aussi $$x+y+\sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)=0;$$

par suite, $$x+\cos\varphi\sin\theta=0,\qquad y+\sin\varphi\sin\theta=0,$$

et l'on en déduit $$z+\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\theta)=0.$$

La surface S lieu du point o s'obtiendra en éliminant φ et θ entre ces trois équations. Les deux premières donnent

$$\frac{y}{\sin\varphi}=\frac{x}{\cos\varphi}=-\sin\theta=\sqrt{x^2+y^2};$$

d'où $$z+xy\,\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}=0.\qquad [z(x^2+y^2)+xy]^2=x^2y^2(1-x^2-y^2),$$

et, en simplifiant $$z^2(x^2+y^2)+2xyz=-x^2y^2,$$

ou, finalement, $$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2xyz=0.$$

Cette surface est, comme on le voit, du 4e ordre ; elle a un point triple à l'origine et trois droites doubles qui sont les axes de coordonnées.

3. Considérons un point α situé sur OX, $x=\alpha$, $y=0$, $z=0$; une droite passant par ce point et parallèle au plan des yz a pour équations

$$\frac{x-\alpha}{0}=\frac{y}{m}=\frac{z}{1}=\rho;\ (*)$$

l'équation aux ρ d'intersection de cette droite avec la surface S est

$$m^2\rho^4+\rho^2\alpha^2+m^2\alpha^2\rho^2+2m\alpha\rho^3=0;$$

(*) L'auteur de la solution suppose immédiatement la droite parallèle au plan des yz : il est facile, en prenant une droite de direction quelconque, de vérifier l'exactitude de cette hypothèse.

cette équation admet 2 fois la racine 0; pour qu'elle l'admette 4 fois, c'est-à-dire pour que la droite coupe la surface en 4 points confondus, il faut que

$$m^2\alpha^2 + 2m\alpha + \alpha^2 = 0,$$

ou, comme $\alpha \neq 0$,

$$\alpha m^2 + 2m + \alpha = 0.$$

Il existe donc deux droites δ et δ' passant par un point d'une droite double et coupant la surface en 4 points confondus. Ces droites sont les tangentes au point α à la section de la surface par un plan perpendiculaire à la droite double considérée. Pour que les deux droites δ et δ' soient confondues, il faut que l'on ait

$$\alpha = \pm 1.$$

4. Tout plan tangent à la surface S coupe cette surface suivant une quartique qui a un point double au point de contact et 3 autres points doubles aux points de rencontre de ce plan avec les axes. Cette quartique se décompose donc en deux coniques.

Par suite, pour qu'un plan,

$$ux + vy + wz = 1,$$

soit tangent à la surface, il faut et il suffit que le cône qui a pour sommet l'origine et pour base la section faite par ce plan se décompose en deux cônes du second degré. Il faut donc que l'on ait

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + 2xyz(ux + vy + wz) \equiv (yz + mzx + nxy)\left(yz + \frac{zx}{m} + \frac{xy}{n}\right);$$

ce qui donne

$$2u = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}, \qquad 2v = n + \frac{1}{n}, \qquad 2w = m + \frac{1}{m},$$

équations qui définissent les coordonnées d'un plan tangent en fonction des paramètres m et n.

Pour que les deux coniques coïncident, il faut et il suffit que les deux cônes

$$yz + mzx + nxy = 0, \qquad yz + \frac{zx}{m} + \frac{xy}{n} = 0$$

coïncident, c'est-à-dire qu'on ait

$$m = \frac{1}{m}, \qquad m = \pm 1, \qquad n = \frac{1}{n}, \qquad n = \pm 1,$$

ce qui donne 4 systèmes de valeurs pour u, v, w

$$\begin{array}{llll} u = 1, & u = -1, & u = -1, & u = 1; \\ v = 1, & v = 1, & v = -1, & v = -1; \\ w = 1, & w = -1, & w = 1, & w = -1. \end{array}$$

A ces systèmes correspondent les plans

$$x + y + z = 1, \qquad -x + y - z = 1, \qquad -x - y + z = 1, \qquad x - y - z = 1$$

qui coupent la surface S suivant des cercles.

A. PRÉVOST, lycée Hoche.

Remarque. — En cherchant l'enveloppe du plan tangent,

$$(m^2 + n^2)x + (n^2 + 1)y + (m^2 + 1)z - 2mn = 0,$$

on trouve que les coordonnées d'un point de la surface se mettent sous la forme

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m}\right), \qquad z = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m} - \frac{m}{n}\right).$$

On voit alors de suite que le lieu est une surface de Steiner. (Voir la note de M. Richard, *Revue*, n° 5, Février 1898.)

662. — *Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable réelle x continue pour toute valeur de cette variable.*

On suppose que la valeur absolue de la dérivée $\varphi'(x)$ est, pour toute valeur de x, moindre qu'un nombre k inférieur à l'unité.

1° *Montrer que l'équation*

$$x - \varphi(x) = 0$$

a une et une seule racine réelle a.

2° *On forme la suite*

$$x_1 = \varphi(x_0), \qquad x_2 = \varphi(x_1), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi(x_{n-1}),$$

où x_0 est une quantité réelle arbitrairement choisie.

Montrer que x_n tend vers la racine a quand n devient infini.

1. D'après l'hypothèse faite, la dérivée de la fonction $x - \varphi(x)$ est toujours positive; par conséquent, cette fonction est toujours croissante ; il n'y a plus qu'à montrer qu'elle change de signe pour qu'on puisse affirmer la première partie. Or on a, en particulier,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\theta x),$$

et, par suite,

$$x - \varphi(x) = x[1 - \varphi'(\theta x)] - \varphi(0);$$

cette fonction est donc mise sous la forme $Ax + C^{te}$, A étant une fonction positive supérieure à $1 - k$; donc elle est négative pour les valeurs négatives de x, assez grandes en valeur absolue et positive pour les grandes valeurs positives de x.

2. Désignons par a la racine, et posons

$$x_0 = a + h_0, \quad x_1 = a + h_1, \quad \ldots\ldots, \quad x_n = a + h_n;$$

nous aurons $$x_n = \varphi(x_{n-1}) = \varphi(a + h_{n-1})$$

et $$\varphi(a + h_{n-1}) = \varphi(a) + h_{n-1}\varphi'(a + \theta_{n-1}h_{n-1});$$

or nous avons aussi $$a = \varphi(a);$$

par conséquent, $$x_n - a \qquad \text{ou} \qquad h_n = h_{n-1}\varphi'(a + \theta_{n-1}h_{n-1}).$$

Il en résulte que $$|h_n| < k\,|h_{n-1}|;$$

nous avons, de même,

$$|h_{n-1}| < k\,|h_{n-2}|, \qquad \ldots\ldots, \qquad |h_1| < k\,|h_0|;$$

par conséquent, $$|h_n| < |h_0|\,k^n.$$

Comme k est un nombre fixe inférieur à 1, il est visible que h_n tend vers 0, et que, par suite, x_n tend vers a.

P. S.

Bonne solution : M. G. Rouzier, à Rochechouart. Assez bonne solution : M. Bunel, lycée de Rennes.

ECOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1897)

Géométrie analytique.

666. — *On donne dans un système d'axes rectangulaires $Oxyz$: la droite AB qui a pour équations $x = a$, $y = z$; le point C, qui a pour coordonnées $x = 0$, $y = 0$, $z = a$. On considère l'hyper-*

boloïde (H) *engendré par la rotation de* AB *autour de* Oz, *puis la sphère* (S) *qui a pour centre* C *et qui est tangente à* AB.

I. — *Trouver les équations des surfaces* (H) *et* (S).

II. — *Déterminer leur courbe commune, et calculer le rapport de la plus grande à la plus petite des surfaces que cette courbe découpe sur la sphère.* (*Il suffira de donner le résultat avec deux décimales.*)

III. — *Autour d'un point* P *de* Oz *dont la cote est* $z=h$, *pivote une sécante qui perce l'hyperboloïde* (H) *en un point* H, *et la sphère* (S) *en un point* S. *On demande :*

D'étudier le lieu de l'intersection M *des diamètres* OH *et* CS ; *de discuter les coefficients angulaires de ses directions asymptotiques, quand le point* P *décrit l'axe* Oz.

I. — Nous aurons l'équation de l'hyperboloïde (H) en cherchant le lieu des parallèles de cette surface. Soient $x^2+y^2=\lambda$ et $z=\mu$ les équations de l'un de ces parallèles ; en exprimant qu'il rencontre la droite donnée, $x=a$, $y=z$, nous obtenons la relation $a^2+\mu^2=\lambda$, et il suffit de remplacer dans celle-ci λ par x^2+y^2 et μ par z pour obtenir l'équation de l'hyperboloïde,

$$\text{(H)} \qquad x^2+y^2-z^2-a^2=0.$$

La sphère a pour équation

$$x^2+y^2+(z-a)^2=r,$$

r étant une certaine constante ; nous déterminerons la valeur de r en exprimant que l'équation aux z des points de rencontre de la sphère et de la droite AB a une racine double ; nous trouvons ainsi $r=\frac{3a^2}{2}$ et l'équation de la sphère est

$$\text{(S)} \qquad x^2+y^2+(z-a)^2-\frac{3a^2}{2}=0.$$

II. — En retranchant l'équation (H) de l'équation (S), nous obtenons $\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=0$; ce résultat montre que les deux quadriques (H) et (S) se raccordent tout le long du cercle horizontal déterminé dans la sphère par le plan $z-\frac{a}{2}=0$.

Ce cercle divise la sphère en deux zones ayant pour hauteurs respectives $a\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{a}{2}$ et $a\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{a}{2}$. Le rapport de la plus grande aire à la plus petite est donc $\dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}}$, ou $\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}$, ou enfin $\frac{7+2\sqrt{6}}{5}$. Pour calculer ce nombre avec deux décimales exactes, nous le mettrons sous la forme $\frac{7+\sqrt{24}}{5}$; nous extrairons la racine carrée de 24, à $\frac{1}{100}$ près, et nous diviserons par 5 le numérateur ainsi évalué, jusqu'à ce que nous ayons obtenu les deux premières décimales. Les opérations sont indiquées ci-contre.

24,00 00	4,89
8 00	88 969
96 00	8 9
8 79	

$$\frac{7+\sqrt{24}}{5}=\frac{11,89}{5}=2,37.$$

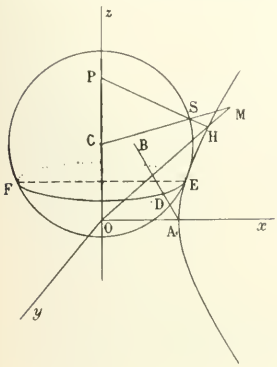
III. — Si nous appelons x, y, z les cordonnées d'un point M du lieu, les équations de OH seront $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}$, celles de CS seront $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z-a}{z-a}$; en désignant par ρ la valeur commune aux premiers rapports, par ρ' la valeur commune aux seconds, les coordonnées des points H et S auront pour expressions ρx, ρy, ρz, et $\rho' x$, $\rho' y$, $a+\rho'(z-a)$, les deux nombres ρ et ρ'

vérifiant les relations

$$\rho^2(x^2+y^2-z^2)=a^2,$$

$$\rho'^2[x^2+y^2+(z-a)^2]=\frac{3a^2}{2},$$

qui expriment que les points H et S sont sur l'hyperboloïde et sur la sphère. Reste à écrire maintenant que les points H, S et P sont en ligne droite ; ceci donne la relation



$$\frac{a-h}{\rho'}+\frac{h}{\rho}-a=0.$$

En portant dans cette équation les valeurs de $\frac{a}{\rho}$ et $\frac{a}{\rho'}$, tirées des deux équations écrites antérieurement, nous obtenons de suite l'équation du lieu sous forme irrationnelle,

$$\sqrt{\frac{2}{3}}(a-h)\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}+h\sqrt{x^2+y^2-z^2}-a^2=0.$$

Par deux élévations au carré successives nous rendons cette équation rationnelle et nous voyons finalement que le lieu est une surface du quatrième degré représentée par l'équation

$$(1)\quad \left[2(a-h)^2[x^2+y^2+(z-a)^2]+3h^2(x^2+y^2-z^2)-3a^4\right]^2$$
$$=24h^2(a-h)^2(x^2+y^2-z^2)[x^2+y^2+(z-a)^2].$$

Sous cette forme, nous voyons de suite que lorsque le point P est en C, c'est-à-dire lorsque $h=a$, la surface se réduit à l'hyperboloïde (H) compté deux fois ; que si le point P est en O, elle se réduit à la sphère (S) comptée deux fois, et qu'enfin, dans tous les cas, elle contient le cercle commun à la sphère et à l'hyperboloïde. Tous ces résultats sont d'ailleurs évidents *a priori*.

Toutes les directions asymptotiques de la surface sont doubles ; elles forment le cône du second degré

$$2(a-h)^2(x^2+y^2+z^2)-3h^2(x^2+y^2-z^2)=0.$$

Ce cône est de révolution autour de Oz et admet pour génératrice dans le plan des zx la droite

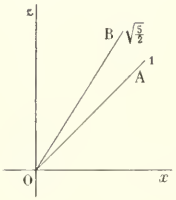
$$\frac{z}{x}=\sqrt{\frac{3h^2+2(a-h)^2}{3h^2-2(a-h)^2}};$$

il s'agit d'étudier le coefficient angulaire de cette droite, c'est-à-dire la valeur de $\frac{z}{x}$, quand h varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Nous voyons d'abord que, pour que ce coefficient angulaire existe, il faut que le dénominateur du second membre soit positif, par suite, que h ne soit pas compris entre les racines du trinome $3h^2-2(h-a)^2$; h doit donc être plus petit que $-\frac{a}{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}$ ou plus grand que $\frac{a}{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}$. Pour toute autre valeur de h, le cône des directions asymptotiques est imaginaire.

Nous avons maintenant à étudier les variations de la quantité sous le radical, dans les deux intervalles fixés ; pour cela, posons $\frac{a-h}{h}=u$; la quantité à étudier devient $\frac{3+2u^2}{3-2u^2}$ ou $\frac{6}{3-2u^2}-1$ et nous voyons qu'elle croît quand u augmente en valeur absolue. Or, $u=\frac{a}{h}-1$ décroît quand h augmente ; donc, quand h parcourt le premier intervalle, de $-\infty$ à $\frac{-a}{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}$, u décroît de -1

à $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, u^2 croît de 1 à $\frac{3}{2}$ et la quantité sous le radical croît de $\frac{5}{2}$ à $+\infty$. Nous voyons de même que lorsque h croît de $\frac{a}{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}$ à $+\infty$, u décroît de $\sqrt{\frac{3}{2}}$ à -1; par conséquent, u^2



décroît d'abord de $\frac{3}{2}$ à 0, valeur qu'il atteint pour $h = a$, puis croît de 0 à 1; le nombre $\frac{3+2u^2}{3-2u^2}$ décroît de $+\infty$ à 1, puis croît de 1 à $\frac{5}{2}$.

Il est donc facile de se rendre compte des variations de la génératrice du cône située dans le plan des zx : si nous figurons, dans l'angle xoz, les deux demi-droites OA et OB ayant pour coefficients angulaires 1 et $\sqrt{\frac{5}{2}}$, la demi-génératrice du cône tourne d'abord de OB à OZ, puis de OZ à OA, puis enfin de OA à OB.

Solution incomplète : M. G. Rousier, à Rochechouart.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1897)

Mathématiques.

668. — *On considère deux hyperboloïdes à une nappe* H *et* H′ *se coupant suivant deux coniques* S *et* Σ *dont aucune ne se décompose; ces deux coniques ont, comme on sait, deux points communs* A *et* B *que l'on suppose distincts. Soit* μ *un point quelconque de* Σ; *par ce point passent quatre génératrices rectilignes (deux sur* H *et deux sur* H′) *qui rencontrent* S *aux quatre points* M, N, M′, N′.

I. — *Trouver l'enveloppe des six droites qui joignent deux à deux ces* quatre *points; on trouvera* quatre *coniques que l'on désignera par* c, c', C_1, C_2, *les coniques* c *et* c' *d'une part,* C_1, C_2 *d'autre part jouant un rôle analogue. On indiquera dans quels cas l'une de ces coniques se réduit à un point.*

II. — *Dans cette seconde partie, on ne regarde plus* H *et* H′ *comme donnés; on se propose au contraire de remonter à la figure primitive en partant des éléments auxquels on a abouti et que l'on a étudiés dans la première partie :*

1° *On donne la conique* S; *peut-on choisir arbitrairement l'une des quatre coniques* c, c', C_1, C_2? *Les trois autres sont-elles alors déterminées ?*

2° *On donne* S *et* c *ou* C_1; *à quelles conditions est assujettie* Σ? *Si l'on donne en outre* Σ, *à quelles conditions sont assujettis* H *et* H′? *Il y a lieu ici de distinguer deux cas, suivant que l'on donne* c *ou* C_1. *Dans l'un de ces deux cas, les deux hyperboloïdes sont variables, mais chacun d'eux est déterminé quand on fixe l'autre : trouver alors l'enveloppe* E *de la droite* D *qui joint les pôles d'un plan fixe* Π *par rapport aux deux hyperboloïdes (on remarquera d'abord que la droite* D *reste dans un plan).*

3° *Écrire l'équation du lieu engendré par* E *lorsque le plan* Π *tourne autour d'une droite fixe.*

N. B. — *Les candidats qui, pour traiter la première partie, seraient embarrassés dans le choix des axes, peuvent, s'ils le veulent, prendre pour axe des* x *la droite* AB; *pour axe des* y *la tangente en* A *à la conique* S; *pour axe des* z *la tangente en* A *à la conique* Σ; mais ce choix d'axes n'est nullement obligatoire.

Prenons pour tétraèdre de référence celui qui a pour sommets les points A et B et les pôles C et D de AB par rapport à S et à Σ, et désignons par $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, les faces du

tétraèdre opposées aux sommets D, C, B et A. Les hyperboloïdes H et H′ sont tangents aux plans des z et des t en A et B. Leurs équations sont donc, pour certaines valeurs de α, β, α', β', h et h',

$$(1)\qquad \begin{aligned}(y+\alpha x)(y+\beta x)-hzt&=0,\\(y+\alpha' x)(y+\beta' x)-h'zt&=0.\end{aligned}$$

D'ailleurs, ils sont coupés par le plan des x suivant la même conique S, ce qui donne la relation $h=h'$, et par le plan des y suivant la même conique Σ, ce qui donne la relation

$$(2)\qquad \alpha\beta=\alpha'\beta'=a.$$

Nous prendrons pour H et H′ les équations (1) et

$$(3)\qquad (y+\alpha' x)(y+\beta' x)-hzt=0,$$

auxquelles nous adjoindrons la relation (2).

Pour la commodité des discussions ultérieures, nous adopterons aussi pour H et H′ les équations développées

$$(4)\qquad ax^2+\lambda xy+y^2-hzt=0,$$

$$(5)\qquad ax^2+\lambda' xy+y^2-hzt=0,$$

où nous avons posé

$$(6)\qquad \alpha+\beta=\lambda,\qquad \alpha'+\beta'=\lambda'.$$

I. — Les deux systèmes de génératrices de l'hyperboloïde H peuvent être représentés, en vertu de l'équation (1), par les deux systèmes d'équations

$$\left\{\begin{aligned}y+\alpha x&=hzu,\\y+\beta x&=\frac{t}{u},\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned}y+\alpha x&=\frac{t}{v},\\y+\beta x&=hzv,\end{aligned}\right.$$

où u et v représentent deux paramètres variables. Les génératrices de l'hyperboloïde H′ sont représentées par des équations analogues, en fonction de deux nouveaux paramètres u' et v' :

$$\left\{\begin{aligned}y+\alpha' x&=hzu',\\y+\beta' x&=\frac{t}{u'},\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned}y+\alpha' x&=\frac{t}{v'},\\y+\beta' x&=hzv'.\end{aligned}\right.$$

En exprimant que les deux premières droites rencontrent la conique Σ, c'est-à-dire le plan des y au même point, μ, on trouve la relation $\dfrac{u}{v}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

En exprimant de même que les deux dernières droites rencontrent Σ au même point μ', on trouve

$$\frac{u'}{v'}=\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

On exprimera enfin que μ et μ' sont confondus en écrivant que la première et la troisième droite coupent Σ au même point, ce qui donne $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{u}{u'}$.

On a donc, en définitive,

$$(7)\qquad \frac{\alpha}{u}=\frac{\alpha'}{u'}=\frac{\beta}{v}=\frac{\beta'}{v'}.$$

Les quatre droites précédentes coupent le plan de S en quatre points M, N, M′, N′ dont les coordonnées sont faciles à calculer. On formera par suite aisément les équations des six droites dont il est question dans l'énoncé. Celle de MM′, par exemple, est

$$\left(\frac{u'}{u}-\frac{u}{u'}\right)y+h(u-u')z+\left(\frac{1}{u'}-\frac{1}{u}\right)t=0.$$

A l'aide des relations (7) on fera disparaître immédiatement de ces équations tous les paramètres sauf un, u, par exemple. En particulier, l'équation de MM′ deviendra

$$h\alpha' z u^2 - (\alpha + \alpha')yu + \alpha t = 0.$$

La recherche des six enveloppes est alors immédiate. On trouve que :

MN enveloppe la conique c, $(\alpha + \beta)^2 y^2 - 4ahzt = 0$;
M′N′ enveloppe la conique c', $(\alpha' + \beta')^2 y^2 - 4ahzt = 0$;
MM′ et NN′ enveloppent la conique C_1, $(\alpha + \alpha')^2 y^2 - 4\alpha\alpha' hzt = 0$; (*)
MN′ et M′N enveloppent la conique C_2, $(\beta + \alpha')^2 y^2 - 4\beta\alpha' hzt = 0$.

Ces quatre coniques sont bitangentes à S en A et B.

En vertu des notations adoptées, les équations des deux premières prennent les formes simples

c $\qquad \lambda^2 y^2 - 4ahzt = 0,$

c' $\qquad \lambda'^2 y^2 - 4ahzt = 0.$

Pour la commodité des discussions qui suivront, nous écrirons les équations des deux dernières sous les formes suivantes :

C_1 $\qquad \rho_1^2 y^2 - 4ahzt = 0,$

C_2 $\qquad \rho_2^2 y^2 - 4ahzt = 0,$

en posant $\qquad \rho_1^2 = a\dfrac{(\alpha + \alpha')^2}{\alpha\alpha'}, \qquad \rho_2^2 = a\dfrac{(\beta + \alpha')^2}{\beta\alpha'}.$

On vérifiera aisément, en tenant compte des relations (2) et (6), que l'on a

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 4a + \lambda\lambda', \qquad \rho_1^2\rho_2^2 = a(\lambda + \lambda')^2;$$

ρ_1^2 et ρ_2^2 sont donc racines de l'équation du second degré en ρ^2

(8) $$\rho^4 - (4a + \lambda\lambda')\rho^2 + a(\lambda + \lambda')^2 = 0.$$

L'une des quatre coniques précédentes ne pourra se décomposer que dans le couple des tangentes en A et B à S. Son équation se réduira alors à $zt = 0$. Les quatre cas de décomposition sont donc

$$\lambda = 0, \qquad \lambda' = 0, \qquad \rho_1 = 0, \qquad \rho_2 = 0.$$

Dans le premier cas, l'hyperboloïde H devient

$$ax^2 + y^2 - hzt = 0.$$

Les génératrices des points A et B sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes à S et à Σ. Les plans de S et de Σ sont conjugués par rapport à H.

Si $\lambda' = 0$, les plans de S et de Σ sont conjugués par rapport à H′.

Si ρ_1 ou ρ_2 égale 0, l'équation (8) montre que $\lambda + \lambda' = 0$. L'interprétation géométrique de ce résultat, assez compliquée, ne sera donnée que plus loin.

II. — 1° Si l'on connaît seulement S et les points A et B, le tétraèdre de référence n'est pas déterminé, mais le triangle ABC est fixé, et cela suffit actuellement, car nous n'avons à nous occuper que des équations des coniques S, c, c', C_1, C_2 par rapport à ce triangle.

Cela posé, se donner arbitrairement S revient à se donner le nombre h; se donner arbitrairement c, c', C_1, C_2 revient à se donner les nombres $\dfrac{\lambda^2}{ah}$, $\dfrac{\lambda'^2}{ah}$, $\dfrac{\rho_1^2}{ah}$, $\dfrac{\rho_2^2}{ah}$. Ces quatre nombres sont d'ailleurs reliés par la relation (8) que nous écrirons sous la forme

$$\left(\frac{\rho^2}{a}\right)^2 - \left(4 + \frac{\lambda}{\sqrt{a}}\frac{\lambda'}{\sqrt{a}}\right)\frac{\rho^2}{a} + \left(\frac{\lambda}{\sqrt{a}} + \frac{\lambda'}{\sqrt{a}}\right)^2 = 0.$$

(*) Car de l'équation $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, il résulte que $\dfrac{\alpha\alpha'}{(\alpha + \alpha')^2} = \dfrac{\beta\beta'}{(\beta + \beta')^2}$. De même, $\dfrac{\beta\alpha'}{(\beta + \alpha')^2} = \dfrac{\alpha\beta'}{(\alpha + \beta')^2}$.

H est donc évident qu'une fois S connu, on peut se donner arbitrairement deux quelconques des quatre coniques restantes ; les deux autres sont alors déterminées. D'ailleurs, comme le sommet D du tétraèdre de référence reste arbitraire, dans aucun des six cas possibles les hyperboloïdes H et H′ ne sont déterminés ; on peut même se donner le point D d'une façon quelconque : le paramètre $\frac{1}{a}$ reste toujours arbitraire dans les équations de H et de H′.

2° Supposons S connu. Se donner Σ revient à se donner d'abord son plan, puis le point D dans son plan, enfin son équation par rapport au triangle DAB $\left(\text{ou, ce qui revient au même, le rapport } \frac{h}{a}\right)$. Le tétraèdre de référence est alors fixé, et comme on connaît S et par suite h, on s'est donné, par l'équation de Σ, le rapport $\frac{1}{a}$. Il résulte alors de l'alinéa précédent que, S et c ou C_1 étant donnés, Σ n'est assujettie à aucune autre condition que celle de passer par leurs points communs A et B : car on a vu ci-dessus que : 1° le point D et, par suite, le plan DAB de Σ restait arbitraire ; 2° le point D une fois choisi, le paramètre $\frac{1}{a}$ et, par suite, l'équation de Σ par rapport au triangle ABD restait indéterminé.

Si l'on connaît S, Σ et c ou C_1 le tétraèdre de référence est déterminé.

Si l'on se donne S, Σ et c, on connaît h, a et $\frac{\lambda^2}{a}$; ou bien, h, a et $\pm\lambda$: en d'autres termes, il n'y a à choisir qu'entre deux hyperboloïdes H. Au contraire, λ' est arbitraire, de sorte que H′ est l'un quelconque des hyperboloïdes du faisceau déterminé par S et Σ.

Si, au contraire, on se donne S, Σ et C_1, on connaît h et a ; de plus, il existe entre λ et λ' la relation (8) où l'on regarde ρ comme un nombre donné. Aucun des hyperboloïdes H et H′ n'est donc déterminé, mais chacun d'eux est déterminé quand on fixe l'autre : la correspondance ainsi établie entre eux est du 2° degré par rapport à chacun d'eux, c'est-à-dire qu'à un hyperboloïde H correspondent deux hyperboloïdes H′, et réciproquement.

Plaçons-nous dans le dernier cas étudié et cherchons l'enveloppe E de la droite D qui joint les pôles d'un plan fixe H, d'équation

$$ux + vy + wz + pt = 0,$$

par rapport aux deux hyperboloïdes. Soient α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' les coordonnées des deux pôles. Le premier est donné par les équations

$$\frac{2a\alpha + \lambda\beta}{u} = \frac{\lambda\alpha + 2\beta}{v} = -\frac{h\delta}{w} = -\frac{h\gamma}{p}.$$

On voit ainsi qu'il reste dans le plan

$$wz - pt = 0.$$

Comme il en est de même du second, l'enveloppe tout entière est dans ce plan. D'ailleurs, les coordonnées du premier pôle sont

$$\frac{\lambda v - 2u}{\lambda^2 - 4a}, \qquad \frac{\lambda u - 2av}{\lambda^2 - 4a}, \qquad -\frac{p}{h}, \qquad -\frac{w}{h}$$

et celles du second se déduisent de là en changeant λ en λ'.

Soit

$$\text{(9)} \qquad Ax + By + Cz = 0$$

le plan projetant la droite D du point A. En exprimant que ce plan contient le point α, β, γ, δ on trouve la relation

$$\frac{Cp}{h}\lambda^2 - (Av + Bu)\lambda - 4a\frac{Cp}{h} + 2Au + 2Bav = 0.$$

En exprimant de même qu'il contient le point α', β', γ', δ', on trouve une relation qui se déduit de la précédente par le changement de λ en λ'. Si dans cette relation et dans la précédente on regarde tout comme connu sauf λ ou λ', chacune d'elles déterminera les deux mêmes valeurs ; on peut donc supprimer la seconde et regarder la première comme une équation du 2e degré en λ ayant pour racines λ et λ'. On a donc

$$\lambda + \lambda' = \frac{Av + Bu}{\frac{Cp}{h}}, \qquad \lambda\lambda' = 4a - \frac{2Au + 2Bav}{\frac{Cp}{h}}.$$

Portant ces valeurs dans la relation (8), celle-ci devient

$$\left(\frac{Cp}{h}\right)^2 \rho^4 - 2(Au + Bav)\frac{Cp}{h}\rho^2 + a(Av + Bu)^2 = 0.$$

On éliminera facilement le rapport $\frac{A}{C}$ de cette équation homogène en A, B, C en se servant de la relation (9), qui donne

$$\frac{A}{C} = \frac{-\frac{B}{C}y - z}{x}.$$

On obtiendra ainsi une équation homogène et du 2e degré en B et C que nous nous dispensons d'écrire. En annulant le discriminant de cette équation, on aura l'enveloppe du plan projetant la droite D du point A, c'est-à-dire le cône projetant la courbe E du point A. On trouve que ce cône a pour équation

$$p\rho^2(ax^2 - y^2) + 2ahz(ux - vy) = 0. \tag{10}$$

La courbe E est donc une conique représentée par les équations (10) et

$$wz - pt = 0. \tag{11}$$

3° Supposons maintenant que le plan Π, jusqu'ici fixe, tourne autour d'une droite fixe. Il suffira, pour exprimer cette hypothèse, de poser

$$u = u' + ku'', \qquad v = v' + kv'', \qquad \ldots.$$

Les équations (10) et (11) deviennent alors

$$p\rho^2(ax^2 - y^2) + 2ahz(u'x - v'y) + 2ahz(u''x - v''y)k = 0,$$
$$w'z - p't + (w''z - p''t)k = 0.$$

On aura le lieu engendré par E, en éliminant k entre ces deux équations, ce qui donne l'équation

$$(p\rho^2(ax^2 - y^2) + 2ahz(u'x - v'y))(w''z - p''t) - 2ahz(u''x - v''y)(w'z - p't) = 0.$$

Cette équation représente une surface cubique ; un certain nombre des droites situées sur cette surface sont en évidence sur l'équation : ce sont les droites

$$\begin{array}{llll} z = 0, & t = 0 & \text{ou} & \text{CD}, \\ x = 0, & y = 0 & \text{ou} & \text{AB}, \\ z = 0, & ax^2 - y^2 = 0. & & \end{array}$$

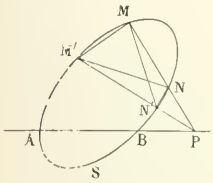
Solution géométrique. — Nous admettrons comme démontré le théorème suivant : Quand deux quadriques se coupent suivant deux courbes planes, la développable circonscrite aux deux surfaces se compose de deux cônes du second degré ; les courbes de contact de l'un de ces cônes avec les deux quadriques passent par les points communs aux courbes planes communes, et leurs plans divisent harmoniquement les plans de ces dernières.

I. — Les plans $M\mu N$, $M'\mu N'$ sont évidemment les plans tangents à Π et à Π' en μ. Ils enveloppent les deux cônes circonscrits aux deux quadriques le long de Σ. Leurs traces sur le plan de S sont donc deux coniques c et c' évidemment bitangentes à S en A et B.

Les plans MμN', ... enveloppent évidemment la développable circonscrite aux deux hyperboloïdes. Il résulte alors du théorème précédent que le reste de l'enveloppe visée dans l'énoncé, qui n'est autre que la trace de cette développable sur le plan de S, se compose encore de deux coniques C_1 et C_2 bitangentes à S en A et B.

Pour que l'une des coniques c, c' se réduise à un point il faut que le sommet de l'un des cônes circonscrits à H et à H' le long de Σ se trouve dans le plan de S ; il faut donc que le plan de Σ soit conjugué par rapport à H ou à H' du plan de S. De même, pour que l'une des coniques C_1, C_2 se réduise à un point, il faut que le plan de l'une des courbes de contact de la développable circonscrite soit conjugué du plan de S par rapport à la quadrique correspondante.

II. — 1° Les plans tangents à H et H' en μ se coupent suivant la tangente en μ à Σ. Cette tangente rencontre AB en un point P qui est évidemment le point de rencontre de MN et de M'N'. Figurons alors dans le plan de S les six droites dont il est question dans l'énoncé. Il est évident, à une simple inspection de la figure, que si deux des coniques enveloppes sont données, on pourra, pour chaque position de P, construire les droites dont l'enveloppe n'est pas donnée, et que, par suite, les autres coniques enveloppes seront déterminées. On peut donc se donner arbitrairement deux et deux seulement des quatre coniques c, c', C_1, C_2.



2° Si l'on donne S et c ou C_1, Σ n'est assujettie qu'à passer par les points communs à ces coniques. Nous le prouverons en nous donnant arbitrairement S, c ou C_1 et Σ et en montrant que dans les deux cas on peut construire des hyperboloïdes H et H'.

Donnons-nous S, Σ et c. Il y a deux cônes passant par Σ et c ; soient t et τ leurs sommets : il y a un hyperboloïde passant par S et Σ et tel que t soit le pôle du plan de Σ ; il y en a un autre dans le même faisceau tel que τ soit le pôle du plan de Σ. Il y a donc deux hyperboloïdes H et deux seulement. Quand à H', c'est l'un quelconque des hyperboloïdes du faisceau déterminé par S et Σ.

Donnons-nous S, Σ et C_1. Ni H ni H' ne sont déterminés ; en effet, donnons-nous pour H l'un quelconque des hyperboloïdes du faisceau (S, Σ). Nous allons voir que H' existe et est déterminé. En effet, il existe deux cônes passant par C_1 et circonscrits à H ; soient S et σ leurs sommets, L et Λ les plans de leurs courbes de contact avec H, L_1 et Λ_1 les plans conjugués harmoniques de L et Λ par rapport aux plans du couple S, Σ. Il existe évidemment un hyperboloïde dans le faisceau (S, Σ) qui est inscrit dans le cône S le long de sa section par le plan L_1, et un autre hyperboloïde inscrit dans le cône σ le long de sa section par le plan Λ_1 : ce sont, d'après le théorème du début, les hyperboloïdes H'. Ainsi, à un hyperboloïde H correspondent deux hyperboloïdes H' ; la réciproque est évidemment vraie.

Soit dans ces conditions H un plan fixe, G et G' ses pôles par rapport à H et H', F son point de rencontre avec AB : la droite GG' est évidemment située tout entière dans le plan polaire commun du point F par rapport aux deux hyperboloïdes ; ce plan Q est fixe, car il est déterminé par les polaires de F par rapport à S et Σ ; il passe d'ailleurs par la droite CD conjuguée de AB par rapport à tous les hyperboloïdes du faisceau.

Soit I un point du plan qui soit pôle du plan H par rapport à un certain hyperboloïde H. Cherchons combien on peut mener par ce point de tangentes à l'enveloppe E de la droite GG' ou D. Nous avons vu qu'à l'hyperboloïde H correspondent deux hyperboloïdes H'. Soient I' et I_1' les pôles de H par rapport à ces deux hyperboloïdes. Les droites II' et II_1' sont évidemment les droites D qui passent en I. L'enveloppe E est donc de deuxième classe : c'est une conique.

3° Quand H tourne autour d'une droite fixe, Q tourne autour de CD et les points d'intersection de E avec CD décrivent cette droite, qui fait ainsi partie du lieu de E. Il en résulte que le lieu de E est une surface du troisième degré, puisque sa section par un plan quelconque passant par CD se compose d'une conique et de la droite CD elle-même.

E. BLOCH.

Bonne solution : M. Sayous, Louis, soldat au 33e d'artillerie. Les autres solutions reçues sont insuffisantes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

653. — *Trouver l'enveloppe des asymptotes et l'enveloppe des axes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.*

Prenons pour axe des x le côté AB du triangle et pour axe des y la hauteur relative au troisième

sommet C. Représentons par a, b, les abscisses des points A, B et par c l'ordonnée de C.

Dans ces conditions, l'équation générale des hyperboles équilatères (H) circonscrites au triangle est

$$(x-a)(x-b)-y^2+\lambda xy+\frac{c^2-ab}{c}y=0,$$

λ désignant un paramètre variable.

Pour qu'une droite

$$(1)\qquad ux+vy+w=0$$

soit asymptote d'une des hyperboles (H), il faut et suffit qu'elle la rencontre en deux points à l'infini.

Or, l'équation aux abscisses des points d'intersection de la droite (1) et de l'hyperbole (H) correspondant à la valeur λ du paramètre est

$$v^2(x-a)(x-b)-(ux+w)^2-\lambda vx(ux+w)-\frac{c^2-ab}{c}v(ux+w)=0,$$

On doit donc avoir

$$v^2-u^2-\lambda uv=0,\qquad v^2(a+b)+2uw+\lambda vw+\frac{c^2-ab}{c}uv=0,$$

c'est-à-dire, quel que soit λ,

$$w(u^2+v^2)+uv\left[v(a+b)+u\frac{c^2-ab}{c}\right].$$

Cette équation tangentielle définit l'enveloppe cherchée. C'est une courbe de troisième classe, bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques, c'est-à-dire une hypocycloïde à trois rebroussements.

Pour que la droite (1) soit un axe d'une des hyperboles (H) correspondant à la valeur λ du paramètre, il faut et suffit qu'elle se confonde avec le diamètre de la direction perpendiculaire à la sienne, dont l'équation est

$$u[2x+\lambda y-(a+b)]+v\left[\lambda x-2y+\frac{c^2-ab}{c}\right]=0.$$

On doit donc avoir

$$\frac{2u+\lambda v}{u}=\frac{\lambda u-2v}{v}=\frac{v\dfrac{c^2-ab}{c}-u(a+b)}{w}.$$

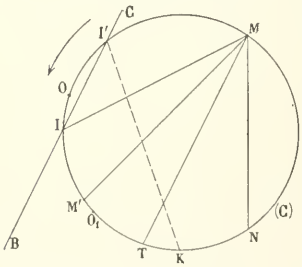
La valeur commune de ces rapports est encore égale à $\dfrac{2(u^2+v^2)}{u^2-v^2}$.

L'enveloppe des axes des hyperboles (H) est donc définie par l'équation tangentielle

$$2w(u^2+v^2)+(u^2-v^2)\left[u(a+b)-v\frac{c^2-ab}{c}\right].$$

C'est encore une hypocycloïde à trois rebroussements.

Solution géométrique. — Le lieu des centres des hyperboles équilatères (H) est le cercle (C) des neuf points du triangle ABC, qui passe par le milieu I de BC. Par chaque point M de (C) passent deux droites rectangulaires qui sont les asymptotes de l'hyperbole (H) de centre M et qu'il est facile de déterminer. En effet, MI est le diamètre conjugué de la direction BC. Si donc par M nous menons une parallèle MT à BC, les asymptotes cherchées sont les bissectrices de l'angle IMT. Soit MM′ l'une de ces bissectrices, I′ étant le second point de rencontre de (C) avec BC; prenons sur l'arc II′ un point O tel que $2\widehat{OI}=-\widehat{OI'}$. En vertu de l'égalité $2\widehat{IM'}=-\widehat{I'M}$, il résulte que l'on aura constamment $2\widehat{OM'}=-\widehat{OM}$. La droite MM′ enveloppe donc une hypocycloïde à trois rebroussements.



Les axes de l'hyperbole (H) de centre M sont les bissectrices des asymptotes. Considérons en particulier l'axe MN faisant avec l'asymptote MM′ l'angle $+\frac{\pi}{4}$. Construisons la droite I′K faisant avec I′I le même angle $+\frac{\pi}{4}$ et prenons sur l'arc I′K, un point O_1 tel que $2\widehat{O_1K}=-\widehat{O_1I'}$.

On a $\widehat{MN} = \widehat{IK} = \frac{\pi}{4}$ et, par suite, $2\widehat{KN} = 2\widehat{IM'} = -\widehat{I'M}$. On aura donc constamment $2\widehat{O_1N} = -\widehat{O_1M}$ et l'enveloppe de la droite MN est une hypocycloïde à trois rebroussements.

V. BERTRAND, répétiteur au lycée de Lille.

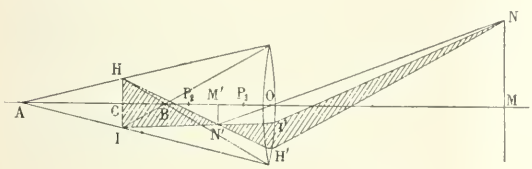
PHYSIQUE

629. — *Une source lumineuse d'éclat k, ayant la forme d'un disque circulaire de diamètre a, est placée à une distance x d'une lentille convergente de diamètre D et de distance focale f.*

Quel est l'éclairement produit par la lumière réfractée, à une distance L de la lentille, sur un écran normal à l'axe du faisceau lumineux ? Comment cet éclairement varie-t-il quand on fait varier x ?

Comment varie, dans les mêmes conditions, la quantité de lumière reçue par un disque de diamètre Δ placé à la distance L ?

Soient H le disque lumineux, C son centre, O la lentille, A et B les sommets des cônes circonscrits extérieurement et intérieurement au disque et à la lentille ; considérons sur l'axe CO, en M, à une distance L de la lentille, un élément de surface de l'écran.



La quantité de lumière reçue par l'élément M a dû, avant son passage à travers la lentille, traverser l'élément conjugué M'. Suivant que M' est extérieur ou intérieur à l'intervalle AB, la source lumineuse tout entière ou une partie seulement concourt à l'éclairement en M. Or, si L' désigne la distance OM', les points A et B coïncident avec le point M' pour des positions du point C dont les distances à la lentille sont respectivement

$$x_1 = \frac{D - a}{D} L' \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{D + a}{D} L' ;$$

soient P_1 et P_2 ces deux points : suivant que la source est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'intervalle P_1P_2, une partie seulement ou la totalité de la source concourt à l'éclairement en M. Examinons successivement ces deux cas.

1° *La source est extérieure à l'intervalle* P_1P_2. — Appelons s, s' et Σ les surfaces de l'élément M, de l'élément M' et de la source. L'élément M' et, par conséquent, l'élément M reçoivent une quantité de lumière q donnée par la formule de Lambert

$$q = k \frac{\Sigma s'}{(x - L')^2} .$$

L'éclairement en M est donc

$$e = k \frac{\Sigma}{(x - L')^2} \frac{s'}{s} = k \frac{\Sigma}{(x - L')^2} \frac{L'^2}{L^2} = k \frac{\Sigma f^2}{[(L - f)x - Lf]^2} .$$

La lumière qui produit cet éclairement traverse la partie de la lentille que limite le cône de sommet M' circonscrit à la source lumineuse ; la surface de cette partie de la lentille est égale à $\frac{L'^2}{(x - L')^2}\Sigma$ et l'expression de l'éclairement en M montre que cet éclairement est le même que si l'on substituait au système éclairant cette même surface douée de l'éclat k. En d'autres termes, cette partie de la lentille, vue du point M, paraît posséder l'éclat k.

2° *La source est intérieure à l'intervalle* P_1P_2. — Soient σ la partie de la source qui intervient dans le

phénomène et S la surface de la lentille ; on a

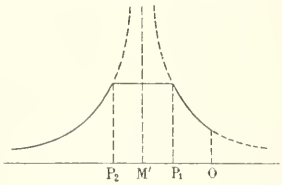
$$\frac{\sigma}{S} = \frac{(x - L')^2}{L'^2}.$$

L'éclairement en M est

$$e' = k \frac{\sigma}{(x - L')^2} \frac{s'}{s} = k \frac{S}{L'^2} \frac{L'^2}{L^2} = k \frac{S}{L^2};$$

cet éclairement est constant et le même que si l'on substituait à la lentille un disque de même surface et d'éclat k.

Représentons l'éclairement correspondant à une position donnée de la source par une ordonnée élevée en ce point sur l'axe de la lentille ; le phénomène sera figuré par la construction ci-contre.



R. HAUSER, à Clermont-Ferrand.

Les considérations qui précèdent s'appliquent également à un point N situé en dehors de l'axe. Considérons son conjugué N' et le cône de sommet N' circonscrit à la source lumineuse ; ce cône découpe sur la lentille un cercle PH', complet ou non ; attribuons à ce cercle l'éclat k, il produira en N l'éclairement cherché. Si la source, placée d'abord très loin, se rapproche de la lentille, l'éclairement augmente d'abord, devient ensuite constant quand le point N' pénètre dans la région AIBH, puis diminue quand le point N' sort de cette région.

Considérons enfin un disque de rayon MN. Son image M'N' pourra se trouver tout entière dans la région AIBH si le diamètre de cette image est plus petit que celui de la source lumineuse, et cela aura lieu quand la source sera dans le plan conjugué de MN ou dans une position voisine. Le disque de diamètre Δ recevra alors une quantité de lumière égale à

$$\frac{\pi}{4} k S \frac{\Delta^2}{L^2}.$$

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1897)

Mathématiques.

190. — Étudier les coniques pour lesquelles les pôles de deux droites données sont deux points donnés.

191. — Lieu des pôles des normales à une conique par rapport à un cercle ayant son centre en l'un des foyers.

192. — On considère les trois courbes planes

$$f(xyz) = 0, \qquad \varphi(xyz) = 0, \qquad \psi(xyz) = 0.$$

Démontrer que la courbe

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} = 0$$

passe par les points communs aux trois premières courbes et admet ces points comme points doubles.

Application à trois coniques ayant trois points communs.

193. — On considère la courbe gauche

$$x = \frac{f(t,s)}{\varphi(t,s)}, \qquad y = \frac{f_1(t,s)}{\varphi(t,s)}, \qquad z = \frac{f_2(t,s)}{\varphi(t,s)},$$

où le paramètre variable est désigné par $\frac{t}{s}$. Démontrer que la tangente au point (t, s) passe par les deux points

$$x_1 = \frac{f_t}{\varphi_t}, \qquad y_1 = \frac{f_{1_t}}{\varphi_t}, \qquad z_1 = \frac{f_{2_t}}{\varphi_t},$$

$$x_2 = \frac{f_s}{\varphi_s}, \qquad y_2 = \frac{f_{1_s}}{\varphi_s}, \qquad z_2 = \frac{f_{2_s}}{\varphi_s}.$$

En déduire l'expression des coordonnées d'un point d'une tangente en fonction d'un nouveau paramètre λ et de l'ancien paramètre $\frac{t}{s}$. Quand les deux paramètres varient d'une manière indépendante, ce point engendre une surface. Que représentent sur cette surface les équations $\lambda =$ constante, $\frac{t}{s} =$ constante ?

On suppose les polynomes f, f_1, f_2 du 3e degré en $\frac{t}{s}$, et φ de degré 0. Démontrer que dans ce cas la courbe $\lambda =$ constante est une parabole. Trouver son plan.

194. — On considère une force constante située dans le plan des xy, un couple constant dont l'axe est situé dans le même plan, une force constante en direction, mais variable en grandeur située dans le plan des zx. Pour une valeur de cette dernière force faire la réduction canonique : lieu de l'axe central quand cette force varie.

195. — $f(xy)$ étant un polynome homogène de degré m en x et y, démontrer que le polynome

$$(f'_y)^2 f''_{x^2} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + (f'_x)^2 f''_{y^2}$$

est divisible par $f(xy)$, et trouver le quotient.

196. — On donne dans l'espace trois droites 1, 2, 3 et sur ces droites trois points quelconques P_1, P_2, P_3. Démontrer que la quantité

$$V \equiv P_2P_3 . \cos(2,3) \cos(1,P_2P_3) + P_3P_1 \cos(3,1) \cos(2,P_3P_1) + P_1P_2 (\cos 1,2) \cos(3,P_1P_2)$$

est indépendante de la position des points P_1, P_2, P_3 sur les droites 1, 2, 3.

Dans quel cas a-t-on $V = 0$?

On suppose que le plan $P_1P_2P_3$ se déplace, dans ce cas, et l'on demande le lieu de la perpendiculaire au plan menée par le point de concours des hauteurs du triangle $P_1P_2P_3$.

197. — Etudier la surface représentée par les équations

$$x = \frac{b^2 + c^2}{bc}, \qquad y = \frac{c^2 + a^2}{ac}, \qquad z = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Former son équation, et chercher les droites situées sur cette surface.

198. — Lieu des points de concours des tangentes communes à une ellipse fixe et à un cercle variable dont le centre est en un point M de l'ellipse. Démontrer que ce lieu coïncide avec le lieu des points de concours des tangentes menées du point M aux coniques homofocales à l'ellipse donnée.

199. — Etudier la courbe représentée par les équations

$$x = t^4, \qquad y = t^3, \qquad z = t^2.$$

Condition pour que quatre points t_1, t_2, t_3, t_4 de cette courbe soient dans un même plan. En un point on mène le plan osculateur qui rencontre la courbe en un autre point ; en cet autre point on mène le plan osculateur qui rencontre la courbe en un troisième point, etc. Trouver la limite des points successifs ainsi obtenus.

QUESTIONS PROPOSÉES

735. — Étant donnés, dans un même plan, une conique C et deux points A et B, si M désigne un point quelconque de ce plan, on sait que le triangle MAB et le triangle M'A'B', polaire réciproque du premier par rapport à la conique C, sont homologiques.

1° Lieu des points M, tels que ces deux triangles soient inscrits dans une même conique Σ; trouver dans les mêmes conditions l'enveloppe des coniques Σ : relation avec le lieu du point M.

2° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu du centre d'homologie ω des deux triangles : c'est une conique S.

3° Le point M étant quelconque, montrer que la condition pour que la conique Σ passant par cinq des six points M, A, B, M', A', B' passe par le sixième, peut s'énoncer géométriquement : le centre d'homologie ω doit être un des sommets du triangle conjugué commun à C et Σ.

4° Condition géométrique pour que deux coniques C et S satisfassent aux conditions précédentes. En

déduire que, si on recommence le problème en prenant pour C la conique S, les points A et B restant les mêmes, on trouve pour conique S la conique C.

5° MAB et M'A'B' étant inscrits dans une même conique Σ sont circonscrits à une même conique Σ' : trouver le lieu des sommets du triangle conjugué commun à Σ et Σ'. Ce lieu se compose de la conique S et d'une quartique.

6° Montrer que toutes les coniques Σ de la première partie sont harmoniquement inscrites à une même conique S de C ; déterminer les points A et B correspondants.

7° Montrer que ces coniques Σ sont des coniques S de deux coniques différentes. Trouver le lieu des points A et B correspondants, ainsi que l'enveloppe des droites AB. G. Lapointe.

736. — On considère une ellipse E dont les longueurs des axes sont désignées par $2a$ et $2b$, et les cercles concentriques à E ayant pour rayons $a+b$ et $a-b$. Par un point du cercle $(a-b)$ on mène les quatre normales à E. Démontrer que certains des pôles des droites qui joignent les pieds des normales deux à deux sont situés sur le cercle $(a+b)$, et trouver le lieu des pôles des autres droites définies de la même façon.

E.-N. Barisien.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1897)

Géométrie analytique (1re session).

684. — *On donne deux axes* Ox *et* Oy, *faisant un angle* θ, *et, sur l'axe des* y, *un point* P $(OP = p)$ *et un point* B $(OB = b)$. *Par* P *on mène une parallèle à* Ox, *sur laquelle on prend des distances variables* $P\mu = d$, $P\mu' = d$, *telles que* $dd' = k^2$. *Enfin on considère une droite* (D) $y = mx + b$. *Faisant varier* m,

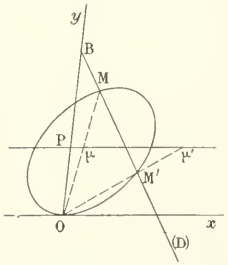
1° *Démontrer que, si le point de rencontre* M *des droites* (D) *et* $O\mu$ *décrit une conique* (C) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dy = 0$, *le point de rencontre* M' *des droites* D *et* $O\mu'$ *décrit de même une conique.*

2° *Chercher la condition qui lie* p, b *et* k *pour que cette dernière conique se confonde avec la conique* (C), *et démontrer que, cette condition étant satisfaite, il y a toujours une position de* (D) *telle que la corde interceptée sur cette droite par la conique* (C) *soit vue du point* O *sous un angle droit.*

3° *Les points* P *et* B *étant supposés sur une droite* OPB *mobile autour de* O, *chercher, pour des valeurs données de* p *et de* k, *le lieu du point* B *tel que, pour chaque position de ce point, les points* M *et* M' *décrivent la conique* (C). *Le lieu sera rapporté aux axes* Ox *et* Oy *donnés.*

4° *Enfin, trouver la position de* B *et la relation entre* p *et* k *telles que toutes les cordes interceptées par la conique* (C) *sur la droite* (D) *mobile soient vues sous un angle droit du point* O.

1. L'équation de la conique (C) étant



$$(C) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dy = 0,$$

cette conique est tangente à Ox au point O. Nous pouvons supposer que cette conique est une ellipse.

La droite (D) passe en B puisqu'elle a pour équation

$$y = mx + b.$$

Puisque $P\mu = d$ et $OP = p$, l'équation de $O\mu$ est

$$px - dy = 0.$$

Ces deux droites se coupent en un point M de coordonnées

$$(M) \qquad x = \frac{bd}{p - md}, \qquad y = \frac{pb}{p - md}.$$

Exprimons que ce point est sur la conique (C), nous obtenons entre m et d la relation

$$(1) \qquad 2Dpm = b(Ad^2 + 2Bpd + Cp^2) + 2Dp^2.$$

Pour avoir le *lieu* du point M′, intersection de (D) et de $O\mu'$, nous observons que, si l'on tient compte de la relation $dd' = k^2$, l'équation de $O\mu'$, savoir $px - d'y = 0$, s'écrit $pdx - k^2y = 0$.

On est ainsi conduit à éliminer m et d entre la relation (1) et les deux équations

$$(2) \qquad y = mx + b, \qquad pdx - k^2y = 0,$$

qui donnent, en fonction de x et y, coordonnées de M′ :

$$m = \frac{y - b}{x} \qquad \text{et} \qquad d = \frac{k^2y}{px}.$$

Ces valeurs de m et de d substituées dans la relation (1) conduisent à une équation qui peut se mettre sous la forme

$$(C') \qquad \frac{(Cb + 2D)p^2}{k^2b}x^2 + 2Bxy + \frac{Abk^2 - 2Dp^2}{p^2b}y^2 + 2Dy = 0.$$

Elle représente une conique (C′) tangente à Ox au point O.

Donc, si le point M décrit la conique (C) le point M′ décrit également une conique.

2. Pour que les deux coniques se confondent on doit avoir

$$\frac{(Cb + 2D)p^2}{k^2b} = A, \qquad \text{avec} \qquad \frac{Abk^2 - 2Dp^2}{p^2b} = C,$$

ce qui nous donne la condition unique demandée

$$(3) \qquad b(Cp^2 - Ak^2) + 2Dp^2 = 0.$$

Remarque. — Cette condition peut s'obtenir d'une autre manière. En effet, les points M et M′ étant supposés à la fois sur la conique (C)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dyz = 0,$$

et sur la droite (D) $\qquad y = mx + bz,$

il suffit d'éliminer z entre ces deux équations pour obtenir l'équation du système de droites OM et OM′. On trouve

$$(4) \qquad Abx^2 + 2(Bb - Dm)xy + (Cb + 2D)y^2 = 0.$$

Pour $y = p$, on obtient l'équation du second degré $Abx^2 + 2(Bb - Dm)px + (Cb + 2D)p^2 = 0$, dont les racines sont les abscisses d et d' des points μ et μ'. En écrivant que leur produit est égal à k^2, on retombe, quel que soit m, sur la condition (3) qui précède. On a mis ainsi en évidence la propriété suivante :

Etant données une conique (C), une droite parallèle à la tangente Ox au point O, et une droite Oy coupant cette parallèle au point P, si les droites OM et OM′ joignant le point O à deux points de la conique et coupant la parallèle à Ox en μ et μ', se déplacent en tournant autour de O, sous la condition que l'on ait $P\mu \times P\mu' = k^2$, la corde MM′ de la conique tourne autour d'un point fixe B de la droite OP.

En effet, la relation (3) détermine b en fonction de p et de k. La corde MM′ va donc passer dans chacune de ses positions par le point $B(0, b)$.

Pour achever cette 2e partie, exprimons que l'équation (4) représente un système de deux droites rectangulaires.

Il suffit d'écrire la condition bien connue

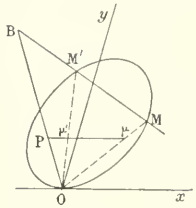
$$(5) \qquad Ab - 2(Bb - Dm)\cos\theta + (Cb + 2D) = 0.$$

Elle est du premier degré par rapport à m et donne une valeur et une seule pour ce nombre.

Il y a donc une position de la droite (D) pour laquelle la corde MM′ de la conique (C) est vue du point O sous un angle droit.

Pour construire la droite dans cette position, il suffirait de joindre le point B de Oy au point de Frégier situé sur la normale à la conique au point O (voir 4e partie).

3. Désignons par x_0, y_0 les coordonnées du point B : celles du point P seront



$$\frac{px_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+2x_0y_0\cos\theta}}, \qquad \frac{py_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+2x_0y_0\cos\theta}},$$

ou plus simplement $\frac{px_0}{\rho}$, $\frac{py_0}{\rho}$, en posant $\rho=\sqrt{x_0^2+y_0^2+2x_0y_0\cos\theta}$.

L'équation de la droite (D) sera de la forme $u(x-x_0)+v(y-y_0)=0$ et l'équation du faisceau des deux droites OM, OM'

$$(6) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dy\frac{ux+vy}{ux_0+vy_0}=0.$$

Soient x et x' les abscisses des points μ et μ' $\left(\text{d'ordonnée } y=\frac{py_0}{\rho}\right)$. En observant que

$$P\mu = x'-\frac{px_0}{\rho}, \qquad P\mu' = x'-\frac{px_0}{\rho},$$

la relation donnée devient

$$\left(x-\frac{px_0}{\rho}\right)\left(x'-\frac{px_0}{\rho}\right)=k^2,$$

c'est-à-dire

$$xx'-\frac{px_0}{\rho}(x+x')+\frac{p^2x_0^2}{\rho^2}-k^2=0.$$

Or, x et x' sont les abscisses des points de rencontre μ et μ' des droites représentées par l'équation (6) avec la droite $y=\frac{py_0}{\rho}$. Ce sont les racines de l'équation du second degré

$$Ax^2+2\left(B+\frac{Du}{ux_0+vy_0}\right)\frac{py_0}{\rho}\cdot x+\left(C+2\frac{Dv}{ux_0+vy_0}\right)\frac{p^2y_0^2}{\rho^2}=0,$$

de sorte que l'on a

$$xx'=\frac{1}{A}\left(C+2\frac{Dv}{ux_0+vy_0}\right)\cdot\frac{p^2y_0^2}{\rho^2},$$

$$x+x'=-\frac{2}{A}\left(B+\frac{Du}{ux_0+vy_0}\right)\cdot\frac{py_0}{\rho}.$$

La relation précédente peut donc s'écrire

$$\frac{1}{A}\left(C+2\frac{Dv}{ux_0+vy_0}\right)\cdot\frac{p^2y_0^2}{\rho^2}+\frac{2}{A}\left(B+\frac{Du}{ux_0+vy_0}\right)\frac{p^2x_0y_0}{\rho^2}+\frac{p^2x_0^2}{\rho^2}-k^2=0,$$

c'est-à-dire

$$p^2(Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dy_0)-Ak^2\rho^2=0.$$

En remplaçant ρ^2 par sa valeur, x_0, y_0 par x et y, on obtient l'équation du lieu du point B,

$$(C'') \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dy-\frac{Ak^2}{p^2}(x^2+y^2+2xy\cos\theta)=0.$$

Le lieu est une conique (C'') tangente à Ox au point O.

4. La condition pour que la corde MM' soit vue du point O sous un angle droit, ou encore pour que les deux droites représentées par l'équation (6) soient rectangulaires, c'est que

$$A+\left(C+\frac{2Dv}{ux_0+vy_0}\right)-2\left(B+\frac{Du}{ux_0+vy_0}\right)\cos\theta=0,$$

ou

$$(A+C-2B\cos\theta)(ux_0+vy_0)+2D(v-u\cos\theta)=0.$$

Cette condition doit être vérifiée quelle que soit la droite D, c'est-à-dire quels que soient u et v. Cela exige que l'on ait

$$(A + C - 2B\cos\theta)x_0 - 2D\cos\theta = 0, \qquad (A + C - 2B\cos\theta)y_0 + 2D = 0.$$

Ces deux relations déterminent le point B,

$$x_0 = \frac{2D\cos\theta}{A + C - 2B\cos\theta}, \qquad y_0 = \frac{-2D}{A + C - 2B\cos\theta};$$

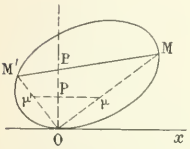
il faut de plus que ce point soit situé sur la conique (C''), ce qui donne entre p et k, la condition

$$\frac{k^2}{p^2} = \frac{Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dy_0}{A(x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0\cos\theta)}.$$

Au lieu de remplacer x_0 et y_0 par leurs valeurs, nous remarquerons que les relations précédentes peuvent s'écrire $\qquad x_0 = -y_0\cos\theta, \qquad 2D = -(A + C - 2B\cos\theta)y_0,$
et la condition cherchée devient

$$\frac{k^2}{p^2} = \frac{(A\cos^2\theta - 2B\cos\theta + C)y_0^2 - (A + C - 2B\cos\theta)y_0^2}{A(\cos^2\theta + 1 - 2\cos^2\theta)y_0^2} = \frac{A(\cos^2\theta - 1)y_0^2}{A(1 - \cos^2\theta)y_0^2} = -1,$$

c'est-à-dire $k^2 = -p^2$. Ce résultat pouvait être prévu géométriquement.



La corde MM' étant vue de l'origine sous un angle droit pivote autour d'un point fixe B (théorème de Frégier) situé sur la normale en O à la conique C. Quelle que soit la position de cette corde, le triangle $\mu O\mu'$ est un triangle rectangle, dans lequel

$$P\mu . P\mu' = -\overline{OP}^2 = -p^2.$$

Or, par hypothèse $P\mu . P\mu' = k^2$. Il faut donc que l'on ait $k^2 = -p^2$.

V. HIOUX.

M. Louis SAVOUS a résolu les deux premières parties.

Calcul trigonométrique (1re session).

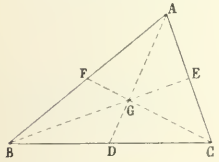
689. — *Dans le triangle* ABC *on donne la surface* S, *la médiane* m *relative au côté* BC *et l'un des angles* α *que font entre elles les deux autres médianes.*

1° *Calculer la longueur* a *du côté* BC,

$$S = 853^a,54 \qquad m = 715^m,63 \qquad \alpha = 121°27'35''$$

en se bornant à la plus petite valeur de cette inconnue.

2° *Etablir les formules pour le calcul des deux autres médianes et donner les conditions de possibilité du problème ainsi que le nombre des solutions.*



Soit G le point de concours des médianes. L'angle donné α est égal à l'angle en G du triangle GBC ou à son supplément. On connaît la surface de ce triangle égale à $\frac{S}{3}$ et la médiane $GD = \frac{m}{3}$ et on doit calculer BC, $BE = \frac{3}{2}BG$, $CF = \frac{3}{2}CG$. On est donc ramené à calculer les côtés du triangle GBC, connaissant l'angle en G, la médiane issue du sommet de cet angle et la surface.

1. *Calcul de* BC. — On a, en posant $BC = x$, $BG = y$, $CG = z$,

$$x^2 = y^2 + z^2 \mp 2yz \cos\alpha \qquad y^2 + z^2 = 2\frac{m^2}{9} + 2\frac{x^2}{4}, \qquad \frac{S}{3} = \frac{1}{2} yz \sin\alpha,$$

d'où l'on déduit

$$x^2 = \frac{4m^2}{9} \mp \frac{8S}{3} \operatorname{cotg}\alpha \qquad \text{et} \qquad x = \frac{2m}{3}\sqrt{1 \mp \frac{6S \operatorname{cotg}\alpha}{m^2}}.$$

Application : $S = 853^{\text{ares}},54 = 85.354^{\text{mq}}$, $m = 715^{\text{m}},63$, $\alpha = 121°27'35''$. α étant obtus, $\operatorname{cotg}\alpha$ est négatif, la plus petite valeur de x est donnée par la formule

$$x = \frac{2m}{3}\sqrt{1 + \frac{6S}{m^2}\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{2m}{3}\sqrt{1 - \frac{6S}{m^2}\operatorname{cotg}(\pi - \alpha)},$$

qui correspond au cas où l'angle donné α est l'angle extérieur CGE du triangle GBC. On posera

$$\frac{6S}{m^2}\operatorname{cotg}(\pi - \alpha) = \sin^2\varphi,$$

d'où

$$x = \frac{2m}{3}\cos\varphi.$$

En faisant le calcul, on trouve $\varphi = 51°27'43'',7$, $x = 297^{\text{m}},245$.

2. *Calcul des médianes.* — Il suffit de calculer y et z au moyen des équations

$$y^2 + z^2 = \frac{4m^2}{9} \mp \frac{4S}{3}\operatorname{cotg}\alpha, \qquad 2yz = \frac{4S}{3\sin\alpha}$$

d'où l'on déduit

$$(y+z)^2 = \frac{4m^2}{9} + \frac{4S(1 \mp \cos\alpha)}{3\sin\alpha}, \qquad (y-z)^2 = \frac{4m^2}{9} - \frac{4S(1 \pm \cos\alpha)}{3\sin\alpha}.$$

Connaissant $y+z$ et $y-z$, on calculera facilement y et z, et par suite les médianes $BE = \frac{3}{2}y$, $CF = \frac{3}{2}z$.

Discussion. — Les valeurs de x, $y+z$ et $y-z$ doivent être réelles. Il faut de plus, pour qu'elles soient acceptables, que l'on puisse construire le triangle GBC avec x, y, z comme côtés, ce qui exige que

$$(y-z)^2 < x^2 < (y+z)^2.$$

Examinons séparément les deux solutions du problème.

I. — L'angle donné α est l'angle BGC du triangle GBC. On doit avoir les inégalités

$$x^2 = \frac{4m^2}{9} - \frac{8S}{3}\operatorname{cotg}\alpha > 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (1) \qquad \operatorname{cotg}\alpha < \frac{m^2}{6S},$$

$$(y+z)^2 = \frac{4m^2}{9} + \frac{4S(1 - \cos\alpha)}{3\sin\alpha} > 0. \qquad \text{(toujours vérifiée)},$$

$$(y-z)^2 = \frac{4m^2}{9} - \frac{4S(1 + \cos\alpha)}{3\sin\alpha} > 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (2) \qquad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} < \frac{m^2}{3S}.$$

Quant à la condition de grandeur, elle se réduit à

$$-(1 + \cos\alpha) < -2\cos\alpha < 1 - \cos\alpha.$$

Elle est vérifiée d'elle-même. Reste à discuter les conditions (1) et (2).

Si l'on remarque que $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}$ et que, $\frac{\alpha}{2}$ étant un angle aigu, $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ est positif, on transforme l'inégalité (1) en

$$(1') \qquad \left\{ \operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{m^2}{3S}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - 1 < 0, \qquad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \frac{m^2}{3S}\right) - 1 < 0. \right.$$

Cette inégalité sera toujours vérifiée en vertu de l'inégalité (2). Donc la seule condition de possibilité est $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} < \frac{m^2}{3S}$.

II. — L'angle donné α est l'angle extérieur CGE du triangle GBC. On est alors conduit aux inégalités

$$\operatorname{cotg}\alpha > -\frac{m^2}{6S}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \frac{m^2}{3S}. \tag{2}$$

La première peut s'écrire, en remplaçant $\operatorname{cotg}\alpha$ par $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$,

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{m^2}{3S}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 1 < 0, \tag{1'}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{m^2}{3S}\right) - 1 < 0.$$

Elle est vérifiée en vertu de l'inégalité (2) et la seule condition de possibilité est $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \frac{m^2}{3S}$.

Posons $\frac{m^2}{3S} = \operatorname{tg}\theta$, θ étant un angle aigu :

1° $m^2 < 3S \quad \theta < \frac{\pi}{4}$:
- $0 < \frac{\alpha}{2} < \theta$ — la solution (II) seule convient ;
- $\theta < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} - \theta$ — pas de solution ;
- $\frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ — la solution (I) seule convient.

2° $m^2 = 3S \quad \theta = \frac{\pi}{4}$:
- $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ — solution (II) ;
- $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ — solution (I).

3° $m^2 > 3S \quad \theta > \frac{\pi}{4}$:
- $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} - \theta$ — solution (II) ;
- $\frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\alpha}{2} < \theta$ — solutions (I) et (II) ;
- $\theta < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ — solution (I).

Dans l'exemple numérique traité plus haut, on a

$$\log\operatorname{tg}\theta = 0{,}3010318, \qquad \theta = 63^\circ 28'\ldots, \qquad \frac{\alpha}{2} = 60^\circ 43' 47'',5.$$

$\frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\alpha}{2} < \theta$: les deux solutions conviennent. P. L.

Solution incomplète : F. Pégorier.

Géométrie descriptive (2e session).

708. — *Le tore a son axe zz' vertical et placé au milieu de la feuille de l'épure. Le rayon du cercle générateur* (c, c') *est de* 40^{mm}. *Le centre de ce cercle décrit une circonférence de centre* oo' *et de rayon* $o'c' = 60^{mm}$. *Le point* (oo') *est à* 58^{mm} *au-dessus du plan horizontal et à* 150^{mm} *en avant du plan vertical* xy *de projection.*

Le cylindre de révolution est défini de la manière suivante : son axe est contenu dans le plan méridien x_1y_1 *du tore qui fait* $45°$ *avec le plan de front. Cet axe rencontre en a l'axe vertical z du tore (cote du point a,* 140^{mm}*) et il passe par le point* $(c_1c'_1)$, *centre du cercle générateur du tore. La génératrice est la tangente* $g'_1b'_1$ *à la deuxième position* $c_2c'_2$ *du cercle générateur dans le plan méridien* x_1y_1.

On demande de déterminer l'intersection des deux surfaces en ayant soin d'indiquer la construction de la tangente en un point de la courbe. Il sera tenu compte de la recherche des points et tangentes remarquables.

On figurera le tore en supprimant de ce corps la portion contenue dans le cylindre.

Le plan des axes étant de front dans le système x_1y_1, nous emploierons des sphères auxiliaires ayant pour centre commun le point de rencontre (a, a'_1) des axes dans ce système.

Une sphère auxiliaire quelconque, de rayon $a'_1j'_1$, coupe le tore suivant deux parallèles dont l'un a pour projection verticale la parallèle $j'_1m'_1$ à x_1y_1 ; elle coupe le cylindre suivant deux parallèles dont l'un est projeté verticalement en $v'_1m'_1$ perpendiculaire à la projection verticale $a'_1c'_1$ de l'axe. Ces deux droites $j'_1m'_1$ et v'_1m_1 se coupent en m'_1 qui est, dans le système x_1y_1, la projection verticale d'un point M de l'intersection. On en déduit la projection horizontale m sur la projection horizontale jmk du parallèle du tore, et, par suite, dans le système xy, la projection verticale m' du point M. Déterminons la tangente en ce point; pour cela, nous traçons les normales aux deux surfaces en M; la normale au tore est $(mn, m'_1n'_1)$ et celle au cylindre est $(mr, m'_1r'_1)$. Construisant une horizontale pr du plan des normales, on abaissera mt perpendiculaire à pr, ce qui donnera la projection horizontale mt de la tangente en M à la courbe d'intersection.

Une frontale $n'q'$ dans le système xy donnera la projection verticale $m't'$, perpendiculaire à $n'q'$, de cette tangente qui est alors la droite $(mt, m't')$.

Nous pouvons remarquer qu'une sphère auxiliaire donnera sur un parallèle du tore deux points de l'intersection dont les projections horizontales seront symétriques l'une de l'autre par rapport à x_1y_1, en sorte que la projection horizontale de l'intersection admet x_1y_1 comme axe de symétrie.

Points remarquables. — Les deux surfaces, d'après leur définition, admettent même plan tangent au point (b, b'_1) où la génératrice $(gb, g'_1b'_1)$, de contour apparent vertical du cylindre, dans le système x_1y_1, touche le cercle (c_2, c'_2) de contour apparent vertical du tore. L'intersection présente donc en ce point un point double qui, dans le système xy, est le point (b, b').

D'autre part, les plans diamétraux conjugués des cordes verticales, c'est-à-dire les plans des contours apparents horizontaux des deux surfaces, se coupent suivant la ligne de bout (lc_1, c'_1) dans le système x_1y_1 et la projection horizontale lc_1 de cette droite est la ligne des points doubles en projection horizontale.

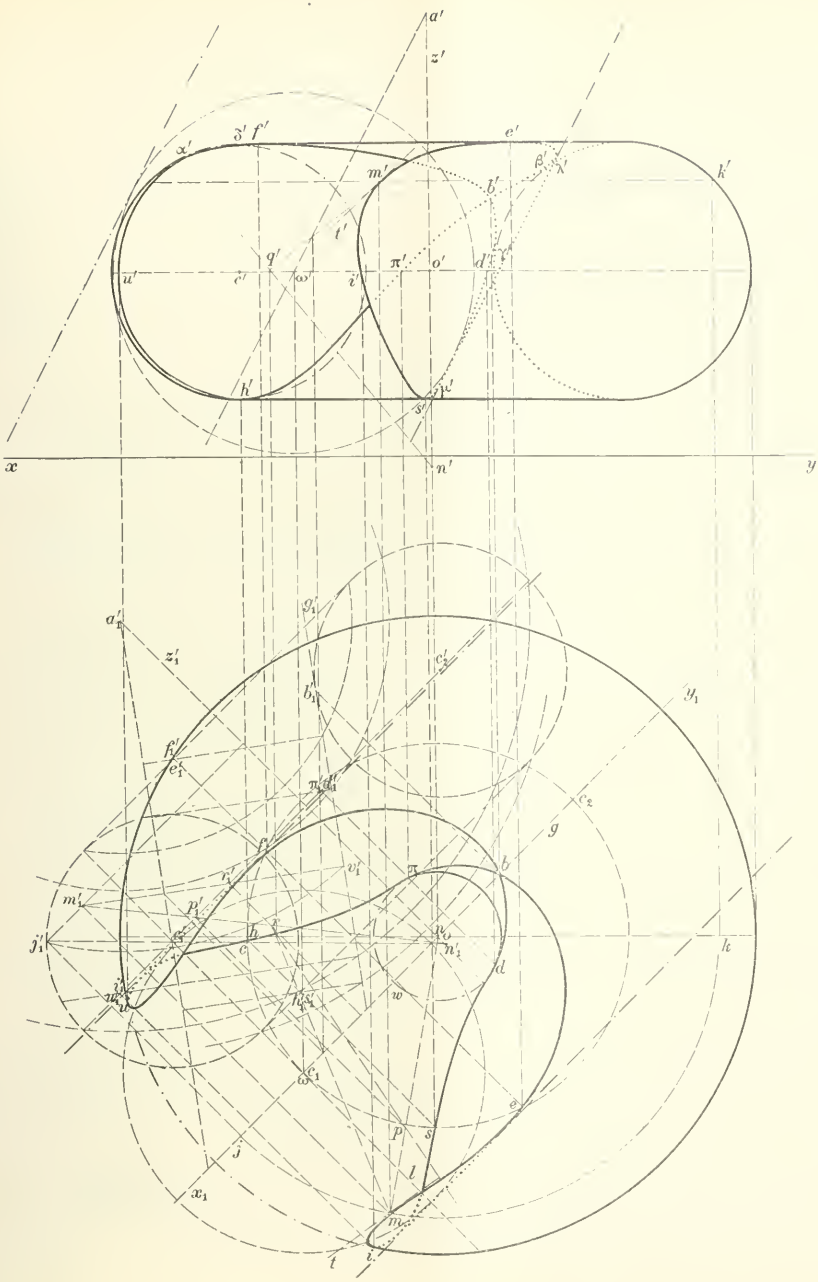
Cherchons maintenant les points sur le cercle de gorge du tore ; il suffit, pour cela, de prendre une sphère auxiliaire coupant le tore suivant ce cercle, ce qui donne les deux points (π, π'_1) et (d, d'_1) sur ce cercle dans le système x_1y_1. Passant au système xy, on a les deux points (π, π') et (d, d'). De même, les sphères auxiliaires qui passent par les cercles de contour apparent horizontal et vertical donnent les points (i, i'), (u, u'), (e, e'), (f, f'), (s, s') et (h, h').

Représentation du tore. — Nous voulons représenter le tore, supposé plein et existant seul, en enlevant la partie contenue dans le cylindre. Pour cela, nous commençons par déterminer les portions de contour apparent du tore qui sont enlevées; ce sont, en projection horizontale, les arcs iu d'équateur et πwd du cercle de gorge. En projection verticale, dans le système xy, nous enlevons les arcs $\alpha'\delta'h'$ et $\beta'\gamma'$ des cercles méridiens et la portion $\delta'f'$ du cercle supérieur horizontal. Ceci fait, on reconnaît que tout est vu en projection horizontale, sauf les arcs qui vont de i et de u aux points doubles apparents.

En projection verticale, les arcs $e'm's'$ et $\alpha'u'h$ tracés sur la partie antérieure du tore sont vus ; le reste est caché sur le tore. Mais les arcs qui vont de α' et de h' aux points doubles apparents de la projection verticale sont vus par l'entaille cylindrique, dont le fond est limité par la portion $\lambda'\mu'$ de la génératrice de contour apparent verticale du cylindre que nous conservons et qui est cachée.

Remarque. — On déterminerait les tangentes au point double réel en construisant la trace horizontale du cône d'erreur ; mais comme cette trace est une courbe du sixième degré, cette construction ne donne qu'un résultat approché.

N. C.


a'
z'
δ' f'
e'
α'
m'
b'
β'
λ'
k'
t'
q'
π'
o'
d'
γ'
u'
c'
ω'
i'
h'
j'
s'
x
n'
y
g₁'
a₁'
z₁'
c₂'
b₁'
y₁
f₁'
e₁'
π₁' d₁'
c₂
g
p₁
v₁'
π
b
m₁'
p₁'
r₁'
r
j₁'
h
c
n₁'
k
d
i₁'
u₁'
h₁' s₁'
w
ω₁'
e
P
s
j
l
x₁
m
t
i

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

674. — *D'un point* M *pris sur une ellipse on abaisse des perpendiculaires* MP *et* MQ *sur les axes de cette ellipse. Soient* P *et* Q *les points de rencontre de ces droites avec les axes de l'ellipse. On considère les deux cercles ayant pour centres les points* P *et* Q *et passant en* M ; *on demande les enveloppes de ces cercles.*

L'équation du cercle de centre P et de rayon PM est

$$(1) \qquad (x - a\cos\varphi)^2 + y^2 = b^2\sin^2\varphi,$$

les axes de l'ellipse étant pris pour axes de coordonnées et φ étant l'anomalie excentrique du point M.

En ordonnant l'équation (1) par rapport à $\cos\varphi$, il vient

$$(a^2 + b^2)\cos^2\varphi - 2ax\cos\varphi + x^2 + y^2 - b^2 = 0.$$

L'équation de l'enveloppe du cercle (1) est donc $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - b^2) - a^2x^2 = 0$,

ou

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

C'est une ellipse ayant même petit axe que l'ellipse donnée.

On trouverait de même que le cercle de centre Q et de rayon QM a pour enveloppe l'ellipse

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Remarques. — Voici d'autres lieux géométriques relatifs à la même question et qui offrent un certain intérêt.

1° — Le lieu des centres de similitude des deux cercles (considérés plus haut) se compose des deux sextiques

$$[(x + y)(b^2x^2 - a^2y^2) - a^2b^2(x - y)]^2 + 4a^4b^4xy = 0,$$
$$[(x - y)(b^2x^2 + a^2y^2) - a^2b^2(x + y)]^2 - 4a^4b^4xy = 0.$$

2° La ligne des centres est normale à l'ellipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{a^4b^4}{c^4}.$$

3° — La corde commune aux deux cercles enveloppe une courbe dont l'aire est

$$U = \frac{\pi(a^4 + b^4 + 10a^2b^2)}{8ab}.$$

4° — Le lieu du milieu de la corde commune est la courbe

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(b^2x^{\frac{2}{3}} + a^2y^{\frac{2}{3}}\right) = a^2b^2,$$

ayant pour aire $\dfrac{3\pi a^2b^2}{2(a + b)^2}$.

5° — Le lieu du second point de rencontre des deux cercles est la sextique

$$(x^2 + y^2)^2(a^2y^2 + b^2x^2) = a^2b^2(x^2 - y^2)^2$$

ayant pour aire $\dfrac{\pi ab(a^2 + b^2)}{(a + b)^2}$.

E.-N. BARISIEN.

Solution semblable, M. Bunel, lycée de Reims.

Bonnes solutions, MM. G. Rousier, à Rochechouart Pégorier, à Cette ; E. Merlin, Université de Gand.

675. — *On considère dans un plan un point* O, *une droite* Δ *et une courbe* C. *Soient* M *le point de contact d'une tangente à* C *et* N *le point où elle rencontre* Δ.

Déterminer la courbe C *de façon que l'angle formé par les deux droites* OM *et* ON *soit constant. Examiner les cas particuliers où cet angle est droit,* Δ *ayant une position quelconque, et où la droite* Δ *est à l'infini, l'angle considéré ayant une valeur quelconque.*

Prenons pour axe des y une parallèle à la droite Δ menée par le point O et pour axe des x une perpendiculaire abaissée de ce point sur Δ; désignons en outre par a l'abscisse de la droite Δ et par x et y les coordonnées du point M.

L'équation de la tangente à la courbe cherchée au point M est

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

et les coordonnées du point N où elle rencontre la droite Δ sont a et $y + \frac{dy}{dx}(a - x)$; les coefficients angulaires des deux droites OM et ON sont donc $\frac{y}{x}$ et $\frac{y}{a} + \frac{dy}{dx}\frac{a-x}{a}$; par conséquent, en exprimant que la tangente de l'angle de ces deux droites est constante, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{\frac{y}{a} + \frac{dy}{dx}\frac{a-x}{a} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{ax} + \frac{ydy}{xdx}\frac{a-x}{a}} = \frac{1}{k},$$

ou

$$\frac{xydx + x(a-x)dy - aydx}{axdx + y^2dx + y(a-x)dy} = \frac{1}{k}.$$

Posons alors $y = tx$, remplaçons y par cette valeur et dy par $tdx + xdt$, cette équation se simplifie et devient

$$t + \frac{a(1+t^2)dx}{x(a-x)dt} = k;$$

nous pouvons écrire cette équation ainsi

$$\frac{tdt}{1+t^2} + \frac{adx}{x(a-x)} = \frac{kdt}{1+t^2},$$

ou

$$\frac{tdt}{1+t^2} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{a-x} = \frac{kdt}{1+t^2},$$

et sous cette forme elle est immédiatement intégrable. Nous obtenons alors

$$\text{L.C.}\frac{x\sqrt{1+t^2}}{a-x} = k \operatorname{arc\,tg} t,$$

C désignant une constante arbitraire. En remplaçant t par $\frac{y}{x}$, nous avons de suite l'équation générale des courbes C,

$$(1) \qquad \text{L.C.}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a-x} = k \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Si l'on suppose que l'angle donné soit droit, il faut prendre $k = 0$ et l'équation (1) devient alors

$$\text{L.C.}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a-x} = 0, \qquad \text{puis} \qquad \text{C.}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a-x} = 1,$$

et enfin

$$(2) \qquad C^2(x^2+y^2) = (a-x)^2.$$

La courbe cherchée est dans ce cas une conique ayant l'origine pour foyer et la droite Δ pour directrice relative à ce foyer. Ce résultat était évident *a priori;* le calcul actuel apprend seulement qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Si la droite Δ est à l'infini, il faut faire $a = \infty$ dans l'équation différentielle; elle devient alors

$$\frac{tdt}{t+t^2} + \frac{dx}{x} = \frac{kdt}{t+t^2};$$

elle s'intègre immédiatement et donne l'équation générale des courbes cherchées

$$Lx\sqrt{1+t^2} = k \text{ arc tg } t + C,$$

ou

$$L\sqrt{x^2+y^2} = k \text{ arc tg } \frac{y}{x} + C.$$

L'emploi des coordonnées polaires fournit de suite l'équation plus simple

$$L.\rho = k\omega + C,$$

puis

$$(3) \qquad \rho = e^{k\omega + C}.$$

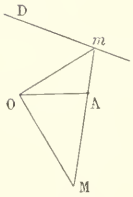
Toutes ces courbes sont donc des spirales logarithmiques égales tant que k reste invariable, et qui varient à la fois de forme et de situation quand k varie.

J.-A. GAUTHIER, pensionnat de Valbenoite.

Bonne solution, mais plus longue : E. MERLIN, à l'université de Gand.

QUESTIONS PROPOSÉES

737. — On considère deux points fixes O, A et une droite D. Soit m un point variable sur D ; on joint m, O et on mène par le point O la perpendiculaire à cette droite; lieu du point de rencontre M de cette perpendiculaire avec la droite Am. Ce lieu est une conique C passant par les points O et A et normale en O à la droite OA. Réciproquement, si on prend une conique C et une corde OA normale en O et qu'on joigne un point M de cette conique aux deux points O et A, le lieu du point de rencontre de AM avec la perpendiculaire menée par le point O à la droite OM est une droite D.



P. LAMAIRE.

738. — On donne deux axes rectangulaires et un point A sur l'axe des x.

Trouver le lieu géométrique des centres des hyperboles équilatères tangentes à l'origine à l'axe des x et dont une asymptote passe par le point A. Lieu des sommets de ces hyperboles.

739. — Une horloge retarde de n secondes par jour. De combien doit-on diminuer la longueur de son pendule pour lui donner une marche exacte ?

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LA FORMULE $e = \lim_{m=\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

(Extrait d'une lettre adressée à M. E. Humbert par M. **H. Padé**.)

La méthode qu'indique M. Méray, dans le numéro de mars 1898 de votre *Revue*, pour établir que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ a une limite pour m infini, n'est pas absolument nouvelle. Elle ne diffère pas sensiblement, par exemple, de celle donnée par M. Cesaro dans son *Corso di Analisi algebrica* (Turin, 1894, p. 109).

D'ailleurs, on peut voir dans le tome V, pp. 19-24, de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* un nombre très respectable de démonstrations plus ou moins analogues de la même proposition, et, parmi elles, celle de M. Cesaro.

Mais il me semble qu'aucune de ces méthodes n'offre, au point de vue de la simplicité, un avantage bien appréciable sur la démonstration suivante, par laquelle se trouve établie, à la fois, et le fait de la convergence et l'expression analytique de la limite.

Pour m entier positif, on a

$$(1)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2\ldots m}.$$

Si l'on considère un terme en particulier de cette expression, on voit qu'il est positif, qu'il croît avec m, et que, pour m infini, il a pour limite le terme de même rang de la série convergente

$$(2)\qquad e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

Quand m croît, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ croît donc, puisque chaque terme croît et qu'il s'ajoute de nouveaux termes positifs, mais reste toujours moindre que e; donc $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers une limite au plus égale à e.

D'ailleurs, cette limite est au moins égale à la limite de la somme des p premiers termes du second membre de (1), c'est-à-dire à la somme des p premiers termes de (2).

La limite étant au plus égale à e, d'une part; au moins égale à la somme des p premiers termes de la série (2), d'autre part, est nécessairement égale à e.

Cette méthode si simple est susceptible d'extension. Par exemple, elle s'appliquerait sans modification à l'expression $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ pour $x>0$; dans le cas de $x<0$, il faudrait décomposer la série de comparaison en deux autres formées respectivement des termes positifs et des termes négatifs. On en peut déduire le développement en *produit infini* de $\sin x$, etc.

Elle a été employée par M. Darboux dans ses leçons à l'École normale vers 1880; reproduite dans les *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* de MM. J. Tannery et Molk (tome I, p. 101) et dans l'*Algèbre élémentaire* de MM. Cor et Riemann (p. 342). Elle mériterait d'être plus généralement adoptée dans le cours de mathématiques spéciales.....

SUR LE THÉORÈME DE JOACHIMSTAL

par M. **J. Paoli.**

L'hyperbole aux pieds des normales menées d'un point à une conique à centre a pour directions asymptotiques les axes de cette conique.

Mais ce n'est pas l'hyperbole la plus générale ayant pour asymptotes des parallèles aux axes de la conique considérée.

Aussi la proposition suivante est-elle plus générale que le théorème de Joachimstal :

Si quatre points d'une conique à centre sont situés sur une hyperbole admettant pour directions asymptotiques les axes de la conique, trois de ces points et le point symétrique du quatrième par rapport au centre de la conique donnée sont sur un même cercle.

Supposons que la conique à centre soit une ellipse, par exemple, et soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation de cette courbe.

Considérons quatre points M, P, Q, R de cette ellipse et soient $y-mx-p=0$ l'équation de la droite MP, $y-m'x-p'=0$ l'équation de QR.

L'équation générale des coniques passant par les quatre points M, P, Q, R est

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+(y-mx-p)(y-m'x-p')=0.$$

Écrivons que cette équation représente une hyperbole ayant pour directions asymptotiques $xy=0$. Nous aurons

$$\frac{\lambda}{a^2}+mm'=0, \qquad \text{et} \qquad \lambda+b^2=0,$$

et, par suite,

$$mm'=\frac{b^2}{a^2}. \tag{1}$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que les points M, P, Q, R soient sur une hyperbole ayant pour directions asymptotiques $xy=0$.

Cela posé, considérons le point R′ symétrique de R par rapport au centre de l'ellipse.

Les droites QR et QR′ sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'ellipse. On a donc

$$m'm''=-\frac{b^2}{a^2}, \tag{2}$$

en désignant par m'' le coefficient angulaire de QR′.

Des égalités (1) et (2) on déduit

$$m+m''=0.$$

Or on sait que c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points M, P, Q, R soient sur un même cercle.

Voici, d'ailleurs, une démonstration géométrique de cette proposition.

Nous commencerons par mettre en évidence une propriété de l'involution déterminée par deux couples de points (e, f) et (g, h) situés sur une même ligne droite, *lorsque ces quatre points forment une division harmonique.*

Prenons à cet effet un point k sur la droite $efgh$ et considérons les deux points k' et k'' définis respectivement par

$$(efkk') = -1 \quad \text{et} \quad (ghkk'') = 1 :$$

Lorsque le point k décrit la droite, le couple (k', k'') décrit l'involution considérée.

En effet, il est évident que le système des points k' et le système des points k'' sont homographiques.

D'autre part, au point g, considéré comme appartenant au premier système, correspond le point h dans le second (il suffit de prendre k en h), et au point g du second système correspond le point h dans le premier (on prend k en g).

De même, au point e considéré comme appartenant à l'un quelconque des deux systèmes correspond le point f dans l'autre. — Il est donc établi que les points (k', k'') décrivent l'involution à laquelle appartiennent les deux couples (e, f) et (g, h).

Cela posé, désignons par e, f les points à l'infini sur la conique C; par g, h les points à l'infini sur les axes de la conique C (les quatre points e, f et g, h forment une division harmonique).

Les points g, h sont, par hypothèse, les points à l'infini sur l'hyperbole H.

Si nous désignons par MP et QR un couple de sécantes communes aux coniques C et H, les points k' et k'' situés à l'infini sur MP et QR forment un couple de points correspondants dans l'involution déterminée par les deux couples (e, f) et (g, h). (Théorème de Desargues.)

Soit R′ le point symétrique de R par rapport au centre de la conique C. Les deux droites QR et QR′ sont parallèles à deux diamètres conjugués de la conique C. Donc le point k à l'infini sur la droite QR′ est conjugué harmonique de k' par rapport aux points e, f.

D'après ce qui précède, le point k est donc conjugué harmonique de k' par rapport aux points g, h, c'est-à-dire que les parallèles aux droites MP et QR′ menées par le centre de C forment avec les axes de cette conique un faisceau harmonique.

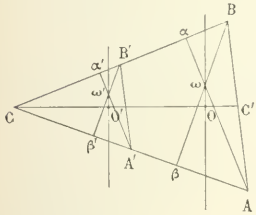
Or on sait que c'est la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points M, P, Q, R soient sur un cercle.

SOLUTION

par **M. G. Lapointe**, professeur au lycée de Douai.

536. — *Construire une hyperbole équilatère connaissant deux tangentes et les points de contact.*

Cette question a été résolue dans le numéro de décembre 1896 de la *Revue*. Nous voulons indiquer une légère modification à la construction du centre de l'hyperbole en question.



Supposons que l'hyperbole doive être tangente en A et B aux deux côtés CA et CB du triangle CAB. On a vu qu'on pouvait construire le centre en prenant le point d'intersection, autre que C′, de la médiane CC′ avec le cercle circonscrit au triangle C′Bα par exemple, α étant le pied de la hauteur du triangle issue de A.

Soit ω l'orthocentre du triangle. Le cercle décrit sur AB comme diamètre passe par α et β ; par suite, ω appartient à la polaire du point C par rapport à ce cercle. De plus, cette polaire doit être perpendiculaire au rayon C′C ; abaissons donc de ω la perpendiculaire ωO sur C′C. Nous avons

$$C'O \times C'C = \overline{CB}^2.$$

relation connue entre le pôle et la polaire; d'où

$$CC'(CC' - CO) = \overline{CB}^2,$$

ou enfin

$$\overline{CC'}^2 - \overline{CB}^2 = CC'.CO.$$

Or, le premier membre est la puissance de C par rapport au cercle décrit sur AB comme diamètre; il est donc égal à $C\alpha \times CB$; par suite,

$$C\alpha \times CB = CC' \times CO.$$

Cette relation montre que les quatre points α, B, C', O sont sur un même cercle. Donc, d'après ce qui a été rappelé, O est le centre cherché de l'hyperbole.

Donc, en résumé, *on obtient le centre de l'hyperbole considérée en projetant l'orthocentre du triangle sur la médiane* CC'.

Remarque. — Considérons la parabole également bitangente en A et B à CA et CB; elle est tangente à la droite AB' qui joint les milieux des deux côtés CA et CB du triangle. Par suite, sa directrice passe par l'orthocentre ω' du triangle CAB' et de plus elle est perpendiculaire à CC', direction de l'axe de cette parabole. En vertu de l'homothétie, cette directrice passe évidemment par le milieu O' de CO. Donc :

Lorsqu'une hyperbole équilatère et une parabole sont bitangentes, la directrice de la parabole passe au milieu de la droite qui joint le centre de l'hyperbole au pôle de la corde de contact commune, et, de plus, est perpendiculaire à cette droite.

Nous avons ainsi établi géométriquement la première partie de la question 647 résolue dans le numéro de mars 98 de la *Revue*.

GÉOMÉTRIE

Remarques sur la question n° 651.

Les courbes construites au n° 651 sont des courbes parallèles à une épicycloïde à deux rebroussements.

Nous allons le montrer analytiquement et géométriquement; puis nous montrerons d'une façon générale que : étant données une courbe C et une courbe S, si l'on prend les symétriques Σ de S par rapport aux tangentes MT de C, l'enveloppe des courbes Σ se confond avec le lieu des pieds des normales abaissées de chaque point M de contact d'une tangente sur la courbe Σ correspondante; et que, de plus, si l'on considère des courbes S' parallèles à S, les lieux correspondants sont parallèles à celui qui correspond à Σ.

1. Soient $X^2 + Y^2 = R^2$ le cercle donné et $X\cos\varphi + Y\sin\varphi - R = 0$ une tangente. Soit $X = a$ la droite D. La droite symétrique par rapport à la tangente est

$$X(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2\sin\varphi\cos\varphi\, Y - 2\cos\varphi\, R + a = 0,$$

ou

$$X\cos 2\varphi + Y\sin 2\varphi - 2R\cos\varphi + a = 0.$$

Soient α et p les coordonnées polaires tangentielles de cette droite; on a

$$\cos 2\varphi = \cos\alpha, \qquad \sin 2\varphi = \sin\alpha, \qquad p = +2R\cos\varphi - a,$$

d'où

$$2\varphi = 2k\pi + \alpha,$$

d'où, enfin,

$$p = +2R\cos\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) - a.$$

L'enveloppe est donc une courbe parallèle à la courbe

$$p = +2R\cos\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right),$$

courbe dans laquelle on reconnaît une épicycloïde à deux rebroussements (voir Papelier, *Coordonnées tangentielles*, p. 59).

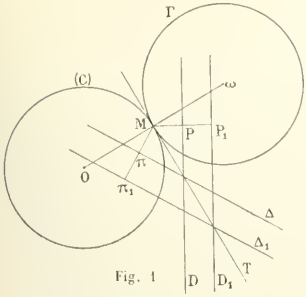


Fig. 1

2. Considérons le cercle C et une droite D (*fig.* 1). Soit MT une tangente au cercle. Prenons les symétriques Δ et Γ de la droite et du cercle par rapport à MT. Lorsque la tangente MT varie, le cercle Γ roule sur le cercle C entraînant avec lui la droite Δ.

Il s'ensuit immédiatement que si l'on cherche l'enveloppe de Δ, le point de contact correspondant à une position est le pied de la perpendiculaire abaissée de M, centre instantané de rotation, sur Δ.

De plus, si nous considérons une seconde droite D_1 parallèle à D à une distance $PP_1 = a$, la perpendiculaire $M\pi$ sur Δ est perpendiculaire sur Δ_1 et $\pi\pi_1 = PP_1$. L'enveloppe de Δ_1 est une courbe parallèle à celle de Δ, l'augment $\pi\pi_1$ étant égal à la distance PP_1 des deux droites.

Enfin, si la droite D passe par le centre de C (*fig.* 2), la droite Δ passe par le centre ω de Γ. Le point π se trouve sur la circonférence de rayon $\frac{R}{2}$ décrite sur ωM comme diamètre. Alors, comme les angles IOM et πωM sont égaux, il s'ensuit que les arcs IM, πM sont égaux. Le point π est un point du cercle de rayon $\frac{R}{2}$ roulant sur le cercle de rayon R, le lieu du point π est une épicycloïde à deux rebroussements.

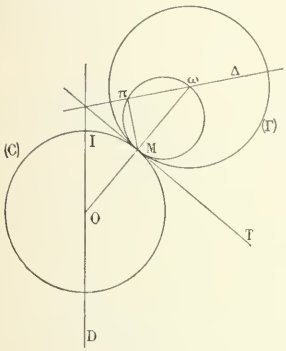


Fig. 2

On voit que quand la droite D se déplace parallèlement à elle-même, depuis la position de diamètre du cercle jusqu'à l'infini, on a d'abord une épicycloïde à deux rebroussements, puis les courbes construites au n° 651 dans l'ordre 4, 6, 1, 2, 3, 7. Enfin, comme nous le verrons dans la suite, la courbe tend vers la forme d'un limaçon de Pascal qui serait le lieu des symétriques d'un point à l'infini par rapport aux tangentes du cercle.

Généralisation. — Soient une courbe C et une courbe S (*fig.* 3). Considérons une tangente MT à C et prenons les symétriques de C et S, Γ et Σ par rapport à cette tangente. On voit comme précédemment que le mouvement est épicycloïdal et les points de contact de Σ avec son enveloppe sont les pieds des normales abaissées du point M, centre instantané de rotation, sur Σ.

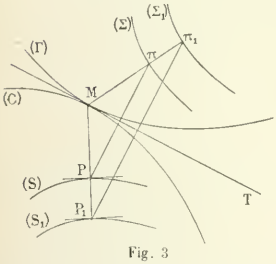


Fig. 3

De plus, si nous considérons une courbe S_1 parallèle à S et une normale MPP_1, la normale $M\pi\pi_1$ est symétrique ; on a $PP_1 = \pi\pi_1$. Le lieu des points π_1 est parallèle au lieu des points π.

Cas particuliers. — Si la courbe S est un cercle de centre A, l'enveloppe des courbes Σ sera une courbe parallèle au lieu des points α symétriques de A par rapport aux tangentes. Or ce lieu est homothétique dans le rapport 2, de la podaire de la courbe C par rapport au point A.

Si la courbe C est un cercle, le lieu sera une courbe parallèle à un limaçon de Pascal.

Si le centre A du cercle S s'éloigne à l'infini, on retombe dans le cas de la droite D et on voit que les courbes trouvées sont parallèles au limaçon de Pascal situé à l'infini, lieu des symétriques de A par rapport aux tangentes du cercle C.

G. LE SOURD (Collège Stanislas.)

---

670. — *On donne une conique* S, *deux points* B *et* C *de cette conique et un point* A *de son plan ; on considère la conique variable* Γ *passant par* B *et* C, *tangente à la conique* S *en un point variable* M, *et telle que* AQ, AQ′ *étant les tangentes issues du point* A, *le rapport anharmonique du faisceau* A(B, C, Q, Q′) *ait une valeur donnée. Trouver :*

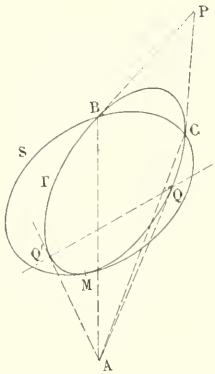
1° *Le lieu du pôle* P *de* BC *par rapport à* Γ ;

2° *Le lieu des points* Q *et* Q′ *où les droites* AQ *et* AQ′ *touchent* Γ ;

3° *Les enveloppes des droites* QQ′, PQ *et* PQ′.

Voir ce que deviennent ces diverses courbes quand le point A *est sur la conique* S.

Solution géométrique. — Le problème proposé est le transformé par homographie du problème suivant : *on considère un cercle variable tangent à un cercle fixe et vu d'un point fixe* A *sous un angle constant; trouver :* 1° *le lieu du centre de ce cercle ;* 2° *le lieu des points de contact avec ce cercle des tangentes issues du point* A ; 3° *les enveloppes de la corde des contacts et des rayons aboutissant en ces points.* Il suffit, pour le voir, d'effectuer sur la figure indiquée dans l'énoncé une transformation homographique par laquelle les points B et C deviennent les points cycliques du plan.



1. Si nous désignons alors par 2θ l'angle constant, par a la longueur OA, par R et ρ les rayons des deux cercles, nous avons $O\omega - \rho = R$, puis $\rho = A\omega \sin\theta$; par suite,

$$O\omega - A\omega \sin\theta = R ;$$

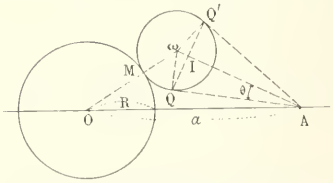
c'est l'équation, en coordonnées bipolaires, d'un ovale de Descartes.

En supposant le contact intérieur, on a la même courbe, car l'équation

$$O\omega + A\omega \sin\theta = R$$

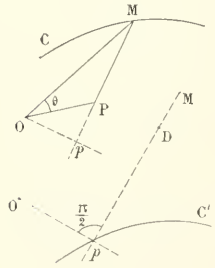
conduit à la même équation cartésienne que la précédente.

2. Le triangle AωQ se déplace en restant semblable à lui-même ; on a donc $\frac{AQ}{A\omega} = c^{te}$ et le lieu du point Q s'obtient en prenant l'homothétique du premier lieu par rapport au point A dans le rapport $\frac{AQ}{A\omega}$ et en faisant tourner ce nouvel ovale, autour de A, d'un angle θ, dans un sens ou dans l'autre ; on obtient ainsi deux ovales qui sont les lieux respectifs des points Q et Q′. Le point A est un foyer commun aux trois ovales dont nous venons de nous occuper ; le point O est aussi foyer du premier ovale.



En revenant au premier problème, nous voyons que le lieu de P est une quartique ; les lieux de Q et Q′ sont deux quartiques, ces trois courbes ayant pour points de rebroussement les points B et C et étant toutes tangentes en d'autres points aux droites AB et AC. La première est en outre tangente aux deux droites PB et PC.

3. Pour traiter la troisième partie, nous utiliserons la remarque suivante : considérons un triangle OMP qui se déplace en restant semblable à un triangle fixe, dont l'un des sommets, O, est fixe, pendant qu'un autre sommet, M, décrit une courbe donnée, C ; le troisième sommet, P, décrit une courbe semblable à C et il en est de même du lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur le côté MP, du point p. Soit C′ cette dernière courbe ; elle est la podaire de l'enveloppe de MP, et, par suite, celle-ci est la podaire négative de la courbe C′. Il est facile de voir que si m est le degré de C, c'est-à-dire de C′, $2m$ est, en général, la classe de la podaire négative. En effet, cherchons combien on peut mener de tangentes à cette courbe par un point D ; il y en aura autant que de points de rencontre de C′ avec le cercle décrit sur OD comme diamètre, puisque l'angle DpO doit être droit, donc, en général, $2m$. Il n'en est pas ainsi, si la courbe C′ est cyclique, car alors le nombre des points de rencontre ordinaires de C′ avec un cercle s'abaisse. Nous



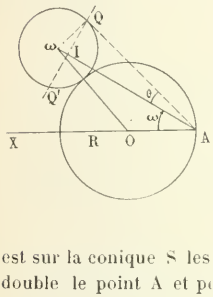
montrerions de même que si une courbe est de classe n et qu'elle soit enveloppée par le côté MP, les trois points M, P, p décrivent, en général, des courbes d'ordre $2n$ semblables entre elles. Si l'enveloppe est tangente à la droite de l'infini, le degré s'abaisse ; il s'abaisse encore quand la courbe est tangente aux droites isotropes issues de O.

Dans le cas actuel, l'enveloppe de QQ′ est la podaire négative du lieu du milieu I de QQ′ ; or celui-ci est un ovale homothétique au lieu de ω ; d'autre part, l'ovale de Descartes est une courbe bicirculaire : la classe de la podaire négative perd donc 4 unités, et l'enveloppe de QQ′ est une courbe de quatrième classe. Comme sa podaire n'est que du quatrième ordre et que QQ′ n'est jamais à l'infini, la podaire totale renferme deux fois les droites isotropes issues du point A ; par conséquent, l'enveloppe de QQ′ est bitangente à chacune de ces deux droites ; elle passe en outre aux points cycliques, puisque sa podaire les admet comme points de rebroussement.

Les mêmes choses se répètent pour les enveloppes des droites ωQ et ωQ′.

Donc, dans le premier problème, les enveloppes des droites correspondantes sont trois courbes de quatrième classe ayant pour tangentes doubles les droites AB et AC, et passant aux points B et C.

4. Examinons maintenant le cas où le point A est sur la conique S, c'est-à-dire, dans le second problème, sur le cercle fixe. Le triangle ωOA nous donne alors



$$\overline{\omega O}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{A\omega}^2 - 2OA.A\omega \cos\omega,$$

c'est-à-dire, en posant $A\omega = \rho$,

$$(R + \rho \sin\theta)^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos\omega ;$$

nous déduisons de là $\rho \cos^2\theta = 2R \cos\omega + 2R \sin\theta$. Le lieu du point ω est donc un limaçon de Pascal ayant pour point double le point A et pour axe de symétrie la droite OA. Les autres lieux trouvés au début, ainsi que le lieu du point I sont donc aussi des limaçons de Pascal ayant pour point double le point A, et leurs podaires négatives relatives à ce point sont des cercles.

Donc, en revenant au premier problème, on voit que quand le point A est sur la conique S les lieux des points P, Q et Q′ sont trois quartiques unicursales ayant pour point double le point A et pour points de rebroussement les points B et C, et que les enveloppes des droites QQ′, PQ et PQ′ sont des coniques passant aux points B et C.

VASNIER.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

671. — *Trouver l'équation générale des cubiques qui ont pour asymptote double l'axe des y et pour asymptote simple la bissectrice de l'angle des axes, $y = x$, telles en outre que les trois points de rencontre de cette cubique avec l'hyperbole $xy = a^2$ soient sur un cercle qui passe au point $(a, 0)$. Trouver :*

1° *Le lieu du centre de ce cercle ;*

2° *L'enveloppe des cubiques du système ;*

3° *Le lieu de leur point d'inflexion.*

L'équation générale des cubiques ayant pour direction asymptotique double $x = 0$ et pour direction asymptotique simple $x - y = 0$ est

$$x^2(x - y) + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

si nous exprimons maintenant que cette équation est du premier degré en y, que le coefficient de y se réduit à x^2 et que la droite $x - y = 0$ coupe la cubique en deux points à l'infini, nous obtenons faci-

lement une équation de la forme

$$x^2(x-y)+2\mu x+\lambda=0.$$

Reste à exprimer la dernière condition que les trois points de rencontre situés à distance finie de cette cubique avec l'hyperbole $xy=a^2$ sont sur un cercle qui passe au point $(a, 0)$. Pour cela, remplaçons dans l'équation de la cubique xy par a^2: nous aurons l'équation

$$x^2+(2\mu-a^2)x+\lambda=0;$$

multiplions-la par y et remplaçons dans le produit xy par a^2, nous aurons la nouvelle équation

$$a^2x^2+\lambda y+(2\mu-a^2)a^2=0;$$

multiplions encore celle-ci par y et remplaçons de nouveau xy par a^2, nous aurons aussi

$$\lambda y^2+a^4x+(2\mu-a^2)a^2y=0.$$

Les deux dernières équations, divisées respectivement par a^2 et λ et combinées par voie d'addition, donnent finalement l'équation du cercle qui passe aux trois points envisagés,

$$x^2+y^2+\frac{a^4}{\lambda}x+\left[\frac{\lambda}{a^2}+(2\mu-a^2)\frac{a^2}{\lambda}\right]y+2\mu-a^2=0.$$

En exprimant qu'il passe au point $(a, 0)$, nous avons la relation $2\mu=-\frac{a^5}{\lambda}$; par conséquent, l'équation de la cubique à considérer est

$$(1)\qquad x^2(x-y)-\frac{a^5}{\lambda}x+\lambda=0.$$

1. Le lieu du centre du cercle trouvé antérieurement s'obtient en éliminant λ entre les deux équations

$$2x+\frac{a^4}{\lambda}=0,\qquad 2y+\frac{\lambda}{a^2}-\frac{a^4}{\lambda}\left(1+\frac{a^3}{\lambda}\right)=0;$$

nous avons ainsi immédiatement

$$(2)\qquad 2y=\frac{a^2}{2x}+2x\left(\frac{2x}{a}-1\right).$$

Le lieu est donc une cubique ayant un point double à l'infini sur Oy.

Pour construire cette courbe, nous supposerons $a>0$, ce qui est toujours permis; puis, dans cette hypothèse, nous étudierons le signe de la dérivée de $2y$; nous obtenons ainsi

$$-\frac{a^2}{2x^2}+\frac{8x}{a}-2$$

et nous sommes conduit à chercher les racines de l'équation

$$\frac{16x^3}{a}-4x^2-a^2=0.$$

D'après le théorème de Descartes, cette équation n'a pas de racine négative; elle a une racine positive et une seule; il est visible que cette racine est $\frac{a}{2}$. Alors de $-\infty$ à $\frac{a}{2}$ la dérivée est négative; de $\frac{a}{2}$ à $+\infty$, elle est positive; y décroît dans le premier intervalle et croît dans le second; y décroît de $+\infty$ à $-\infty$, quand x croît de $-\infty$ à 0, il décroît de $+\infty$ à $\frac{a}{2}$, quand x croît de 0 à $\frac{a}{2}$, enfin il croît de $\frac{a}{2}$ à $+\infty$, quand x croît de $\frac{a}{2}$ à $+\infty$. La forme de la courbe est dès lors évidente (*fig.* 1).

2. L'enveloppe de la cubique variable est immédiate et s'obtient en écrivant que l'équation (1),

regardée comme étant du second degré en λ, a une racine double. On trouve ainsi

$$x^3(x-y)^2+4a^5=0. \tag{3}$$

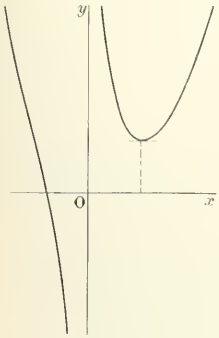


Fig. 1

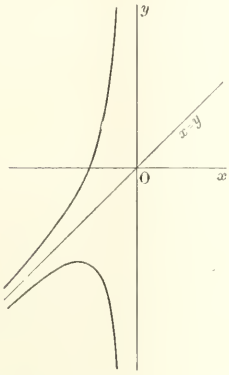


Fig. 2

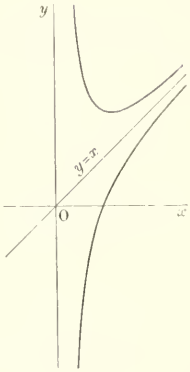


Fig. 3

Cette enveloppe est une quintique qui se construit immédiatement (*fig.* 2) en mettant y sous la forme

$$y=x\pm 2\sqrt{-\frac{a^5}{x^4}}.$$

3. Nous aurons l'abscisse du point d'inflexion en résolvant l'équation (1) par rapport à y, et annulant la dérivée seconde de y par rapport à x; nous avons ainsi successivement

$$y=x-\frac{a^5}{\lambda x}+\frac{\lambda}{x^2},\qquad y'=1+\frac{a^5}{\lambda x^2}-\frac{2\lambda}{x^3},\qquad y''=\frac{-2a^5}{\lambda x^3}+\frac{6\lambda}{x^4}.$$

L'abscisse du point d'inflexion est donc fournie par l'équation $3\lambda^2=a^5x$, et il n'y a plus qu'à éliminer λ entre cette équation et l'équation (1). Comme cette dernière s'écrit

$$\lambda^2+\lambda x^2(x-y)-a^5x=0,$$

nous obtenons d'abord $\lambda=\dfrac{2a^5}{3x(x-y)}$, puis, finalement,

$$3x^3(x-y)^2-4a^5=0. \tag{4}$$

C'est une quintique analogue à la précédente et qui se construit de la même manière (*fig.* 3).

J. LHÉRIAUD (lycée Louis-le-Grand).

---

672. — *Si l'on considère deux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à la fois à une conique et à une parabole ayant pour foyer le centre de cette conique, l'un de ces points et le symétrique de l'autre par rapport à l'axe non focal de la conique sont inverses par rapport au cercle concentrique à la conique qui passe par ses foyers.*

Supposons que la conique donnée soit une ellipse, et prenons ses axes pour axes de coordonnées; son équation tangentielle est $a^2u^2+b^2v^2-w^2=0$.

D'autre part, l'équation tangentielle d'une parabole ayant pour foyer l'origine peut s'écrire

$$u^2+v^2+2Duw+2Evw=0.$$

L'ensemble de deux sommets opposés au quadrilatère circonscrit à ces deux courbes forme une conique particulière du faisceau tangentiel

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 + \lambda(u^2 + v^2 + 2Duw + 2Evw) = 0.$$

Si nous désignons par (α, β) et (α', β') les coordonnées de ces deux points, nous aurons, pour une valeur convenable de λ, l'identité

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 + \lambda(u^2 + v^2 + 2Duw + 2Evw) \equiv -(\alpha u + \beta v + w)(\alpha' u + \beta' v + w).$$

Nous en déduisons

$$a^2 + \lambda = -\alpha\alpha', \qquad b^2 + \lambda = -\beta\beta' \qquad 0 = \alpha\beta' + \beta\alpha';$$

ou

$$\alpha\alpha' - \beta\beta' + c^2 = 0, \qquad \alpha\beta' + \beta\alpha' = 0.$$

Le symétrique du point (α', β') par rapport à l'axe non focal de l'ellipse a pour coordonnées $\alpha_1 = -\alpha'$, $\beta_1 = \beta'$; les égalités précédentes peuvent s'écrire

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 - c^2 = 0, \qquad \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = 0.$$

On voit ainsi que les deux points (α, β) et (α_1, β_1) sont situés sur une même droite passant par l'origine, et que chacun d'eux est sur la polaire de l'autre par rapport au cercle $x^2 + y^2 - c^2 = 0$.

La proposition est établie.

BUNEL, lycée de Rennes.

Autre solution par M. Victor BERTRAND.

---

678. — 1° *Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on donne une droite* (D) *dont l'équation est*

$$y = ax + b.$$

Déterminer la parabole qui a son sommet en O, *son axe dirigé suivant* Ox *et qui est normale à la droite* (D); *calculer en fonction de* a *et* b *les coordonnées du point* P *où cette parabole est normale à la droite* D *et du second point* Q *où elle rencontre cette même droite.*

2° *Trouver les lieux décrits par les points* P *et* Q *en supposant que la droite* (D) *tourne autour d'un point fixe, de coordonnées* x_0, y_0.

On figurera les diverses formes que peut affecter ce dernier lieu.

(*Bourses de licence, 1897.*)

1. L'équation de la parabole considérée est $y^2 - 2px = 0$, p étant une certaine constante. Si l'on appelle α et β les coordonnées du pied de la normale considérée, on a, pour équation de cette droite, $\frac{x-\alpha}{p} + \frac{y-\beta}{\beta} = 0$ ou $\beta(x-\alpha) + p(y-\beta) = 0$, avec la relation $\beta^2 - 2p\alpha = 0$. En identifiant cette équation avec l'équation $y = ax + b$, on a deux nouvelles relations entre α, β et p; par suite, entre ces trois nombres, on a, en définitive, les relations suivantes

$$\beta^2 - 2p\alpha = 0, \qquad \beta + ap = 0, \qquad \alpha\beta + p(\beta - b) = 0.$$

La seconde donne β en fonction de p, $\beta = -ap$; la première donne α, $\alpha = \frac{a^2p}{2}$; et, en portant ces valeurs dans la dernière, on obtient p, $p = \frac{-2b}{a^3 + 2a}$.

L'équation de la parabole indiquée est donc

$$(1) \qquad y^2 + \frac{4b}{a^2 + 2a}\, x = 0.$$

Les coordonnées du point P sont

$$(2) \qquad x = \frac{-ab}{a^2+2}, \qquad y = \frac{2b}{a^2+2}.$$

Pour avoir les coordonnées du second point, Q, où la droite rencontre la parabole il faut former d'abord l'équation aux abscisses des points de rencontre de la droite (D) avec la parabole (1), puis calculer la racine autre que $\frac{-ab}{a^2+2}$ et en déduire la valeur de y. L'équation aux abscisses est

$$(ax+b)^2 + \frac{4bx}{a(a^2+2)} = 0;$$

elle admet pour racine $x = \frac{-ab}{a^2+2}$; l'autre est $\frac{-b(a^2+2)}{a^2}$, et la valeur correspondante de y est $y = -\frac{2b}{a^2}$. Les coordonnées du point Q sont donc

$$(3) \qquad x = -\frac{b(a^2+2)}{a^2}, \qquad y = -\frac{2b}{a^2}.$$

2. Exprimons maintenant que la droite (D) passe par le point fixe (x_0, y_0); nous aurons, entre a et b, la relation $y_0 = ax_0 + b$; nous en tirerons b en fonction de a, et nous aurons les lieux de P et de Q par les coordonnées d'un point mobile sur chacun d'eux exprimées à l'aide d'un paramètre variable a. Nous trouvons ainsi

$$(4) \qquad x = \frac{a(ax_0 - y_0)}{a^2+2}, \qquad y = \frac{2(y_0 - ax_0)}{a^2+2};$$

$$(5) \qquad x = \frac{(a^2+2)(ax_0 - y_0)}{a^2}, \qquad y = \frac{2(ax_0 - y_0)}{a^2}.$$

Les équations (4) représentent une ellipse dont l'équation cartésienne est

$$2x^2 + y^2 = 2xx_0 + yy_0;$$

cette courbe a ses axes parallèles aux axes de coordonnées; elle a pour centre le point $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ et passe à l'origine des coordonnées; elle est donc facile à placer.

Les équations (5) représentent une cubique dont on obtient aisément l'équation cartésienne par l'élimination de a; cette équation est

$$y(y-y_0)^2 - 2(x-x_0)(x_0y - y_0x) = 0;$$

elle montre que la courbe passe à l'origine, admet le point (x_0, y_0) comme point double et a pour direction asymptotique triple l'axe des x; les branches correspondantes sont paraboliques. Si on porte les axes parallèlement à eux-mêmes au point (x_0, y_0), on obtient l'équation

$$y^2(y+y_0) - 2x(x_0y - y_0x) = 0,$$

sur laquelle on aperçoit de suite les tangentes au point double; ces droites sont réelles si l'on a $x_0^2 - 2y_0^2 \geqslant 0$, imaginaires dans le cas contraire. Par conséquent le point double est un point double ordinaire, si le point (x_0, y_0) est dans l'un des angles formés par ces deux droites et traversés par Ox; c'est un point isolé, si le point (x_0, y_0) est dans l'un des deux autres angles. Enfin, si l'on change le signe de x_0, le terme du premier degré en x change seul de signe, et l'on obtient une courbe symétrique de celle-ci par rapport à l'axe des y; si l'on change les signes de x_0 et de y_0 en même temps, on obtient une courbe symétrique de la première par rapport à la nouvelle origine, $A(x_0, y_0)$. Il suffira donc d'étudier les positions du point A pour lesquelles x_0 et y_0 sont positifs.

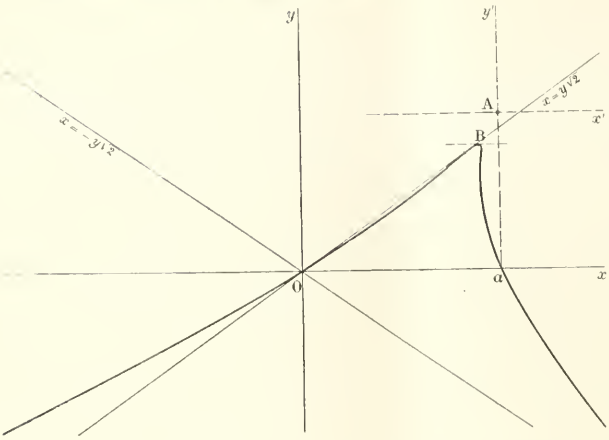


Fig. 1

Supposons alors A dans l'angle xOy et dans la portion formée par Oy et la droite $x = y\sqrt{2}$. La nouvelle équation ordonnée par rapport à x' est

$$2y_0x'^2 - 2x_0x'y' + y'^2(y' + y_0) = 0;$$

elle est du second degré en x' et n'a de racines réelles que si $y' < \frac{x_0^2 - 2y_0^2}{2y_0}$. Cette quantité est négative et plus grande que $-y_0$; la parallèle à Ox tangente à la courbe est donc comprise entre l'ancien axe des x et le nouveau. Enfin remarquons que l'ancien axe des x coupe la courbe au point a d'abscisse x_0, que l'ancien axe des y ne les rencontre en aucun autre point que l'origine, que les signes des valeurs de x' sont dès lors évidents ; nous pouvons tracer la courbe sans difficulté (*fig.* 1).

Supposons maintenant A dans l'autre portion de l'angle xOy. Ce point est alors un vrai point double. En s'appuyant encore sur les remarques précédentes, en tenant compte de ce fait que la tangente parallèle à Ox est alors au-dessus du nouvel axe des x, la discussion de l'équation du second degré s'achève facilement, les signes des valeurs de x' se reconnaissent sans peine et l'on peut tracer la courbe (*fig.* 2).

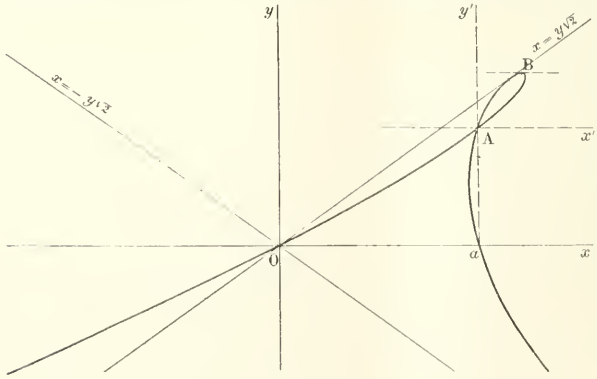


Fig. 2

Quand le point A est sur la droite $x = y\sqrt{2}$ les deux tangentes en ce point sont confondues, et la courbe a un point de rebroussement en ce point. La construction de cette courbe ne présente aucune difficulté particulière. Il y a encore un point de rebroussement et, de plus, une symétrie par rapport à Oy, quand le point A est sur l'axe des y $(x_0 = 0)$. S'il est sur Ox $(y_0 = 0)$ la courbe se décompose en une parabole qui passe au point A et la parallèle à Ox menée par ce point.

F. PÉGORIER, à Cette.

Solution de M. G. Rouzier, à Rochechouart.

PHYSIQUE

654. — *On suppose que, dans l'appareil employé par Regnault pour étudier la dilatation des gaz à volume constant, le gaz, au lieu d'être sec, soit au contact d'une petite quantité d'eau. Comment devra-t-on écrire l'équation qui permettra de calculer le coefficient de dilatation du gaz ?*

Quelle sera la différence entre les poids d'eau subsistant à l'état liquide dans les deux opérations à 0° et à T° ?

Quelle valeur trouverait-on pour le coefficient de dilatation si on le calculait sans tenir compte de l'eau, les données numériques étant les suivantes :

Espace nuisible, négligeable, — $T = 100°$, — *pression atmosphérique,* 760^{mm}, — *tension maxima de la vapeur d'eau à* 0°, $4^{mm},6$, — *tension maxima à la température ambiante.* $12^{mm},7$, — *coefficient de dilatation linéaire du verre,* 0,000008, — *coefficient de dilatation exact du gaz,* 0,003663 ?

Dans l'expérience à 0°, l'excès d'eau est, en vertu du principe de la paroi froide, condensé dans le ballon, la pression de la vapeur d'eau est partout égale à F_0 et, par conséquent, la pression du gaz égale à $H - F_0$.

Dans l'expérience à T°, l'excès d'eau est, pour la même raison, condensé dans l'espace nuisible, la pression de la vapeur d'eau est partout égale à la tension maxima F qui correspond à la température de l'espace nuisible ; enfin, si h désigne l'accroissement de la pression totale, la pression du gaz est égale à $H + h - F$.

Soit α le coefficient de dilatation du gaz à pression constante et β le coefficient de dilatation à volume constant ; celui-ci sera donné par l'équation

$$(1) \qquad \left(V_0 + \frac{u}{1+\alpha t}\right)(H - F_0) = \left[V_0(1+kT) + u\,\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t'}\right]\frac{H+h-F}{1+\beta T}.$$

L'application de la formule connue qui donne le poids d'un volume déterminé de vapeur de densité donnée à une température et sous une pression données, permettra de calculer facilement le poids de vapeur contenue dans le ballon et dans l'espace nuisible. C'est, dans l'expérience à 0°,

$$\left(V_0 + \frac{u}{1+\alpha t}\right)\frac{F_0}{760}\,d \times 0{,}001293,$$

et, dans l'expérience à T°,

$$\left[\frac{V_0(1+kT)}{1+\alpha T} + \frac{u}{1+\alpha t'}\right]\frac{F}{760}\,d \times 0{,}001293.$$

La différence entre ces deux poids représentera, au signe près, la différence entre les poids d'eau subsistant à l'état liquide.

Si on néglige l'espace nuisible, l'équation en β devient

$$(2) \qquad 1 + \beta T = (1 + kT)\,\frac{H+h-F}{H-F_0},$$

et le coefficient β', calculé sans tenir compte de l'eau, est donné par

$$(3) \qquad 1 + \beta T = (1 + kT)\,\frac{H+h}{H}.$$

En introduisant les données numériques dans l'équation (2) et remarquant que le coefficient de dilatation cubique, k, du verre est égal au triple du coefficient de dilatation linéaire, on trouve

$$h = 282^{mm},5.$$

En portant cette valeur dans l'équation (3), on trouve

$$\beta' = 0{,}00375.$$

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1897)

Mathématiques (*suite.*)

200. — On considère des quadriques homofocales. Démontrer que les axes des cônes circonscrits ayant pour sommet un point donné coïncident avec les normales aux trois surfaces homofocales qui passent au point.

201. — L'orthocentre d'un tétraèdre à arêtes orthogonales inscrit dans une cubique gauche équilatère est situé sur la courbe.

202. — Fonction primitive de $(x-a)^m(x-b)^p$.

203. — Démontrer que par un point d'une ellipse passent trois cercles osculateurs à l'ellipse.

204. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. On réduit un système de forces à une force située dans le plan xoz, appliquée le long de la droite $z=\lambda$, et de grandeur variable, et à un couple dont le moment est un vecteur fixe du plan des xy. On peut passer de cette réduction à une autre où le moment du couple est perpendiculaire à la force. Lieu de ce moment.

205. — On considère une famille de quadriques homofocales et une famille de plans qui passent par une droite fixe D. Trouver la surface lieu des pôles des plans par rapport aux quadriques. Quand se réduit-elle à un plan P? Trouver alors le nombre de droites D qui correspondent à un plan Q donné.

206. — On donne l'équation $x^2+px+q=0$; on fait sur cette équation la transformation $x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}$. Conditions pour qu'on retrouve la même équation. Interprétation.

207. — On considère deux polynomes, et l'on suppose que les coefficients de chacun d'eux sont premiers dans leur ensemble. Montrer que le produit des deux polynomes jouit de la même propriété.

208. — Une cubique gauche et une droite définissent-elles une quadrique ?

209. — On donne l'équation d'une conique (C)

(1) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2-2y=0$$

et l'équation d'une courbe (Γ)

(2) $$y=P_n(x),$$

P_n étant un polynome entier de degré n. On porte la valeur de y tirée de (2) dans (1). On obtient une équation de degré $2n$ en x. Montrer que l'on peut déterminer les coefficients de P_n de façon que l'équation en x commence au terme x^{n+1}. Que présente alors de particulier l'intersection de deux courbes ?

210. — On donne l'équation d'une courbe de degré m

(C) $$f(xyz)=0.$$

On forme le Hessien $$F(xyz)=0.$$

On suppose que f divise F. Que représente alors $f(xyz)=0$? Montrer que (C) se compose de m droites.

211. — Définition des cônes supplémentaires. Montrer leur réciprocité en général et le prouver par le calcul pour des cônes du 2e ordre. Démontrer géométriquement et par le calcul les propriétés suivantes : ces deux cônes ont mêmes plans principaux. Les lignes focales de l'un sont perpendiculaires aux plans cycliques de l'autre. Ils se coupent suivant quatre droites à la fois réelles ou imaginaires. Leurs sections par un plan sont polaires réciproques.

212. — Lieu des points d'où l'on voit deux segments sous des angles égaux. On trouve une cubique circulaire. — Le prévoir géométriquement, et trouver la direction asymptotique réelle.

213. — On donne l'équation $x^3+px+q=0$. On pose $x=\frac{\alpha X+\beta}{\alpha' X+\beta'}$. Montrer que l'équation en X peut être ramenée à la forme $Ax^3+B=0$. — Discuter le problème.

214. — On donne la cubique gauche représentée par les équations

$$x=\frac{1}{t-a},\qquad y=\frac{1}{t-b},\qquad z=\frac{1}{t-c}.$$

On prend quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sur cette cubique. Montrer que si les deux droites M_1M_2, M_3M_4 sont rectangulaires, il en est de même des deux couples M_1M_3, M_2M_4, M_1M_4, M_2M_3. On obtient ainsi un tétraèdre orthocentrique inscrit dans la cubique. — Prouver que l'orthocentre est sur la courbe. — Montrer que si un tétraèdre est orthocentrique les arêtes opposées sont rectangulaires et réciproquement. — Si dans un tétraèdre deux couples d'arêtes opposées sont rectangulaires, les arêtes formant le troisième couple sont aussi rectangulaires. — Un tétraèdre orthocentrique est conjugué par rapport à une certaine sphère.

215. — On considère les ellipsoïdes homofocaux

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\ldots\ldots+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1=0$$

et les cônes circonscrits de sommet P. Par P passent trois surfaces (1). Trouver l'équation d'un cone précédent quand on prend pour plans de coordonnées les trois plans tangents aux trois surfaces indiquées. — En déduire que tous ces cônes ont mêmes plans principaux. — Le démontrer directement par la géométrie, en prouvant que tous ces cônes sont homofocaux. (Séries alternées.)

216. — Trouver le foyer, le sommet, l'axe, la directrice d'une parabole inscrite dans un quadrilatère.

217. — *Physique.* — Densité des vapeurs. — Réfraction à travers une surface plane. — Equation différentielle de la surface libre d'un liquide, en tenant compte de la capillarité. — Achromatisme des prismes et des lentilles. — Microscope. — Lunette astronomique. — Oculaires composés. — Pendule, mesure de g. — Balance de précision. — Chaleur spécifique des gaz. — Etude de la réfraction à travers une surface sphérique. — Mener le calcul de manière à mettre en évidence la grandeur des aberrations.

QUESTIONS PROPOSÉES

740. — On donne un ellipsoïde (E) de centre O et un point P, et on considère les quadriques (Q) qui coupent l'ellipsoïde suivant des coniques situées dans le plan polaire de P par rapport à (E), et dans un plan (H) contenant OP.

1° Lorsque le plan (H) tourne autour de OP, les plans polaires d'un point M par rapport aux quadriques (Q) passent par un point fixe M′ du plan OPM. Lieu des points M pour lesquels les trois points P, M, M′ sont en ligne droite. Dans quel cas peut-on échanger les points P et M l'un dans l'autre sans modifier la position de M′?

2° Le point P étant fixe, le lieu des points M et M′ tels que la droite MM′ s'appuie sur une droite donnée (Δ) est une surface (Σ) du 3e ordre, qui contient (Δ) et qui passe par 2 coniques ne dépendant pas de la position de (Δ). Le lieu des centres des coniques d'intersection de (Σ) par les plans passant par (Δ) est une cubique gauche.

3° Lorsque le point M′ se déplace dans un plan (K) et que l'un des points P et M est fixe, l'autre décrit une quadrique. Pour quelles positions du plan (K) cette quadrique est-elle homothétique à l'ellipsoïde (E)?

4° On suppose que M′ décrive le plan (K), et que les points P et M varient en restant conjugués par rapport à l'ellipsoïde (E). Dans ces conditions, le lieu des droites PM qui passent par un point est un cône du second ordre. L'enveloppe des droites PM contenues dans un plan (L) est une conique, dont le centre décrit une droite lorsque le plan se déplace en restant parallèle à un plan fixe.

5° Le point P étant supposé fixe, discuter la nature des quadriques lieux de M suivant les différentes positions du plan (K).

VASNIER.

741. — On considère une hypocycloïde à trois rebroussements A, B, C. Soit un point L de cette courbe; la tangente en L la rencontre en deux autres points M et N. Les tangentes en M et N à la courbe se coupent orthogonalement en un point G; soit G′ le pied de la perpendiculaire abaissée de G sur la tangente MLN.

1° MG′ = LN.

2° Les normales en M, L, N, à la courbe se coupent en un point du cercle circonscrit au triangle ABC.

J. MERLIN.

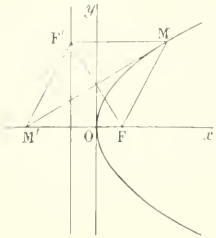
DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

659. — *La tangente en un point* M *d'une parabole rencontre l'axe de cette courbe en un point* M′; *soit* F′ *le symétrique du foyer* F *par rapport à la droite* MM′.

On demande de trouver et de construire les lieux des centres des cercles circonscrits aux triangles MFF′, M′FF′, MM′F, MM′F′.

Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole. La tangente au point $M(\alpha, \beta)$ rencontre Ox en un point M' dont l'abscisse est $-\alpha$; le point F' est sur la directrice, et la droite MF' est parallèle à l'axe de la parabole.



Il en résulte que la figure $FMF'M'$ est un losange dont les diagonales sont MM' et FF'.

1. Le centre du cercle circonscrit au triangle MFF' est situé sur la tangente MM' et sur la perpendiculaire élevée à MF' en son milieu; le lieu de ce point sera donc obtenu en éliminant α, β entre les équations

$$\beta^2 - 2p\alpha = 0, \quad \beta y - p(x + \alpha) = 0, \quad x = \frac{\alpha - \frac{p}{2}}{2}.$$

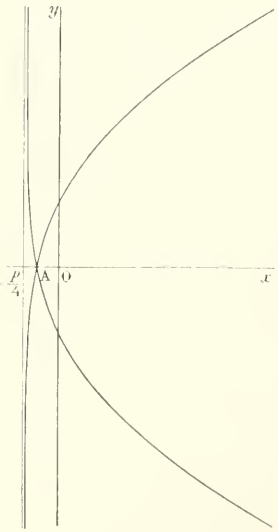
Des deux dernières, on déduit $\alpha = \dfrac{4x + p}{2}$, $\beta = \dfrac{p(6x + p)}{2y}$, et en remplaçant α et β par ces valeurs dans la première, on a

$$4y^2(4x + p) - p(6x + p)^2 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du troisième degré symétrique par rapport à Ox, qu'il est aisé de construire en résolvant l'équation par rapport à y^2,

$$y^2 = \frac{p(6x + p)^2}{4(4x + p)}.$$

Pour que y soit réel, il faut que x soit plus grand que $-\dfrac{p}{4}$. A toute valeur de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires. Nous construirons la portion de cette courbe dont les points ont des ordonnées positives.



En prenant la dérivée de y^2 par rapport à x, nous avons

$$(y^2)' = \frac{2p(6x + p)(3x + p)}{(4x + p)^2}.$$

Quand x croît de $-\dfrac{p}{4}$ à $-\dfrac{p}{6}$, la valeur positive de y décroît de $+\infty$ à zéro, et quand x croît de $-\dfrac{p}{6}$ à $+\infty$, cette valeur positive de y croît de 0 à $+\infty$.

Le point $A\left(-\dfrac{p}{6}, 0\right)$ est un point double. Pour avoir les coefficients angulaires des tangentes en ce point, nous tirons de l'équation de la courbe

$$\frac{y^2}{(6x + p)^2} = \frac{p}{4(4x + p)}, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{\left(x + \frac{p}{6}\right)^2} = \frac{9p}{4x + p}.$$

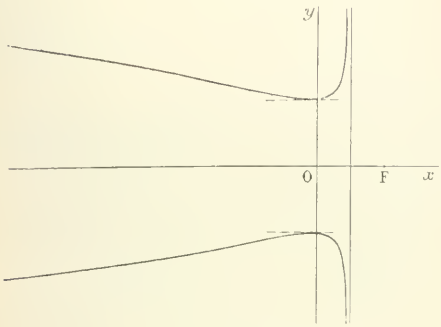
Pour $x = -\dfrac{p}{6}$ la limite de $\dfrac{y^2}{\left(x + \frac{p}{6}\right)^2}$ est 27, par suite les tangentes au point double ont pour coefficients angulaires $\pm 3\sqrt{3}$.

Les branches infinies correspondant aux valeurs infinies de x et de y sont paraboliques dans la direction Ox.

2. Le centre du cercle circonscrit au triangle M'FF' est le point de rencontre de la tangente MM' et de la perpendiculaire élevée à MF en son milieu. Nous aurons le lieu de ce point en éliminant α et β entre les équations

$$\beta^2 - 2p\alpha = 0, \qquad \beta y - p(x+\alpha) = 0, \qquad 2x = \frac{p}{2} - \alpha.$$

Les deux dernières donnent $\alpha = \dfrac{p-4x}{2}$, $\beta = \dfrac{p(p-2x)}{2y}$, et en portant ces valeurs dans la première nous obtenons



$$4y^2(4x-p) + p(2x-p)^2 = 0;$$

c'est l'équation d'une courbe du troisième degré que nous construisons comme la précédente.

Nous avons

$$y^2 = -\frac{p(2x-p)^2}{4(4x-p)}, \qquad (y^2)' = \frac{-2px(2x-p)}{(4x-p)^2}.$$

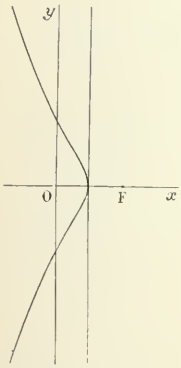
Pour que y soit réel, il faut que x soit plus petit que $\dfrac{p}{4}$. Quand x croît de $-\infty$ à 0, la valeur positive de y décroît de $+\infty$ à $\dfrac{p}{2}$, et quand x croît de 0 à $\dfrac{p}{4}$, la même quantité croît de $\dfrac{p}{2}$ à $+\infty$.

Le foyer F est un point double isolé.

3. Le centre du cercle circonscrit au triangle MM'F est le point de rencontre de la droite FF' et de la perpendiculaire élevée à M'F en son milieu.

Nous sommes donc conduits à éliminer α et β entre les équations

$$\beta^2 - 2p\alpha = 0, \qquad 2\beta x + 2py - p\beta = 0, \qquad 2x = \frac{p}{2} - \alpha.$$



Le résultat de cette élimination est

$$y^2 = -\frac{(4x-p)(2x-p)^2}{4p}.$$

Pour que y soit réel, il faut que x soit inférieur à $\dfrac{p}{4}$.

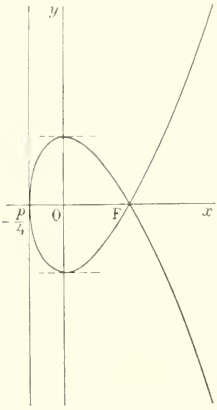
Nous avons $$(y^2)' = -\frac{2(2x-p)(3x-p)}{p}.$$

Quand x croît de $-\infty$ à $\dfrac{p}{4}$, la valeur positive de y décroît de $+\infty$ à zéro. Les branches infinies sont paraboliques dans la direction Oy, et le point F est un point double isolé.

4. Pour avoir enfin le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MM'F', nous éliminerons α, β entre les équations

$$\beta^2 - 2p\alpha = 0, \qquad 2\beta x + 2py - p\beta = 0, \qquad 2x = \alpha - \frac{p}{2}$$

Nous avons $$y^2 = \frac{(4x+p)(2x-p)^2}{4p};$$



nous en déduisons $(y^2)' = \frac{6x(2x-p)}{p}$.

Pour que y soit réel, il faut que x soit supérieur à $-\frac{p}{4}$. La variation de la valeur positive de y est indiquée par le tableau suivant

x	$-\frac{p}{4}$		0		$\frac{p}{2}$		$+\infty$
y	0	croît	$\frac{p}{2}$	décroît	0	croît	$+\infty$

On en déduit sans difficulté la forme de la courbe.

Le point F est un point double réel ; les tangentes en ce point ont pour coefficients angulaires $\pm\sqrt{3}$, comme on le voit aisément en cherchant la limite de $\frac{y^2}{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}$ pour $x = \frac{p}{2}$.

Les branches infinies sont paraboliques dans la direction Oy.

G.-A. POUILLIART.

---

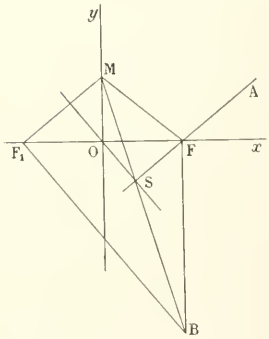
676. — *On considère les paraboles dont le foyer est un point donné* F, *sur* Ox *et qui sont tangentes à une droite donnée.* Oy.

1° *Lieu des sommets. — Construire, pour une direction donnée de l'axe, le sommet de la parabole et son point de contact* M *avec la tangente donnée. — Lieu du point de rencontre de la droite qui joint ces deux points avec la directrice.*

2° *Par un point* P *du plan passent deux de ces paraboles. — Discussion. — Construire leurs directrices, leurs sommets, leurs points de contact avec* Oy. *Montrer que ces deux paraboles se coupent en deux points réels seulement et qu'elles s'y coupent sous le même angle.*

3° *Quel lieu doit décrire le point* P *pour que les axes des deux paraboles qui passent par ce point soient rectangulaires ? Chercher le lieu des points de rencontre de deux pareilles paraboles.*

1. Les tangentes aux sommets des paraboles définies par l'énoncé pivotent autour du point O ; par conséquent, le lieu des sommets est le cercle décrit sur FO comme diamètre.

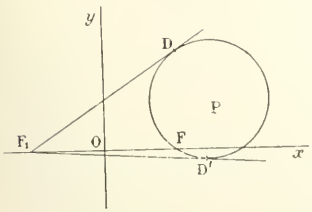


Etant donné l'axe d'une parabole, FA, le sommet S est la projection du point O sur FA. La directrice passe par le point F_1 symétrique de F par rapport à Oy ; par suite, le point de contact M de la tangente Oy est sur la parallèle à FA menée par le point F_1.

Le point B, intersection de la droite MS et de la directrice, se trouve sur la bissectrice extérieure de l'angle MFS, c'est-à-dire sur la parallèle à Oy menée par le point F. Cette droite étant fixe est le lieu du point B.

2. Les directrices des paraboles qui passent par le point P sont les tangentes menées du point F_1 au cercle décrit du point P comme centre et passant par le point F. Il en résulte que par le point P passent deux paraboles ; elles sont réelles si PF_1 est plus grand que PF, c'est-à-dire si le point P est par rapport à Oy, du même côté que le point F.

Les axes de ces paraboles sont les perpendiculaires menées du point F aux directrices, et les points de contact avec Oy appartiennent aux parallèles aux axes menées par le point F_1.



Soit P' un autre point de rencontre des deux paraboles. Si nous faisons sur P' le même raisonnement que sur P, nous devons retrouver les deux mêmes paraboles et par suite les deux mêmes directrices. Ce point P' doit donc être le centre du second cercle passant par le point F et tangentes aux directrices F_1D et F_1D'. P et P' sont par suite les deux seuls points de rencontre réels des deux paraboles considérées.

D'ailleurs, PD et PD' étant les directions des axes des paraboles passant par le point P, leurs tangentes au point P sont les bissectrices des angles FPD, FPD'. L'angle de ces tangentes dont la valeur est la moitié de l'angle DPD' formé par les axes est donc le même en P et P'.

3. Pour que les axes des deux paraboles qui passent au point P soient rectangulaires, il faut et il suffit que les directrices le soient, c'est-à-dire que l'on ait $PF_1 = PF\sqrt{2}$. Le lieu du point P est donc une circonférence ayant son centre sur la droite FF_1 et rencontrant cette droite aux points H et K qui sont définis par les égalités

$$\frac{\overline{F_1H}}{\overline{FH}} = -\frac{\overline{F_1K}}{\overline{FK}} = \sqrt{2}.$$

Le point P' appartient également à cette circonférence.

VICTOR BERTRAND.

Solutions analogues par MM. BUNEL, lycée de Rennes ; A. GUESSER, lycée de Brest ; P. SAILLY, à Limoges ; Raoul VIOLOT, collège Stanislas.

---

691. — *On considère les coniques tangentes en O à Oy (axes rectangulaires) et qui admettent une droite donnée*

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - h = 0$$

comme directrice.

1° Lieu du foyer qui correspond à cette directrice. Prenant un point sur ce lieu, reconnaître le genre de la conique correspondante. — Expliquer géométriquement les résultats obtenus.

2° Lieu du second foyer et lieu du centre. — Construire ces lieux en supposant $\varphi = \frac{\pi}{2}$, *puis* $\varphi = \frac{\pi}{4}$. *Dans cette dernière hypothèse, il y aura avantage à prendre pour axes de coordonnées les bissectrices des angles formés par les premiers.*

1. Pour que la conique

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2(x\cos\varphi + y\sin\varphi - h)^2$$

soit tangente à l'origine à l'axe Oy, il faut que le coefficient de φ et que le terme indépendant soient nuls, ce qui donne les conditions

$$\alpha^2 + \beta^2 = e^2h^2, \qquad \beta = he^2\sin\varphi.$$

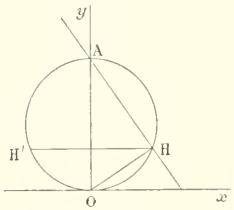
Éliminons e^2 entre ces relations, nous obtenons l'équation

$$\text{(C)} \qquad \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\beta h}{\sin\varphi} = 0$$

qui représente le lieu du foyer relatif à la directrice donnée D.

C'est le cercle décrit sur OA comme diamètre, A désignant le point de rencontre des droites Oy et D.

La nature de cette conique dépend du signe de $e^2 - 1$, ou, en remplaçant e^2 par $\frac{\alpha^2+\beta^2}{h^2}$, du signe de $\alpha^2+\beta^2-h^2$.



Or, h est, au signe près, la distance du point O à la droite D. Par conséquent, tous les points du cercle (C) dont la distance à l'origine est supérieure à OH sont foyers d'hyperboles ; les points du même cercle dont la distance au point O est plus petite que OH sont foyers d'ellipses. Il en résulte que les foyers d'ellipses sont sur l'arc HOH', et les foyers d'hyperboles sur l'arc HAH'.

Le point H étant sur la directrice ne peut être le foyer d'une conique proprement dite. C'est le foyer de la parabole qui se réduit à la droite double OH. Au contraire, le point H' est foyer d'une parabole véritable ayant pour directrice la droite D et tangente en O à Oy.

Le point O est foyer de la conique singulière $x^2+y^2=0$. Enfin, le point A est le foyer d'une hyperbole réduite à deux droites dont l'une est Oy. — Ces divers résultats peuvent s'obtenir géométriquement. D'après une propriété bien connue de la directrice, si F désigne le foyer d'une conique tangente en O à Oy, FA est perpendiculaire à FO, donc le point F appartient au cercle de diamètre OA.

L'excentricité de la conique correspondante est égale à $\frac{OF}{OH}$: cette conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole selon que OF est inférieur, supérieur ou égal à 1.

2. Le second foyer F' est situé sur la perpendiculaire menée par le point $F(\alpha, \beta)$ à la droite D et sur la symétrique de OF par rapport à Oy ; les coordonnées de ce point vérifient donc les deux équations

$$(x-\alpha)\sin\varphi-(y-\beta)\cos\varphi=0, \qquad \beta x+\alpha y=0.$$

Nous aurons l'équation du lieu du point F' en éliminant α et β entre ces deux équations et la suivante

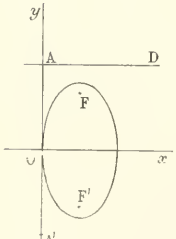
$$\alpha^2+\beta^2-\frac{h\beta}{\sin\varphi}=0.$$

Les deux premières nous donnent

$$\alpha=\frac{x(x\sin\varphi-y\cos\varphi)}{x\sin\varphi+y\cos\varphi}, \qquad \beta=-\frac{y(x\sin\varphi-y\cos\varphi)}{x\sin\varphi+y\cos\varphi},$$

et en remplaçant dans la troisième α et β par ces valeurs, nous avons

$$(x\sin\varphi-y\cos\varphi)\left[(x^2+y^2)(x\sin\varphi-y\cos\varphi)+\frac{hy}{\sin\varphi}(x\sin\varphi+y\cos\varphi)\right]=0.$$



Pour $x\sin\varphi-y\cos\varphi=0$, nous avons $\alpha=0$, $\beta=0$; ce sont les coordonnées du foyer singulier O. Le véritable lieu se compose donc de la cubique circulaire qui a pour équation

$$(x^2+y^2)(x\sin\varphi-y\cos\varphi)+\frac{hy}{\sin\varphi}(x\sin\varphi+y\cos\varphi)=0.$$

Pour $\varphi=\frac{\pi}{2}$, cette équation devient

$$x(x^2+y^2+hy)=0,$$

elle représente un cercle et l'axe Oy.

Cela pouvait se prévoir géométriquement, car la directrice AD est parallèle à Ox, et comme la conique est tangente en O à Oy, la droite Ox est l'axe non focal de cette conique.

Le lieu du foyer F' est symétrique du lieu du foyer F par rapport à Ox ; comme ce dernier lieu

est le cercle de diamètre OA, le lieu du point F′ est le cercle de diamètre OA′, A′ étant symétrique de A par rapport au point O; ce cercle a pour équation $x^2+y^2+hy=0$.

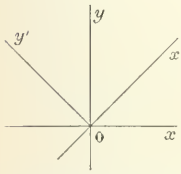
Le facteur $x=0$ correspond à la conique singulière $x^2=0$.

Examinons maintenant le cas où $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

L'équation du lieu du point F′ devient

$$(x^2+y^2)\left(x\sin\frac{\pi}{4}-y\cos\frac{\pi}{4}\right)+\frac{hy}{\sin\frac{\pi}{4}}\left(x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Prenons pour nouveaux axes de coordonnées les bissectrices Ox' et Oy' des axes Ox et Oy; les formules de transformation de coordonnées sont



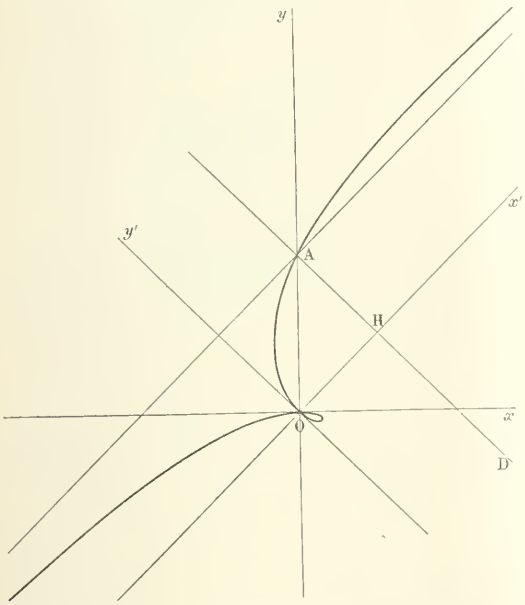
$$x=x'\cos\frac{\pi}{4}-y'\sin\frac{\pi}{4},\qquad y=x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}.$$

En remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation de la courbe, nous obtenons

$$-(x'^2+y'^2)y'+hx'(x'+y')=0.$$

Pour construire cette courbe, on posera $y'=tx'$ et on étudiera les variations de x' et de y' quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

La courbe est tangente à l'origine aux droites $x'=0$, $x'+y'=0$; elle admet pour asymptote la droite $y'-h=0$; cette asymptote rencontre la courbe au point A ($x'=h$, $y'=h$).



Lieu du centre. — Le centre est déterminé par les équations

$$(x-\alpha)=e^2\cos\varphi(x\cos\varphi+y\sin\varphi-h),$$
$$(y-\beta)=e^2\sin\varphi(x\cos\varphi+y\sin\varphi-h),$$

ou, en remplaçant e^2 par $\frac{\beta}{h\sin\varphi}$,

$$x-\alpha=\frac{\beta\cos\varphi}{h\sin\varphi}(x\cos\varphi+y\sin\varphi-h),$$
$$y-\beta=\frac{\beta}{h}(x\cos\varphi+y\sin\varphi-h).$$

Ce système est équivalent au suivant :

$$\frac{x-\alpha}{y-\beta}=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$
$$hy=\beta(x\cos\varphi+y\sin\varphi).$$

En le résolvant par rapport à α et β, nous avons

$$\beta=\frac{hy}{x\cos\varphi+y\sin\varphi},$$

$$\alpha=\frac{(x\cos\varphi+y\sin\varphi)(x\sin\varphi-y\cos\varphi)+hy\cos\varphi}{\sin\varphi(x\cos\varphi+y\sin\varphi)};$$

il ne nous reste plus qu'à porter ces valeurs dans l'équation $\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\beta h}{\sin \varphi} = 0$ pour avoir l'équation du lieu.

Nous obtenons ainsi

$$\frac{[(x\cos\varphi + y\sin\varphi)(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + hy\cos\varphi]^2}{\sin^2\varphi(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2} + \frac{h^2y^2}{(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2} - \frac{h^2y}{\sin\varphi(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

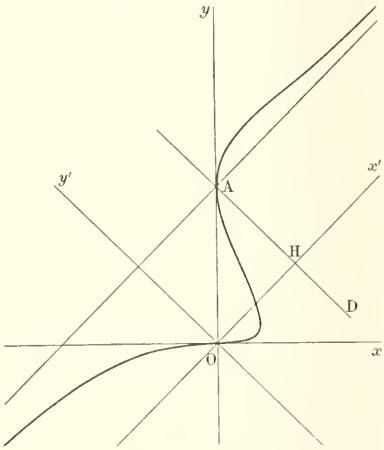
$$[(x\cos\varphi + y\sin\varphi)(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + hy\cos\varphi]^2 + h^2y^2\sin^2\varphi - h^2y\sin\varphi(x\cos\varphi + y\sin\varphi) = 0,$$

ou encore

$$[(x\cos\varphi + y\sin\varphi)(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + hy\cos\varphi]^2 - h^2xy\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

ou enfin, en divisant par $x\sin\varphi - y\cos\varphi$,

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + 2hy\cos\varphi(x\cos\varphi + y\sin\varphi) - h^2y\cos\varphi = 0.$$



Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, cette équation représente les deux axes, ce qui est évident *a priori*.

Faisons maintenant $\varphi = \frac{\pi}{4}$, et prenons comme nouveaux axes de coordonnées les bissectrices Ox' et Oy' de Ox et de Oy. Nous obtenons l'équation transformée

$$2x'^2y' - 2hx'(x' + y') + h^2(x' + y') = 0.$$

Pour construire cette courbe, résolvons l'équation par rapport à y'; nous avons

$$y' = \frac{hx'(2x' - h)}{2x'^2 - 2hx' + h^2}.$$

y' est continue pour toutes les valeurs de x.

La dérivée de y' est

$$\frac{-h^2(2x'^2 - 4hx' + h^2)}{(2x'^2 - 2hx' + h^2)^2};$$

elle s'annule en changeant de signe pour $x' = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)h$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x'	$-\infty$		0		$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)h$		$\frac{h}{2}$		$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)h$		$+\infty$
y'	h	décroît	0	décroît	$-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot h$ (*min*)	croît	0	croît	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}\cdot h$ (*max*)	décroît	h

ce qui permet de construire la courbe. On reconnaît facilement que la droite Ox est tangente d'inflexion, et que la droite Oy touche la courbe au point A.

P. SAILLY, à Limoges.

695. — *On considère deux cercles fixes* C *et* C_1, *et un cercle mobile* Γ *orthogonal à* C *et tel que l'un de ses centres de similitude avec* C_1 *décrive une droite fixe* D.

1° *Trouver le lieu du centre de ce cercle* Γ.

2° *Ce lieu est une conique. Séparer les droites* D *pour lesquelles cette conique est une ellipse de celles pour lesquelles c'est une hyperbole.*

3° *Lieu du centre de cette conique quand la droite* D *tourne autour d'un point fixe* P. *Séparer sur ce lieu les arcs qui portent des centres d'ellipses de ceux qui portent des centres d'hyperboles.*

4° *Enveloppe des axes de la même conique, quand le point* P *est au centre de* C_1. *Trouver combien il passe d'axes réels par un point du plan.*

Prenons pour origine le centre du cercle C, pour axe des x la ligne des centres des deux cercles C et C_1 et pour axe des y la perpendiculaire à Ox menée par le centre de C. Si nous désignons par a l'abscisse du centre de C_1, par R et R′ les rayons des cercles C et C_1, les équations de ces deux cercles seront

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \qquad (x-a)^2 + y^2 - R'^2 = 0.$$

D'autre part, l'équation du cercle mobile est $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \rho^2 = 0$.

La condition pour que ce cercle soit orthogonal au cercle C est $\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2 + R^2$ et les coordonnées des centres de similitude de ce cercle avec le cercle C_1 sont $\dfrac{\alpha R' - a\rho}{R' - \rho}$, $\dfrac{\beta R'}{R' - \rho}$, ρ ayant le double signe.

1. et **2.** Si nous exprimons que ce point est sur une droite donnée, $ux + vy + w = 0$, nous obtenons la condition $u(\alpha R' - a\rho) + v\beta R' + w(R' - \rho) = 0$. En isolant les termes en ρ, élevant au carré et remplaçant ρ^2 par $\alpha^2 + \beta^2 - R^2$, nous obtenons le lieu du centre (α, β),

$$(1) \qquad (au + w)^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) - R'^2(u\alpha + v\beta + w)^2 = 0.$$

C'est là l'équation d'une conique doublement tangente au cercle C aux deux points où la droite D le rencontre. La condition pour que cette conique soit une ellipse est

$$(2) \qquad (au + w)^2 - R'^2(u^2 + v^2) > 0.$$

D'ailleurs, la condition

$$(au + w)^2 - R'^2(u^2 + v^2) = 0$$

exprime que la droite D est tangente au cercle C_1; dans ce cas, la conique (1) est une parabole. L'inégalité (2) exprime que la droite D ne coupe pas ce cercle. Si donc la droite D est sécante au cercle C_1, la conique (1) est une hyperbole; si la droite D est non-sécante, cette conique est une ellipse.

3. Le centre de la conique (1) est donné par les deux équations

$$(au + w)^2 x - R'^2 u(ux + vy + w) = 0,$$
$$(au + w)^2 y - R'^2 v(ux + vy + w) = 0;$$

la condition pour que la droite D tourne autour du point donné A (x_0, y_0) est $ux_0 + vy_0 + w = 0$; en éliminant u, v, w entre ces trois équations, nous aurons le lieu demandé. Nous trouvons ainsi

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{-xx_0 - yy_0},$$

puis

$$(3) \qquad [(a - x_0)x - y_0 y]^2 - R'^2[x(x - x_0) + y(y - y_0)] = 0.$$

Cette équation représente une conique doublement tangente au cercle décrit sur OA comme diamètre aux points où la droite $(a - x_0)x - y_0 y = 0$ le coupe; cette droite est d'ailleurs la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le diamètre de C_1 qui passe au point A. Cette conique est une ellipse si

$$(x_0 - a)^2 + y_0^2 - R'^2 < 0,$$

c'est-à-dire si le point A est intérieur au cercle C_1; c'est une hyperbole dans le cas contraire.

Portons maintenant les valeurs de u, v, w que nous venons d'employer, dans la condition (2) qui exprime que la conique (1) est une ellipse, nous aurons

$$(a - x_0)x - y_0 y)^2 - R'^2(x^2 + y^2) > 0;$$

donc les points de la courbe (3) qui vérifient cette équation sont des centres d'ellipses, les autres sont des centres d'hyperboles. Or, le premier membre de l'inégalité précédente, égalé à 0, représente les parallèles aux asymptotes de la conique (3), menées par l'origine; si donc cette conique est une ellipse, les droites indiquées sont imaginaires, et le premier membre de l'inégalité est toujours négatif : tous les centres sont des centres d'hyperboles; si la conique (3) est une hyperbole, l'une des branches porte des centres d'ellipses, l'autre des centres d'hyperboles : le point de l'hyperbole, autre que l'origine et situé sur la droite $(a - x_0)x - y_0 y = 0$, est un centre d'hyperbole et permet de faire la distinction.

4. Si le point P est au centre de C, on a $x_0 = y_0 = 0$ et la relation entre u, v, w devient $w = 0$. Par conséquent, l'équation de la conique (1) se réduit à

$$a^2u^2(x^2 + y^2 - R^2) - R'^2(ux + vy)^2 = 0.$$

Les axes de cette conique sont la droite $ux + vy = 0$ et la droite perpendiculaire $vx - uy = 0$; ils enveloppent l'origine des coordonnées et, comme chacun d'eux passe une fois par un point du plan, il passe deux axes par un point donné dans le plan. L'énoncé indique le centre du cercle C_1; mais c'est une faute d'impression. La conique (1) se réduit alors à une droite double et la dernière partie n'a aucun sens.

QUESTIONS PROPOSÉES

742. — Trouver la dérivée d'ordre n de la fonction

$$y = (x - \alpha)^n . (x - \beta)^n.$$

Appliquer au cas où $\alpha = 1$, $\beta = -1$: $y = (x^2 - 1)^n$ et en déduire la formule

$$(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \ldots\ldots + (-1)^n (C_n^n)^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} & (n \text{ pair}) \\ 0 & (n \text{ impair}) \end{cases}$$

qui permet de calculer la somme des carrés des coefficients du binome pris de deux en deux.

P. Lamaire.

743. — On joint un point M d'une ellipse aux deux foyers F et F'. Lieux des centres des cercles inscrit et exinscrits dans le triangle MFF'.

P. L.

744. — Tracer d'une manière vraisemblable les lignes de force dues à la gravitation universelle autour du système formé par la terre et la lune, sachant que la masse de la lune est environ $\frac{1}{80}$ de celle de la terre.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

8e Année. N° 9. Juin 1898.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

EXERCICE SUR LA DÉTERMINATION DU POINT DOUBLE D'UNE CUBIQUE PLANE UNICURSALE (*)

par M. **Appell**, Membre de l'Institut.

Soient

$$x = a_1t^3 + b_1t^2 + c_1t + d_1,$$
$$y = a_2t^3 + b_2t^2 + c_2t + d_2,$$
$$z = a_3t^3 + b_3t^2 + c_3t + d_3$$

les expressions des coordonnées homogènes d'un point de la cubique en fonction d'un paramètre t. Coupons la cubique par une droite

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

et appelons t_1, t_2, t_3 les trois valeurs de t correspondant aux points d'intersection : ces valeurs sont racines de l'équation

$$(1) \qquad \alpha(a_1t^3 + \ldots) + \beta(a_2t^3 + \ldots) + \gamma(a_3t^3 + \ldots) = 0.$$

Si on appelle S_1, S_2, S_3 la somme des racines, la somme des produits deux à deux et le produit des racines, on a les relations suivantes, où l'on a désigné par δ le coefficient de t^3 dans l'équation (1)

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 - \delta = 0,$$
$$\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 + \delta S_1 = 0,$$
$$\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 - \delta S_2 = 0,$$
$$\alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma d_3 + \delta S_3 = 0.$$

On a donc, en égalant à zéro le déterminant des coefficients de α, β, γ, δ :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & S_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & -S_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & S_3 \end{vmatrix} = 0,$$

relation de la forme

$$(2) \qquad DS_3 - CS_2 + BS_1 - A = 0,$$

exprimant que les points t_1, t_2, t_3 sont en ligne droite. Si on se donne t_1, t_2, cette relation permet de calculer la valeur t_3 du paramètre correspondant au point où la sécante t_1t_2 coupe la courbe. Mais

(*) Au sujet d'un article de M. Naud, *Revue*, avril 1898.

si t_1 et t_2 sont les paramètres du point double, la sécante t_1t_2 est indéterminée, et t_3 est indéterminé. Les valeurs t_1 et t_2 correspondant au point double doivent donc annuler le coefficient de t_3 dans (2) et le terme indépendant de t_3, ce qui donne

$$(3)\qquad \begin{cases} Dt_1t_2 - C(t_1+t_2) + B = 0, \\ Ct_1t_2 - B(t_1+t_2) + A = 0. \end{cases}$$

Les quantités t_1 et t_2 sont donc racines de l'équation

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} t^2 & t & 1 \\ A & B & C \\ B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

Points d'inflexion. — Une tangente d'inflexion coupant en trois points confondus, on aura les paramètres de ces points en faisant dans (2)

$$t_1 = t_2 = t_3 = t\,;$$

d'où l'équation

$$(5)\qquad Dt^3 - 3Ct^2 + 3Bt - A = 0.$$

Les racines de cette équation vérifiant la relation (2), les points d'inflexion sont en ligne droite.

Remarque. — L'équation (4) donnant les paramètres du point double s'obtient en égalant à zéro le Hessien de l'équation (5) donnant les points d'inflexion.

D'après les propriétés bien connues de la forme cubique, quand l'équation (4) a ses racines réelles, une seule racine de (5) est réelle; quand l'équation (4) a ses racines imaginaires, les trois racines de (5) sont réelles.

La méthode précédente est une application de la théorie de l'involution entre trois éléments. Elle se rattache aussi à l'application du théorème d'Abel à la géométrie sur une courbe unicursale plane ou gauche. (Voyez *Leçons sur la Géométrie*, par Alfred Clebsch, Gauthier-Villars, 1880; voyez également une Note dans la *Géométrie Analytique* de Briot et Bouquet, dernière édition.)

DES PARABOLES ASYMPTOTES DANS L'INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES

par M. J. **Caron**, Professeur.

I. — *Théorèmes sur les contours apparents.*

J'ai démontré dans les *Nouvelles Annales* (tome XIV, page 138) le théorème suivant, comme application de la ligne des points doubles en projection :

Théorème I. — *Etant données sur une quadrique* S *deux sections planes* C, C_1, *tangentes entre elles en un point* M *du contour apparent horizontal dans l'espace de la surface* S, *les projections horizontales* c, c_1 *de ces deux courbes sont osculatrices au point* m, *projection de* M.

En substituant à des courbes gauches tracées sur la surface S, les sections de cette même surface par les plans osculateurs aux courbes gauches, on en déduit :

Théorème II. — *Deux courbes quelconques* C, C_1 *tracées sur une quadrique* S *et tangentes entre elles en un point* M *du contour apparent horizontal dans l'espace de* S, *ont leurs projections horizontales osculatrices en* m.

Et de même :

THÉORÈME III. — *Si deux courbes quelconques* C, C_1 *tracées sur une quadrique* S *ont trois points communs confondus en un même point* M *du contour apparent horizontal dans l'espace de* S, *leurs projections horizontales* c, c_1 *ont quatre points communs confondus en* m, *projection de* M (*).

En particulier, étant donnée une courbe C tracée sur une quadrique S et rencontrant le contour apparent horizontal dans l'espace au point M, le plan osculateur à la courbe C au point M coupe la surface S suivant une conique Γ dont la projection horizontale a quatre points communs avec la courbe c, projection de C, réunis au point m, projection de M.

II. — *Des paraboloïdes passant par l'intersection de deux quadriques*

Étant donnés une quadrique S et un paraboloïde P admettant comme plans directeurs A et B, le plan A, par exemple, est un plan de sections homothétiques pour les surfaces S et P, puisqu'il coupe S suivant une conique et P suivant une seule droite à distance finie, ce qui donne deux points d'intersection seulement à distance finie et deux autres points toujours à l'infini.

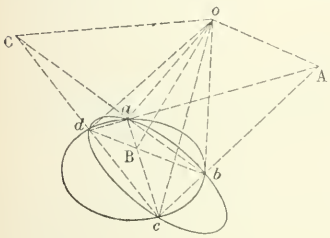


Fig. 1

Étant donnés deux quadriques S, S_1 et un paraboloïde P passant par leur intersection, tout plan directeur A de P est un plan de sections homothétiques pour S et P, et aussi pour S_1 et P; c'est donc également un plan de sections homothétiques pour S et S_1.

Les plans directeurs des paraboloïdes passant par l'intersection de deux quadriques S, S_1 sont donc les plans de sections homothétiques de ces deux quadriques.

Or, pour trouver les plans de sections homothétiques de deux quadriques S, S_1, on transporte les deux cônes directeurs de ces surfaces parallèlement à eux-mêmes de façon à leur donner le même sommet; ils se coupent suivant quatre génératrices oa, ob, oc, od (*fig.* 1), et les plans de deux de ces génératrices sont les plans de sections homothétiques demandés.

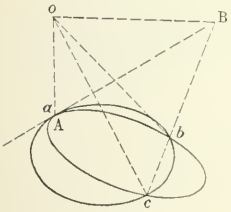


Fig. 2

Il y a en tout six plans de sections homothétiques que l'on peut ranger en trois groupes de deux plans (oab, ocd), (oac, obd), (obc, oad).

On en déduit l'existence de trois paraboloïdes passant par l'intersection des deux quadriques.

Lorsque les quatre directions infinies sont réelles, les trois paraboloïdes sont hyperboliques.

Dans tous les cas, l'un d'eux au moins est hyperbolique.

Les directions des axes des paraboloïdes sont les intersections des plans directeurs conjugués deux à deux, soit OA, OB, OC.

Dans le cas particulier où l'une des directions infinies est double, les directions des axes des deux paraboloïdes restant sont OA, OB (*fig.* 2).

(*) Tous ces théorèmes s'aperçoivent aisément de la façon suivante : Considérons d'abord deux courbes quelconques de la surface S se coupant en un point M du contour apparent horizontal; leurs projections horizontales sont tangentes en m, projection de M, et, par suite, ont deux points confondus en m; si donc les deux courbes de l'espace se coupent encore en $p-1$ points voisins de M, leurs projections auront encore $p-1$ points de rencontre voisins de m. A la limite, quand ces points viendront coïncider avec M, leurs projections viendront coïncider avec m, et nous voyons que si deux courbes de l'espace tracées sur une surface S ont p points de rencontre confondus avec un point du contour apparent horizontal, par exemple, leurs projections ont $p+1$ points communs en la projection de ce point.

L'un des paraboloïdes passant par l'intersection a donc son axe parallèle à la direction infinie double oaA. Le point de la courbe qui est à l'infini dans la direction oaA appartient par conséquent au contour apparent du paraboloïde.

Un plan ayant avec la courbe trois points communs à l'infini dans la direction oA coupera le paraboloïde précédent suivant une parabole dont la projection horizontale aura quatre points communs à l'infini avec la projection horizontale de la courbe.

III. — *Détermination du plan asymptote.*

Étant données deux quadriques qui admettent une direction infinie double oa, la courbe intersection des deux surfaces admet deux asymptotes rejetées à l'infini en restant parallèles à oa.

Tout plan parallèle au plan tangent à l'infini sur oa coupe les deux surfaces S, S_1 suivant deux paraboles dont les axes sont parallèles à oa. Ces deux paraboles ont toujours deux points communs à l'infini, excepté lorsqu'elles sont égales.

Le plan coupant les deux surfaces suivant deux paraboles égales à axes parallèles aura donc trois points communs à l'infini avec la courbe, ce sera un plan asymptote de la courbe. Rappelons ici la détermination de ce plan.

Les sections du genre parabole faites par un même plan dans une quadrique et son cône asymptote sont égales et ont même axe ; on est ainsi ramené à étudier uniquement le cas où les deux surfaces sont des cônes.

Soit donc P un plan coupant deux cônes S, S_1 suivant deux paraboles à axes parallèles.

Soient de plus a, a_1, f, f_1 les sommets et les foyers de ces deux paraboles. Les droites Sa, S_1a_1, Sf, S_1f_1 seront les lieux des sommets et des foyers des sections faites dans les deux cônes par des plans parallèles au plan P. Il suffit donc de trouver la position du plan parallèle à P interceptant dans les deux faisceaux Saf, $S_1a_1f_1$ deux segments égaux.

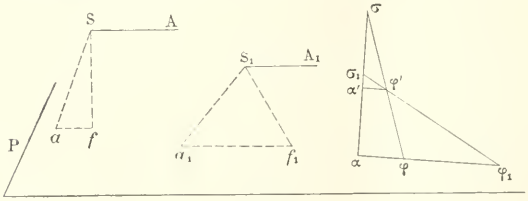


Fig. 3

Pour résoudre cette question, on dessine une droite quelconque coupant le plan tangent au cône S, parallèle à P en σ, puis le plan parallèle à P mené par S_1 en $σ_1$, et enfin le plan P lui-même en α. Menons ensuite par α dans le plan P une droite quelconque, sur laquelle nous portons les longueurs $αφ$, $αφ_1$ égales à af, a_1f_1, en tenant compte des signes.

Nous formons ainsi les deux nouveaux faisceaux $σαφ$, $σ_1αφ_1$ qui sont équivalents aux premiers Saf, $S_1a_1f_1$. Or, les deux faisceaux $σαφ$, $σ_1αφ_1$ ont un segment commun $α'φ'$. Si donc l'on mène par $α'φ'$ un plan P′ parallèle à P, il coupera les deux surfaces primitives suivant des paraboles égales à axes parallèles, dont les distances focales sont mesurées par $α'φ'$; autrement dit, le plan P′ est le plan asymptote de la courbe.

IV. — *Détermination de la parabole asymptote.*

Le plan P′ coupe toutes les surfaces du second degré passant par l'intersection des deux premières suivant des paraboles égales entre elles et à axes parallèles, qui ont toutes trois points communs à l'infini avec la courbe dans la direction double. Mais si l'on prend le paraboloïde passant par la courbe et ayant son axe parallèle à la direction double oa, ce paraboloïde est coupé par le plan asymptote P′ suivant

une parabole qui aura quatre points communs avec la courbe dans une projection quelconque; ce sera donc la parabole asymptote.

Pour construire ce paraboloïde d'une façon tout à fait générale, on cherchera ses sections par des plans parallèles à oa, ce seront des paraboles dont on pourra trouver trois points et la direction de l'axe oa. Supposons connues trois de ces paraboles. A leur tour, elles sont coupées par le plan asymptote P en trois points qui déterminent cette fois la parabole asymptote dont l'axe est également parallèle à oa.

On peut aussi utiliser des génératrices de ce paraboloïde quand il est hyperbolique, ou enfin les plans de section homothétique des surfaces S, S_1. Bien entendu les conditions particulières des données pourront toujours permettre de simplifier ces constructions générales.

SUR LA CONDITION POUR QUE TROIS CERCLES PASSENT PAR UN MÊME POINT (*)

(Extrait d'une lettre de M. **M. d'Ocagne.**)

..... Ayant eu besoin récemment, en vue de mes études de Nomographie, de mettre sous forme symétrique la condition pour que les trois cercles

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

passent par un même point, j'ai trouvé que cette condition pouvait s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 1 & c_2 \\ a_3 & 1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Il peut y avoir là, ce me semble, l'occasion d'un exercice de calcul algébrique pour des élèves de Mathématiques spéciales.....

Solution de la question 682 précédée d'une Note SUR L'EMPLOI DES COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

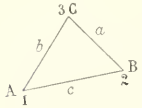
682. — *Deux coniques, l'une inscrite, l'autre circonscrite au triangle* ABC *ont le même cercle orthoptique.*

1° *Trouver le lieu du centre commun.*

2° *Les tangentes à la conique circonscrite, aux points* A, B et C, *rencontrent les côtés opposés en trois*

(*) Cette condition très intéressante est bien connue. Elle constitue néanmoins un excellent exercice pour les élèves qui ne l'auraient pas rencontrée dans leurs cours : nous rappelons, pour eux, qu'elle s'obtient en exprimant que le cercle orthogonal aux trois cercles donnés a un rayon nul.

points en ligne droite. Trouver l'enveloppe de cette droite et le lieu de son pôle par rapport à cette conique.



Soit 1 2 3 un triangle dont les sommets ont pour coordonnées, par rapport à deux axes rectangulaires (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3). Nous désignerons par A, B, C les angles du triangle, par a, b, c les longueurs des côtés et par α, β, γ les angles que font les demi-droites 2 3, 3 1, 1 2 avec Ox. Nous représenterons par p la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le côté 2 3, ce nombre étant affecté du signe + ou du signe —, suivant que pour aller du rayon O2 au rayon O3 il faut tourner dans le sens direct ou en sens contraire ; q et r désigneront des nombres analogues pour les deux autres côtés 3 1 et 1 2.

Cela posé, l'équation de 2 3 est

$$(y_3 - y_2)x + (x_2 - x_3)y - x_2y_3 + y_2x_3 = 0;$$

les deux autres côtés ont des équations analogues. Nous définirons alors un système de coordonnées trilinéaires par la transformation suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} (y_3 - y_2)x + (x_2 - x_3)y - x_2y_3 + y_2x_2 = X, \\ (y_1 - y_3)x + (x_3 - x_1)y - x_3y_1 + y_3x_1 = Y, \\ (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y - x_1y_2 + x_2y_1 = Z. \end{cases}$$

Les nouvelles coordonnées X, Y, Z se nomment les coordonnées barycentriques du point représenté par x, y dans l'ancien système. Il est visible que leur somme se réduit à une constante, et que, par conséquent, dans un pareil système, l'équation de la droite de l'infini est

$$(2)\qquad X + Y + Z = 0.$$

Les formules (1) peuvent se transformer aisément : on a, en effet,

$$x_3 - x_2 = a\cos\alpha, \qquad y_3 - y_2 = a\sin\alpha, \qquad x_2y_3 - y_2x_3 = ap.$$

Si donc on rend les formules (1) homogènes, on peut écrire

$$(1)'\quad \begin{cases} \theta X = a(x\sin\alpha - y\cos\alpha - pz), \\ \theta Y = b(x\sin\beta - y\cos\beta - qz), \\ \theta Z = c(x\sin\gamma - y\cos\gamma - rz). \end{cases}$$

On voit ainsi que l'on retrouverait les formes normales en changeant α, β, γ en $\alpha + \frac{\pi}{2}$, $\beta + \frac{\pi}{2}$, $\gamma + \frac{\pi}{2}$, aux facteurs a, b, c près ; ceci est une simple vérification.

Cherchons maintenant la condition d'orthogonalité de deux droites, c'est-à-dire la relation qui doit exister entre u, v, w et u', v', w' pour que les deux droites

$$uX + vY + wZ = 0, \qquad u'X + v'Y + w'Z = 0$$

soient rectangulaires. A l'aide des formules de transformation (1)', cette relation est

$$(au\sin\alpha + bv\sin\beta + cw\sin\gamma)(au'\sin\alpha + bv'\sin\beta + cw'\sin\gamma)$$
$$+ (au\cos\alpha + bv\cos\beta + cw\cos\gamma)(au'\cos\alpha + bv'\cos\beta + cw'\cos\gamma) = 0:$$

elle se simplifie aisément et devient, en tenant compte de $\gamma - \beta = \pi - A$, $\alpha - \gamma = \pi - B$, $\beta - \alpha = \pi - C$,

$$(3)\quad a^2uu' + b^2vv' + c^2ww' - bc\cos A(vw' + wv') - ca\cos B(wu' + uw') - ab\cos C(uv' + vu') = 0.$$

Si dans cette relation, nous faisons $u' = u$, $v' = v$, $w' = w$, nous obtenons l'équation tangentielle des points circulaires à l'infini,

$$(4)\qquad a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 2bc\cos A\, vw - 2ca\cos B\, wu - 2ab\cos C\, uv = 0.$$

Désignons par $\Phi(u, v, w)$ le premier membre de cette relation ; la relation (3) s'écrit alors

$$\frac{1}{2}(u'\Phi'_u + v'\Phi'_v + w'\Phi'_w) = 0.$$

Le cosinus de l'angle de deux droites s'obtient tout aussi facilement et a pour expression

$$\cos V = \frac{\frac{1}{2}(u'\Phi'_u + v'\Phi'_v + w'\Phi'_w)}{\sqrt{\Phi(u, v, w)}\sqrt{\Phi(u', v', w')}}. \tag{5}$$

Nous pouvons maintenant employer sans inconvénient les petites lettres x, y, z pour désigner les coordonnées courantes d'un point. Si alors nous exprimons qu'une droite (u, v, w) passe par un point donné (x_0, y_0, z_0) et le point courant (x, y, z), nous aurons deux relations qui nous fourniront pour valeurs de u, v, w les nombres $yz_0 - zy_0$, $zx_0 - xy_0$, $xy_0 - yx_0$; en portant ces valeurs dans la relation $\Phi(u, v, w) = 0$, nous obtenons le couple isotrope issu du point (x_0, y_0, z_0),

$$\Phi(yz_0 - zy_0,\ zx_0 - xz_0,\ xy_0 - yx_0) = 0. \tag{6}$$

En particulier, les couples isotropes issus des sommets A, B, C du triangle de référence se déduisent de là, en y faisant $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, puis $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$, puis enfin $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$. Ils ont pour équations

$$\left\{\begin{aligned} &b^2z^2 + c^2y^2 + 2bc\cos A\,yz = 0,\\ &c^2x^2 + a^2z^2 + 2ca\cos B\,zx = 0,\\ &a^2y^2 + b^2x^2 + 2ab\cos C\,xy = 0.\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Nous obtiendrons alors l'équation générale des cercles du plan, en considérant l'un quelconque d'entre eux comme une conique passant par les points de rencontre de l'un de ceux-ci avec la droite de l'infini et une droite quelconque du plan. Cette équation est, par exemple,

$$b^2z^2 + c^2y^2 + 2bc\cos A\,yz + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0,$$

u, v, w désignant des nombres arbitraires. Si l'on veut le cercle circonscrit au triangle ABC, il suffira d'exprimer que cette équation est vérifiée par les coordonnées (1,0,0) (0,1,0), (0,0,1) des points A, B, C. On aura ainsi

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0. \tag{8}$$

Si l'on veut le cercle conjugué au triangle ABC, on exprimera que les points A, B, C ont pour polaires respectives les droites $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et l'on obtiendra

$$\frac{\cos A}{a}x^2 + \frac{\cos B}{b}y^2 + \frac{\cos C}{c}z^2 = 0. \tag{9}$$

Nous ne voulons pas développer cette note outre mesure et nous allons, pour terminer, l'appliquer à la solution de la question 682.

Soient $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0$ et $\lambda vw + \mu wu + \nu uv = 0$, les équations ponctuelle et tangentielle des deux coniques circonscrite et inscrite. Pour exprimer qu'elles ont même cercle orthoptique, nous écrivons que les cercles circonscrits aux triangles autopolaires de ces deux coniques forment le même système. Représentons l'un quelconque de ces cercles par

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0\ ;$$

en exprimant que l'invariant θ commun à ce cercle et à chacune des coniques précédentes est nul, nous avons les deux relations

$$u(\alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma) + v(\beta^2 - \beta\gamma - \alpha\beta) + w(\gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha) - a^2\beta\gamma - b^2\gamma\alpha - c^2\alpha\beta = 0,$$
$$u(\mu + \nu) + v(\lambda + \nu) + w(\lambda + \mu) + a^2\lambda + b^2\mu + c^2\nu = 0.$$

Si l'on écrit que ces deux relations en u, v, w sont identiques, on obtient la relation

$$(b^2+c^2-a^2)\alpha^2+(c^2+a^2-b^2)\beta^2+(a^2+b^2-c^2)\gamma^2=0,$$

qui se transforme immédiatement en

$$(10)\qquad \frac{\cos A}{a}\alpha^2+\frac{\cos B}{b}\beta^2+\frac{\cos C}{c}\gamma^2=0.$$

Cette relation entre α, β, γ représente aussi le lieu du pôle de la droite indiquée dans la deuxième partie, car le pôle de cette droite a pour coordonnées α, β, γ. Ce lieu est donc le cercle conjugué au triangle ABC.

D'autre part, l'équation de cette droite est $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=0$; l'équation tangentielle de son enveloppe est donc

$$(11)\qquad \frac{\cos A}{a}v^2w^2+\frac{\cos B}{b}w^2u^2+\frac{\cos C}{c}u^2v^2=0.$$

C'est l'équation d'une courbe de quatrième classe ayant trois tangentes doubles ; par conséquent, cette courbe est la transformée homographique d'une hypocycloïde à quatre rebroussements.

L'équation ponctuelle de cette enveloppe s'obtient en exprimant que les dérivées partielles du premier membre de l'équation (10) et de $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}$, par rapport à α, β, γ, sont proportionnelles, ce qui donne

$$\frac{\frac{\cos A}{a}\alpha^2}{x}=\frac{\frac{\cos B}{b}\beta^2}{y}=\frac{\frac{\cos C}{c}\gamma^2}{z},$$

puis en éliminant α, β, γ entre ces deux équations et l'équation de la droite, par exemple ; nous obtenons d'abord

$$\frac{\alpha}{\left(\frac{ax}{\cos A}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{\beta}{\left(\frac{by}{\cos B}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{\gamma}{\left(\frac{cz}{\cos C}\right)^{\frac{1}{3}}},$$

puis, finalement,

$$(12)\qquad \left(\frac{\cos A}{a}\right)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\cos B}{b}\right)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\cos C}{c}\right)^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}}=0.$$

Quant au lieu du centre de l'une des coniques (α, β, γ), c'est le lieu du pôle de la droite de l'infini. L'équation de ce lieu s'obtient immédiatement dans le cas actuel :

$$(13)\qquad \frac{\cos A}{a}x^2(y+z-x)^2+\frac{\cos B}{b}y^2(z+x-y)^2+\frac{\cos C}{c}z^2(x+y-z)^2=0.$$

Elle représente une courbe du quatrième degré, ayant pour points doubles les milieux des côtés du triangle.

A l'aide des formules de transformation

$$y+z-x=6X,\qquad z+x-y=6Y,\qquad x+y-z=6Z,$$

elle prend la forme plus simple,

$$\frac{\cos A}{a}X^2(Y+Z)^2+\frac{\cos B}{b}Y^2(Z+X)^2+\frac{\cos C}{c}Z^2(X+Y)^2=0.$$

Le triangle de référence est alors le triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du précédent, et la forme nouvelle montre immédiatement que les points doubles sont des points isolés.

Nous avons reçu de M. L. BICART, lieutenant d'artillerie à Vannes, une excellente solution analytique semblable à la précédente et une solution géométrique basée sur les mêmes idées.

Très bonne solution aussi, mais un peu plus longue, de M. C. GROLLEAU, Répétiteur Général au lycée de Marseille.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1897)

I. — Mathématiques spéciales.

677. — *On considère un paraboloïde équilatère ayant pour équation par rapport à des axes rectangulaires*

$$z = xy;$$

on prend sur l'axe Ox *un segment*

$$OM = \lambda$$

et sur l'axe Oy *un segment*

$$OM' = \mu,$$

ces deux segments étant liés par une relation de la forme

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0,$$

où a, b, c, d *désignent des constantes réelles.*

1° *Trouver la courbe* Γ, *lieu du point de rencontre de la génératrice rectiligne* MG *du paraboloïde passant par le point* M *de* Ox *avec le plan mené par* Oz *perpendiculairement à la droite* MM'.

2° *Combien existe-t-il de surfaces du deuxième ordre qui passent par cette courbe* Γ; *étudier le nombre des points d'intersection de* Γ *avec les génératrices rectilignes du paraboloïde donné; discuter la réalité de ces points.*

3° *Etablir la relation nécessaire et suffisante qui doit lier les abscisses* x_1, x_2, x_3, x_4 *de quatre points de la courbe* Γ, *pour que ces quatre points soient dans un même plan. Former l'équation aux abscisses des points où le plan osculateur coupe la courbe en quatre points confondus; résoudre et discuter cette équation.*

Indiquer le nombre de plans osculateurs qu'on peut mener d'un point de l'espace à la courbe Γ.

4° *Comment faut-il déterminer les coefficients* a, b, c, d *pour que les tangentes à la courbe* Γ *fassent partie d'un complexe linéaire?*

5° *On désigne par* Γ_1 *la courbe du quatrième ordre qui correspond à cette détermination particulière des constantes* a, b, c, d. *Déterminer les points de contact des plans osculateurs menés d'un point donné* P *de l'espace à cette courbe* Γ_1; *démontrer que ces points sont dans un plan passant par* P.

Nota. — *On dit qu'une droite mobile*

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

appartient à un complexe linéaire, quand les coefficients $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$ *vérifient une équation de la forme*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + L(\gamma y_0 - \beta z_0) + M(\alpha z_0 - \gamma x_0) + N(\beta x_0 - \alpha y_0) = 0,$$

A, B, C, L, M, N *désignant des constantes.*

Les deux systèmes de génératrices du paraboloïde $z = xy$ ont pour équations

$$(G)\left\{\begin{array}{l} x = \lambda, \\ z = \lambda y, \end{array}\right. \qquad (G')\left\{\begin{array}{l} y = \mu, \\ z = \mu x, \end{array}\right.$$

et si l'on considère les génératrices qui passent en M et M', on a, entre λ et μ, la relation

$$(1) \qquad a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0.$$

1. Le plan mené par Oz perpendiculairement à la droite MM' a pour équation $\lambda x - \mu y = 0$.

Nous aurons le lieu demandé en éliminant λ et μ entre les équations (G), (1) et $\lambda x - \mu y = 0$. Nous obtenons ainsi successivement $\lambda = x$, $\mu = -\dfrac{bx+d}{ax+c}$, puis les deux équations

$$(\Gamma)\qquad \begin{cases} y = -\dfrac{x^2(ax+c)}{bx+d}, \\[2ex] z = -\dfrac{x^3(ax+c)}{bx+d}, \end{cases}$$

qui représentent le lieu demandé.

2. Pour obtenir les surfaces du second degré qui contiennent la courbe Γ, nous allons exprimer que l'équation aux abscisses des points de rencontre de la courbe Γ avec la surface du second degré,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

est identiquement vérifiée. Cette équation est

$$\begin{aligned} Ax^2(bx+d)^2 + A'x^4(ax+c)^2 + A''x^6(ax+c)^2 + 2Bx^3(ax+c)^2 - 2B'x^4(ax+c)(bx+d) - 2B''x^3(ax+c)(bx+d) \\ + 2Cx(bx+d)^2 - 2C'x^2(ax+c)(bx+d) - 2C''x^3(ax+c)(bx+d) + D(bx+d)^2 = 0; \end{aligned}$$

nous supposerons ici la relation (1) quelconque et, en particulier, ses divers coefficients différents de 0. Alors, en annulant successivement les termes du 8e et du 7e degré, nous aurons $A'' = 0$ et $B'' = 0$; l'équation étant vérifiée pour $x = 0$, nous aurons ensuite $D = 0$; nous diviserons ensuite par x et nous aurons de la même façon $C = 0$; nous annulerons ensuite $ax + c$ et $bx + d$ et nous aurons $A = 0$, $A' = 0$; divisant de nouveau par x et faisant $x = 0$, nous aurons $C' = 0$; par suite, l'identité à vérifier se réduit finalement à $B'x + B'' + C'' \equiv 0$, et celle-ci donne immédiatement $B' = 0$, $B'' = -C''$. Il n'y a donc qu'une surface du second degré passant par la quartique Γ; c'est le paraboloïde donné $z = xy$.

La génératrice (G), de paramètre λ, rencontre la quartique en un point unique dont les coordonnées sont

$$x = \lambda, \qquad y = -\frac{\lambda^2(a\lambda+c)}{b\lambda+d}, \qquad z = -\frac{\lambda^3(a\lambda+c)}{b\lambda+d}.$$

Quant à la génératrice G', de paramètre μ, elle rencontre la courbe en trois points dont les abscisses sont données par l'équation

$$(2)\qquad ax^3 + cx^2 + b\mu x + d\mu = 0.$$

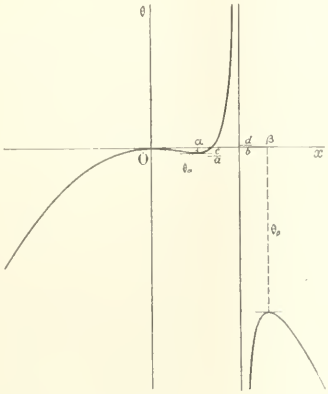
Pour discuter cette équation, nous la mettrons sous la forme

$$\frac{ax^3 + cx^2}{bx+d} + \mu = 0,$$

et nous étudierons les variations de la fonction $\theta = \dfrac{ax^3+cx^2}{bx+d}$. Cette fonction est discontinue pour $x = -\dfrac{d}{b}$, nulle pour $x = 0$ et pour $x = -\dfrac{c}{a}$; sa dérivée est $\theta' = x\dfrac{2abx^2 + (3ad+bc)x + 2cd}{(bx+d)^2}$, et, pour reconnaître ses signes, il faut trouver les racines du trinome qui figure au numérateur. Or la condition de réalité de ces racines est $(3ad+bc)^2 - 16abcd > 0$ ou $(9ad-bc)(ad-bc) \geqslant 0$; si nous supposons $bc > 0$, elle est remplie soit quand on a $bc < ad$, soit quand on a $\dfrac{bc}{9} > ad$.

Nous nous placerons dans le premier cas; nous supposerons en outre, pour fixer les idées, $ab < 0$, et, comme nous pouvons évidemment toujours supposer $a > 0$, nous serons dans le cas marqué par les inégalités $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$ et $ad > bc$, la dernière entraînant d'ailleurs la quatrième. Chaque autre cas pourrait se discuter d'une manière semblable à celle-ci et nous nous bornerons à étudier le cas précis que nous venons de fixer.

x	θ'	θ
$-\infty$		$-\infty$
	$+$	croit
0	0	0 Max.
	$-$	décroit
α	0	θ_2 min.
		croit
$-\dfrac{d}{b}$	$+$	$\dfrac{+\infty}{-\infty}$
		croit
β	0	θ_3 Max.
	$-$	décroit
$+\infty$		$-\infty$



Les deux racines du trinome sont alors réelles et positives et la valeur $-\dfrac{d}{b}$ est comprise entre elles. Si nous désignons par α et β ces deux racines, nous pourrons immédiatement construire le tableau des variations de la fonction θ et en déduire la forme de la courbe représentative. Pour préciser la forme de cette courbe, nous remarquerons que $\theta_2 < \theta_3$, sans quoi une parallèle à Ox rencontrerait la courbe en plus de trois points, ce qui est manifestement impossible.

Cela posé, on voit aisément que, pour toutes les valeurs négatives de μ, il y a une solution et une seule; que, pour les valeurs positives comprises entre 0 et $-\theta_2$, il y a trois solutions; une seule, pour les valeurs comprises entre $-\theta_2$ et $-\theta_3$; et enfin, trois pour les valeurs de μ supérieures à $-\theta_3$.

3. L'équation aux abscisses des points de rencontre de la courbe Γ avec un plan donné $ux + vy + wz + p = 0$ est

$$awx^4 + (av + cw)x^3 + (cv - bu)x^2 - (bp + du)x - dp = 0:$$

elle conduit aux relations

$$\frac{v}{w} + \frac{c}{a} = -S_1, \qquad \frac{c}{a}\frac{v}{w} - \frac{b}{a}\frac{u}{w} = S_2, \qquad \frac{d}{a}\frac{u}{w} + \frac{b}{a}\frac{p}{w} = S_3, \qquad \frac{d}{a}\frac{p}{w} = -S_4,$$

et celles-ci donnent successivement

$$\frac{v}{w} = -S_1 - \frac{c}{a}, \qquad \frac{u}{w} = -\frac{a}{b}\left(S_2 + \frac{c}{a}S_1 + \frac{c^2}{a^2}\right),$$

$$\frac{p}{w} = \frac{a}{b}\left[S_3 + \frac{d}{b}S_2 + \frac{cd}{ab}S_1 + \frac{dc^2}{ba^2}\right].$$

Cette dernière équation conduit immédiatement à la relation cherchée

$$(3) \qquad S_4 + \frac{d}{b}S_3 + \frac{d^2}{b^2}S_2 + \frac{c}{a}\frac{d^2}{b^2}S_1 + \frac{c^2}{a^2}\frac{d^2}{b^2} = 0.$$

Dans tout ceci, S_1, S_2, S_3, S_4 désignent les sommes des produits une à une, deux à deux, etc., des abscisses des points de rencontre de la courbe Γ avec le plan considéré.

Nous obtenons l'équation aux abscisses des points où le plan osculateur coupe la courbe en quatre points confondus, en faisant, dans la relation (3), $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$: cette équation est

$$(4) \qquad x^4 + 4\frac{d}{b}x^3 + 6\frac{d^2}{b^2}x^2 + 4\frac{c}{a}\frac{d^2}{b^2}x + \frac{c^2}{a^2}\frac{d^2}{b^2} = 0.$$

En lui appliquant la méthode de Ferrari, on la met immédiatement sous la forme

$$\left(x^2 + 2\frac{d}{b}x + \frac{dc}{ab}\right)^2 = \frac{2d(bc - ad)}{ab^2}x^2.$$

Dans le cas où nous nous sommes placé antérieurement, le nombre $\frac{d(bc-ad)}{a}$ est négatif et les abscisses cherchées sont imaginaires. La résolution de l'équation ne présente aucune difficulté.

Pour former l'équation du plan osculateur au point d'abscisse x, nous appellerons x' l'abscisse du point où le plan osculateur rencontre la courbe sans la toucher, et nous ferons, dans la relation (3), $x_1 = x_2 = x_3 = x$ et $x_4 = x'$; nous aurons ainsi entre x et x' la relation

$$x^3x' + \frac{d}{b}(x^4 + 3x^3x') + \frac{d^2}{b^2}(3x^2 + 3xx') + \frac{c}{a}\frac{d^2}{b^2}(3x + x') + \frac{c^2}{a^2}\frac{d^2}{b^2} = 0,$$

et nous en déduirons

$$x' = -\frac{\frac{d}{b}x^3 + 3\frac{d^2}{b^2}x^2 + 3\frac{c}{a}\frac{d^2}{b^2}x + \frac{c^2}{a^2}\frac{d^2}{b^2}}{x^3 + 3\frac{d}{b}x^2 + 3\frac{d^2}{b^2}x + \frac{c}{a}\frac{d^2}{b^2}};$$

nous transformerons par le même procédé les valeurs de $\frac{v}{w}$, $\frac{u}{w}$ et $\frac{p}{w}$, trouvées antérieurement, et nous aurons d'abord

$$\frac{u}{w} = -\frac{a}{b}\left[3x^2 + 3xx' + \frac{c}{a}(3x + x') + \frac{c^2}{a^2}\right],$$

$$\frac{v}{w} = -3x - x' - \frac{c}{a}, \qquad \frac{p}{w} = -\frac{a}{d}x^3x';$$

nous remplacerons ensuite, dans ces expressions, x' par sa valeur en fonction de x, telle que nous venons de la calculer et nous aurons finalement pour équation du plan osculateur

$$\left[\frac{a}{b}\left(3x^3 + 6\frac{d}{b}x^4 - 6\frac{c}{a}\frac{d^2}{b^2}x - 3\frac{c^2}{a^2}\frac{d^2}{b^2}x\right) + \frac{c}{b}\left(3x^4 + 8\frac{d}{b}x^3 + 6\frac{d^2}{b^2}x^2 - \frac{c^2d^2}{a^2b^2}\right) + \frac{c^2}{ab}\right]X$$
$$+\left[3x^4 + 8\frac{d}{b}x^3 + 6\frac{d^2}{b^2}x^2 - \frac{c^2}{a^2}\frac{d^2}{b^2} + \frac{c}{a}\right]Y - \left[x^4 + 3\frac{d}{b}x^2 + 3\frac{d^2}{b^2}x + \frac{c}{a}\frac{d^2}{b^2}\right]Z$$
$$-\frac{a}{d}x^4\left(\frac{d}{b}x^3 + 3\frac{d^2}{b^2}x^2 + 3\frac{c}{a}\frac{d^2}{b^2}x + \frac{c^2}{a^2}\frac{d^2}{b^2}\right) = 0.$$

Cette équation montre immédiatement que, par un point de l'espace, il passe six plans osculateurs à la courbe Γ.

4. Formons les équations de la tangente au point (x, y, z) à la courbe Γ; ces équations sont $\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$, en désignant par x', y', z' les dérivées de x, y, z par rapport à x. Par conséquent, nous avons à voir si l'on peut déterminer A, B, C, D, E, F de façon que l'équation suivante soit identique en x:

$$Ax' + By' + Cz' + D(yz' - zy') + E(zx' - xz') + F(xy' - yx') = 0.$$

Nous ne nous arrêterons pas à la formation de cette équation, qui ne présente aucune difficulté, et nous écrirons de suite l'identité à vérifier :

$$A(bx+d)^2 - B[2abx^3 + (3ad+bc)x^2 + 2cdx] - C[3abx^4 + (4ad+2bc)x^3 + 3cdx^2] + Dx^4(ax+c)^2$$
$$+ Ex^3[2abx^2 + (3ad+bc)x + 2cd] - Fx^2[abx^2 + 2adx + cd] \equiv 0.$$

Si nous voulons que la courbe Γ reste une quartique, nous ne prendrons ni $a = 0$, ni $d = 0$; nous supposerons donc, pour cette raison, $ad \neq 0$. Alors, en faisant $x = 0$, nous avons de suite $A = 0$; nous supprimons ensuite le facteur x et nous faisons de nouveau $x = 0$, nous obtenons $B = 0$ ou $c = 0$; si donc nous supposons $c \neq 0$, nous avons $B = 0$. D'autre part, en annulant

le terme de plus haut degré nous avons $D = 0$ et il ne reste plus que les termes qui multiplient C, E et F; nous pouvons encore les diviser par x et nous sommes ramenés à l'identité

$$C[3abx^2 + (4ad + 2bc)x + 3cd] + F(abx^2 + 2adx + cd) - Ex(2abx^2 + 3ad + bc)x + 2cd) = 0.$$

Faisons $x = 0$ dans cette identité; nous obtenons $F = -3c$, et elle se réduit à

$$2C(bc - ad) - E[2abx^2 + (3ad + bc)x + 2cd] = 0.$$

Elle donne, ou bien $bc - ad = 0$, et, dans ce cas, la courbe Γ est une cubique, ou bien $C = 0$ et $E = 0$, et, dans ce cas, l'identité n'est possible pour aucun système de valeurs non nulles des coefficients A, B, C, D, E, F.

Il faut donc revenir en arrière et, au lieu de prendre $B = 0$, prendre $c = 0$. Alors, comme nous pouvons toujours supposer $A = 0$, $D = 0$, pour les raisons signalées antérieurement, l'identité à satisfaire se réduit à

$$-B(2abx + 3ad) - Cx(3abx + 4ad) + Ex^2(2abx + 3ad) - Fx(abx + 2ad) = 0.$$

En y faisant $x = 0$, elle donne $B = 0$, puis elle devient

$$-C(3abx + 4ad) + Ex(2abx + 3ad) - F(abx + 2ad) = 0;$$

$x = 0$ donne encore $F = -2C$, et, par suite, nous avons à vérifier

$$E(2abx + 3ad) - Cab = 0.$$

Si b n'est pas nul, il faut prendre $E = 0$ et $C = 0$, l'identité est impossible; mais si b est nul, il suffit de prendre $E = 0$ et il reste deux coefficients non nuls C et F; on peut prendre $C = 1$, $F = -2$. La quartique Γ_1 a alors pour équation

$$y = -\frac{a}{d}x^3, \qquad z = -\frac{a}{d}x^4,$$

ou, en posant $-\frac{a}{d} = k$, $\qquad y = kx^3, \qquad z = kx^4.$

5. La dernière partie du problème est alors facile à traiter: on obtient de suite l'équation du plan osculateur au point d'abscisse x,

$$2kx^3X - 2xY + Z - kx^4 = 0;$$

elle montre que par un point (α, β, γ) de l'espace il passe quatre plans osculateurs à Γ_1, et que les abscisses des points de contact sont données par l'équation

$$kx^4 - 2k\alpha x^3 + 2\beta x - \gamma = 0;$$

en outre, on voit de suite que la somme des produits deux à deux des racines est nulle. D'autre part, l'équation aux abscisses des points de rencontre de Γ_1 avec un plan quelconque, $ux + vy + wz + p = 0$, est

$$wkx^4 + vkx^3 + ux + p = 0,$$

et elle montre que la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de Γ_1 soient dans un même plan est que la somme des produits deux à deux de leurs abscisses soit nulle: donc les quatre points de contact des plans osculateurs envisagés sont dans un même plan. Nous aurons maintenant le plan de ces quatre points en identifiant les deux équations du quatrième degré. Ce calcul donne

$$\frac{w}{1} = \frac{v}{-2\alpha} = \frac{u}{2\beta} = \frac{p}{-\gamma};$$

le plan cherché a donc pour équation

$$2\beta x - 2\alpha y + z - \gamma = 0,$$

et il est visible qu'il passe au point (α, β, γ).

Bonne solution de M. L. Sayous.

II. — Mathématiques élémentaires

(Solution analytique (*) par M. **V. Hioux**.)

1° *Les droites* Δ *qui sont coupées harmoniquement par deux cercles donnés* C *et* C′ *enveloppent une conique ; montrer que cette conique reste la même lorsqu'on remplace les deux cercles* C *et* C′ *par deux autres respectivement concentriques aux précédents et tels que la somme des carrés des rayons des deux nouveaux cercles soit égale à la somme des carrés des rayons des deux premiers.*

2° *Trouver le lieu des centres des cercles* S *qui sont coupés harmoniquement par deux cercles donnés* C *et* C′ *et qui sont orthogonaux à un troisième cercle donné* Γ. *Ce lieu est une conique* Σ *dont on déterminera les directions asymptotiques et dont on discutera le genre en admettant que le centre de* Γ *se déplace d'une façon quelconque dans le plan, tandis que les cercles* C *et* C′ *restent fixes.*

On montrera que la direction des axes de Σ *ne dépend que des positions des centres des trois cercles donnés et nullement de leurs rayons.*

3° *Trouver le lieu du centre de la conique* Σ *dans les deux hypothèses suivantes :* 1° *on fait varier le rayon du cercle* Γ *en laissant fixes le centre de ce cercle et les deux cercles* C *et* C′ *;* 2° *on laisse fixe le cercle* Γ, *ainsi que les centres de* C *et* C′, *et on fait varier les rayons de ces deux derniers cercles de telle sorte que la somme de leurs carrés reste constante.*

4° *Démontrer que les cercles* S *orthogonaux au cercle* Γ *et coupés harmoniquement par deux cercles* C *et* C′ *sont aussi coupés harmoniquement par une infinité de couples de cercles que l'on cherchera à caractériser géométriquement.*

Nota. — *On dit qu'un cercle* S *est coupé harmoniquement par deux cercles* C *et* C′, *lorsque le rapport anharmonique des deux points de rencontre de* S *avec* C *et des deux points de rencontre de* S *avec* C′ *est, sur le cercle* S, *égal à* -1.

1. Prenons pour axes de coordonnées la ligne des centres de C et de C′ et la perpendiculaire élevée au milieu de cette ligne, et désignons par $2d$ la distance des centres. Les équations des cercles seront

$$C \equiv x^2 + y^2 - 2dx + d^2 - R^2 = 0,$$
$$C' \equiv x^2 + y^2 + 2dx + d^2 - R'^2 = 0.$$

Soit alors $ux + vy + w = 0$ l'équation d'une droite Δ ; formons les équations aux abscisses des points de rencontre de cette droite avec les cercles C et C′,

$$(u^2 + v^2)x^2 + 2(uw - dv^2)x + w^2 + (d^2 - R^2)v^2 = 0,$$
$$(u^2 + v^2)x^2 + 2(uw + dv^2)x + w^2 + (d^2 - R'^2)v^2 = 0;$$

nous aurons l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites Δ en exprimant que les racines de ces deux trinomes se divisent harmoniquement, c'est-à-dire que leur invariant commun $(ac' + ca' - 2bb')$ est nul. Ce calcul nous donne l'équation

$$(1) \qquad (k^2 - 2d^2)u^2 + (k^2 - 4d^2)v^2 - 2w^2 = 0,$$

dans laquelle $k^2 = R^2 + R'^2$. Donc la droite Δ enveloppe une conique rapportée à ses axes et dont l'équation ponctuelle est

$$\frac{x^2}{k^2 - 2d^2} + \frac{y^2}{k^2 - 4d^2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Nous voyons de suite que cette conique admet les centres de C et C′ pour foyers et qu'elle ne dépend

(*) Une solution géométrique a paru dans le n° du 1er Décembre 1897 du *Journal de Mathématiques élémentaires*.

pas des deux rayons R et R′ pris individuellement, mais simplement de la somme de leurs carrés, k^2.

D'après un théorème bien connu relatif à la longueur d'une médiane dans un triangle, on a toujours $k^2 \geqslant 2d^2$ quand les cercles se touchent ou se coupent ; dans l'un ou l'autre de ces cas, la conique (1) est donc une hyperbole ou une ellipse réelle ; c'est une hyperbole tant que k^2 est compris entre $2d^2$ et $4d^2$, et une ellipse réelle dès que $k^2 > 4d^2$; pour $k^2 = 4d^2$, l'équation (1) représente deux points, les centres de C et de C′ : on retombe ainsi sur une propriété bien connue relative aux diamètres de deux cercles orthogonaux.

Mais si les cercles ne se coupent pas, il peut arriver que k^2 soit moindre que $2d^2$; alors la conique (1) est imaginaire et il n'y a pas de droites Δ qui soient réelles. Il peut se faire aussi, dans ce cas, que k^2 soit plus grand que $2d^2$; il est alors toujours moindre que $4d^2$ et la conique (1) est une hyperbole.

Tout ce que nous venons de dire sur cette première partie se déduit aisément de ce théorème : *l'enveloppe des droites Δ qui sont divisées harmoniquement par deux coniques données est une autre conique ayant pour triangle autopolaire le triangle autopolaire commun à ces deux coniques et tangente aux huit droites qui touchent respectivement les deux coniques données en leurs quatre points de rencontre*

2. Nous nous appuierons sur cette propriété très connue que si deux couples de points A, A′ et B, B′ situés sur une même conique se divisent harmoniquement, chacune des cordes AA′ et BB′ passe par le pôle de l'autre, et réciproquement. Prenons alors pour axes deux diamètres rectangulaires quelconques du cercle Γ, et posons

$$C \equiv X^2 + Y^2 - 2aX - 2bY + c = 0,$$
$$C' \equiv X^2 + Y^2 - 2a'X - 2b'Y + c' = 0,$$
$$\Gamma \equiv X^2 + Y^2 - \rho^2 = 0,$$
$$S \equiv X^2 + Y^2 - 2xX - 2yY + \lambda = 0;$$

en écrivant que les cercles Γ et S sont orthogonaux, nous avons de suite $\lambda = \rho^2$. D'autre part, les cordes qui supportent les couples de points de rencontre de S avec C et de S avec C′ sont les axes radicaux des couples (S, C) et (S, C′); elles ont donc pour équations

$$2X(x-a) + 2Y(y-b) + c - \rho^2 = 0,$$
$$2X(x-a') + 2Y(y-b') + c' - \rho^2 = 0;$$

il n'y a plus qu'à exprimer que le pôle de l'une, de la première par exemple, est situé sur l'autre. Or ce point est déterminé par les deux équations

$$\frac{X-x}{2(x-a)} = \frac{Y-y}{2(y-b)} = \frac{-\alpha X - \beta Y + \rho^2}{c-\rho^2};$$

on en déduit aisément

$$\frac{X-x}{2(x-a)} = \frac{Y-y}{2(y-b)} = \frac{\rho^2 - x^2 - y^2}{2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + c - \rho^2} = \frac{-\Gamma}{C+\Gamma}.$$

D'ailleurs, ce point satisfait à l'équation de la seconde corde, et celle-ci peut s'écrire

$$2(X-x)(x-a') + 2(Y-y)(y-b') + C' + \Gamma = 0;$$

la relation entre x et y est dès lors immédiate : c'est

$$(2) \qquad (C-\Gamma)(C'-\Gamma) - 2H\Gamma = 0,$$

en désignant par H le premier membre de la condition d'orthogonalité de C et de C′,

$$H = 2aa' + 2bb' - c - c'.$$

Cette équation nous montre que le lieu du centre du cercle S est une conique Σ qui passe aux quatre points de rencontre du cercle Γ avec les cercles C et C′. En outre, la forme de l'équation (2) est indépen-

dante des axes de coordonnées choisis et rien ne nous empêche plus maintenant de prendre tel système d'axes de coordonnées qui nous plaira : l'équation (2) gardera la même forme synthétique.

Pour traiter les questions relatives à cette conique Σ, nous revenons aux axes primitifs et nous posons

$$C \equiv x^2 + y^2 - 2dx + d^2 - R^2 = 0,$$
$$C' \equiv x^2 + y^2 + 2dx + d^2 - R'^2 = 0,$$
$$\Gamma \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0;$$

la quantité H est ici $H = R^2 + R'^2 - 4d^2$ ou $H = k^2 - 4d^2$. Les directions asymptotiques sont fournies par l'équation

$$2[(\alpha - d)x + \beta y][(\alpha + d)x + \beta y] - H(x^2 + y^2) = 0;$$

nous voyons de suite qu'elles ont les mêmes bissectrices que le couple de droites

$$(\alpha - d)x + \beta y = 0, \qquad (\alpha + d)x + \beta y = 0,$$

lequel ne dépend que des positions des centres et nullement des rayons des cercles ; les directions des axes de Σ sont donc invariables quand les rayons seuls changent.

Exprimons maintenant que la conique Σ est une ellipse ; nous avons

$$2\alpha^2(k^2 - 4d^2) + 2\beta^2(k^2 - 2d^2) - (k^2 - 2d^2)(k^2 - 4d^2) < 0;$$

la courbe séparatrice est la conique (1) déjà trouvée.

Quand la conique (1) est une ellipse imaginaire, c'est-à-dire quand $k^2 - 2d^2$ et $k^2 - 4d^2$ sont négatifs, l'inégalité précédente est toujours vérifiée, la conique Σ est une ellipse dans tous les cas. Si la conique (1) est une hyperbole, c'est-à-dire si $k^2 - 2d^2$ est positif et $k^2 - 4d^2$ négatif, la conique Σ est une ellipse quand le point (α, β) n'est pas dans la région du centre ; c'est une hyperbole si le point (α, β) est dans la région du centre. Enfin, quand la conique (1) est une ellipse réelle, c'est-à-dire quand $k^2 - 2d^2$ et $k^2 - 4d^2$ sont positifs, la conique Σ est une ellipse si le point (α, β) est intérieur à l'ellipse ; c'est une hyperbole dans le cas contraire. En résumé, pour que la conique Σ soit une hyperbole, il faut que du point (α, β) on puisse mener des tangentes à la conique (1). Ce fait va recevoir une explication très simple.

Nous avons vu, en effet, que la conique (1) a pour équation tangentielle

$$(H + 2d^2)u^2 + Hv^2 - 2w^2 = 0;$$

si donc nous menons à cette conique des tangentes par le point (α, β), nous avons en u et v l'équation

$$(H + 2d^2)u^2 + Hv^2 - 2(u\alpha + v\beta)^2 = 0;$$

en y faisant $u = x$, $v = y$, cette équation est identique à celle des directions asymptotiques de Σ ; donc les directions asymptotiques de Σ sont perpendiculaires aux tangentes menées à la conique (1) par le point (α, β). Ce résultat est d'ailleurs très facile à démontrer géométriquement en s'appuyant sur la première partie et sur ce que le centre d'un cercle ne peut aller à l'infini que lorsque ce cercle dégénère en une ligne droite.

3. Restons dans le premier système d'axes et posons

$$P \equiv 2(\alpha - d)x + 2\beta y + d^2 - R^2 - \gamma,$$
$$P' \equiv 2(\alpha + d)x + 2\beta y + d^2 - R'^2 - \gamma,$$

nous aurons

$$\Sigma \equiv PP' - 2H\Gamma = 0;$$

les équations du centre sont donc

$$(\alpha - d)P' + (\alpha + d)P - 2H(x - \alpha) = 0,$$
$$\beta P' + \beta P - 2H(y - \beta) = 0.$$

Pour avoir le lieu du centre quand le rayon de Γ varie seul, il faut éliminer γ entre ces deux équations; dans la première, le coefficient de γ est -2α, dans la seconde, il est -2β; il n'y a donc qu'à multiplier la première par β, la seconde par $-\alpha$ et ajouter. On trouve ainsi

$$(3) \qquad \beta d(P - P') + 2H(\alpha y - \beta x) = 0;$$

le lieu est donc une droite qui passe au point de rencontre de $\alpha y - \beta x = 0$ avec $P - P' = 0$, c'est-à-dire par le point de rencontre de la droite qui joint le centre de Γ au milieu de la ligne des centres de C et C' avec l'axe radical de ces deux cercles; il est facile de vérifier, en outre, que cette droite est perpendiculaire à la polaire du point (α, β) par rapport à la conique (1).

Si l'on fait varier maintenant simplement R et R' de façon que k^2 ou H reste constant, la seconde équation du centre est invariable, et, par suite, représente le lieu du centre de Σ. Ce lieu est donc la droite

$$(4) \qquad \beta(P + P') - 2H(y - \beta) = 0.$$

4. Revenons au second système d'axes formé par deux diamètres rectangulaires quelconques du cercle Γ, et proposons-nous de chercher quels couples de cercles C et C' il faut prendre pour que le faisceau des cercles S ne change pas. Γ étant fixe, chaque cercle S est caractérisé par son centre; il suffit donc d'exprimer que la conique Σ ne change pas. Si donc on regarde la conique Σ comme donnée, le but sera atteint en déterminant C et C' de façon que l'équation (2) ne change pas. Remarquons d'abord que les axes radicaux de C et Γ, de C' et Γ constituent un système de sécantes communes à Σ et à Γ; par conséquent, les cercles C et C' devront déjà avoir pour axes radicaux respectifs avec Γ les deux sécantes communes de l'un des trois systèmes relatifs à Σ et à Γ. Si nous désignons ensuite par Q et Q' les formes normales de ces deux droites et par ρ et ρ' les distances des centres de C et C' au centre de Γ, l'équation (2) s'écrira $2\rho\rho' QQ' - H\Gamma = 0$; il faut donc en outre $\frac{2\rho\rho'}{H} = c^{te} = p$; par suite, $2\rho\rho' = p.H$; mais les centres de C et C' se meuvent sur les perpendiculaires abaissées de l'origine sur les deux sécantes communes envisagées; ils ont donc pour coordonnées $\rho\cos\varphi$, $\rho\sin\varphi$ et $\rho'\cos\varphi'$, $\rho'\sin\varphi'$; en outre, $H = R^2 + R'^2 - \delta^2$, R et R' étant les distances de ces deux points à deux autres points fixes, et δ leur distance même. Il résulte de tout cela que la relation entre ρ et ρ' est homographique et que les centres des cercles C et C' décrivent deux droites sur lesquelles ils tracent deux divisions homographiques. Ces deux droites sont les perpendiculaires aux deux sécantes communes en leurs milieux respectifs. Pour achever de définir cette homographie, il suffit de se donner un cercle S, c'est-à-dire un nouveau point de Σ.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1897)

Physique et Chimie.

663. — *Un objectif photographique est formé de deux verres identiques centrés sur le même axe et placés symétriquement par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe commun. Pour déterminer les constantes optiques du système, on en a mesuré l'épaisseur totale* E, *puis, l'ayant démonté, on a mesuré sur l'une des lentilles*

1° *l'épaisseur* e ;

2° *la distance du foyer extérieur à la face externe* d_1 ;

3° *la distance du foyer extérieur à l'image de la face interne* δ_1 ;

4° la distance du foyer intérieur à la face interne d_2;

5° la distance du foyer intérieur à l'image de la face externe δ_2.

On a trouvé

$$E = 46^{mm}, \qquad d_1 = 326^{mm}, \qquad d_2 = 297^{mm},$$
$$e = 7^{mm},5, \qquad \delta_1 = 329^{mm},86 \qquad \delta_2 = 300^{mm},52.$$

On demande de calculer la distance focale du système et la position des plans principaux.

Enfin, quelles valeurs aurait-on trouvées si, appliquant à l'objectif composé la méthode employée pour une des lentilles, on avait déterminé les distances du foyer principal : 1° à la première surface, 2° à l'image de la dernière ?

Calculons d'abord la distance focale de chaque lentille. La formule de Newton donne, en valeur absolue,

$$f^2 = d_1\delta_2 = d_2\delta_1.$$

Ceci fait, nous allons déterminer la position des points remarquables du système en prenant pour origine le second foyer de la seconde lentille et en appliquant à cette lentille la formule de Newton.

Second foyer du système. — Soit x sa distance à l'origine ; il est conjugué, dans la seconde lentille, du second foyer de la première, ce qui donne

$$[2(d_2+e) - E]x = f^2 = d_1\delta_2,$$

d'où

$$x = \frac{d_1\delta_2}{2(d_2+e) - E}.$$

Second plan principal du système. — Soit y sa distance à l'origine ; à cause de la symétrie du système, le second point principal est conjugué, dans la seconde lentille, du centre du système, ce qui donne

$$\left[d_2 + e - \frac{E}{2}\right]y = d_1\delta_2,$$

d'où

$$y = \frac{2d_1\delta_2}{2(d_2+e) - E}.$$

Distance focale. — La distance focale F du système est égale, en valeur absolue, à $y - x$:

$$F = y - x = \frac{d_1\delta_2}{2(d_2+e) - E} = 174^{mm}.$$

Position des foyers. — L'origine adoptée dans le calcul de x et de y est à une distance d_1 de la seconde face de la seconde lentille. La distance du second foyer du système à cette seconde face est donc

$$d_1 - x = d_1 - \frac{d_1\delta_2}{2(d_2+e) - E} = 152^{mm}.$$

C'est aussi, par raison de symétrie, la distance, toujours en valeur absolue, du premier foyer du système à la première face de la première lentille.

Position des plans principaux. — Le second plan principal du système est, de même, à une distance de la seconde face de la seconde lentille égale à

$$y - d_1 = 22^{mm}.$$

Comme le centre du système est à une distance de la même face égale à $\frac{E}{2} = 23^{mm}$, on voit que les plans principaux sont chacun à 1^{mm} seulement du centre.

Image de la première face dans le système. — L'image de la première face dans la première lentille est à une distance δ_2 du second foyer de cette lentille et, par suite, à une distance $2(d_2+e) - E - \delta_2$

du premier foyer de la seconde. La distance z de l'image cherchée à l'origine primitive est donc donnée par l'équation

$$[2(d_2+e)-E-\delta_2]z = d_1\delta_2$$

Sa distance au second foyer du système est

$$z-x = \frac{d_1\delta_2}{2d_2+e-E-\delta_2} = \frac{d_1\delta_2}{2(d_2+e)-E} = 199^{mm},2.$$

BUNEL, lycée de Rennes.

---

664. — *On fait détoner dans une bombe calorimétrique, dont la température initiale est* 0°, $2^{gr},27$ *d'un explosif solide dont la formule est*

$$C^mH^n(AzO^2)^mO^m.$$

1° *Lorsque l'équilibre de température est établi, on recueille* $0^{gr},45$ *d'eau et un gaz qui, après avoir été traité par la potasse et le pyrogallate alcalin, mesure* 336^{cc} *à* 0° *et à* 760^{mm}. *Calculer la formule la plus simple que l'on puisse attribuer au composé, formule qui sera adoptée comme formule moléculaire.*

2° *La chaleur dégagée dans la réaction est* $3^{Cal},605$. *Calculer la chaleur de formation de l'explosif à partir de ses éléments.*

$$C + O^2 = CO^2 + 94^{Cal},$$

$$H^2 + O = H^2O \text{ liq.} + 69^{Cal}.$$

3° *Calculer la température théorique de la réaction. On admettra que la chaleur moléculaire à volume constant d'un gaz peut être mise sous la forme* $Pc = a + bt$, *dans laquelle*

$a = 0{,}0048$, $b = 0{,}000002$ pour les gaz diatomiques,

$a = 0{,}0062$, $b = 0{,}000005$ pour les gaz triatomiques.

4° *Le volume de la bombe étant* 500^{cc} *calculer la pression théorique au moment de la détonation.*

1. Soit k la fraction de poids moléculaire sur laquelle porte l'expérience. La décomposition effectuée dans la bombe est représentée par l'équation

$$k\left[C^mH^n(AzO^2)^mO^m = mCO^2 + \frac{n}{2}H^2O + \frac{m}{2}Az^2 + \left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)O^2\right].$$

Les données numériques permettent d'écrire les équations

$$k(74m+n) = 2{,}27, \qquad k\frac{n}{2} = 0{,}45, \qquad k\frac{m}{2}22{,}4 = 0{,}336.$$

Ces trois équations, qui sont compatibles, donnent

$$km = 0{,}03 \qquad \text{et} \qquad kn = 0{,}05.$$

Prenons $m = 3$ et $n = 5$. La formule cherchée sera

$$C^3H^5(AzO^2)^3O^3 \quad \text{(nitroglycérine)},$$

et la fraction de poids moléculaire décomposée

$$k = \frac{1}{100}.$$

2. Puisque la décomposition de $\frac{1}{100}$ de molécule dégage $3^{Cal},605$, la décomposition d'une molécule dégagerait $360^{Cal},5$; donc, si Q désigne la chaleur de formation cherchée, on a

$$360{,}5 = -Q + 3\times 94 + \frac{5}{2}\times 69,$$

$$Q = 94^{Cal}.$$

3. Remplaçons m et n par leurs valeurs dans l'équation de décomposition :

$$C^3H^5(AzO^2)^3O^3 = 3CO^2 + \frac{5}{2}H^2O + \frac{3}{2}Az^2 + \frac{1}{4}O^2.$$

La chaleur dégagée, $360^{Cal},5$, porte de 0° à la température cherchée $t°$

$$3 + \frac{5}{2} \quad \text{molécules de gaz triatomiques}$$

et

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{molécules de gaz diatomiques.}$$

Donc

$$360,5 = \left(3 + \frac{5}{2}\right)(0,0062 + 0,000005t)t + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)(0,0048 + 0,000002t)t,$$

$$124t^2 + 170000t - 1442000000 = 0,$$

$$t = 2793°.$$

On a négligé la chaleur de condensation de l'eau, mais les données ne permettraient pas de la calculer.

4. Le volume, dans les conditions normales, des produits de la décomposition d'un centième de molécule serait

$$\frac{1}{100}\left(3 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) \times 22^{lit},4 = 1^{lit},624.$$

Appliquons à ce mélange gazeux la loi de Mariotte, en appelant p la pression cherchée ; on a

$$1,624 = \frac{0,5p}{1 + \frac{2793}{273}},$$

$$p = 36^{atm},5.$$

M. R. Violot, collège Stanislas, a envoyé une bonne solution.

PHYSIQUE

655. — *Quel est le travail nécessaire pour réaliser, à l'aide d'une machine pneumatique quelconque, une pression p dans une capacité v, la pression extérieure étant p_0? On négligera le frottement ainsi que le poids des organes de la machine et l'on supposera la température constante.*

On peut admettre que l'air qui se trouve à la pression p dans la capacité v occupait à l'origine, sous la pression p_0, un certain volume v_0.

A une variation infiniment petite, Δv, du volume v, correspond un travail Δw donné par l'équation

$$\Delta w = (p_0 - p)\Delta v.$$

Or, en vertu de la loi de Mariotte,

$$vp = v_0 p_0.$$

Remplaçons p en fonction de v, il vient

$$\frac{\Delta w}{\Delta v} = p_0\left(1 - \frac{v_0}{v}\right).$$

En remontant à la fonction primitive, on trouve

$$w = p_0(v - v_0) - p_0 v_0 \log \frac{v}{v_0},$$

ou enfin, en éliminant v_0,

$$w = v(p_0 - p) - vp \log \frac{p_0}{p}.$$

Cette formule convient non seulement à une machine pneumatique, mais encore à une machine de compression : on supposera, dans ce cas, $p > p_0$.

Si, en particulier, $p = 0$, l'expression se réduit à vp_0, valeur évidente *a priori*.

Si, à l'origine, le récipient est rempli de gaz à une pression p' différente de p_0 et sous un volume donné v', on aura le travail en retranchant de l'expression précédente l'expression analogue

$$w' = v'(p_0 - p') - v'p' \log \frac{p_0}{p'}.$$

CONCOURS DE 1898

CONCOURS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Mathématiques (Paris et départements).

745. — Étant donné un ellipsoïde E, on considère tous les systèmes de diamètres conjugués égaux de cette surface.

On désigne par α, β, γ les points où les trois diamètres de l'un quelconque de ces systèmes rencontrent le plan tangent à l'ellipsoïde E en l'une des extrémités C du petit axe CC'.

Cela étant, on demande de trouver :

1° Le lieu des sommets des triangles $\alpha\beta\gamma$;

2° L'enveloppe des côtés de ces triangles :

3° L'enveloppe des cercles circonscrits aux mêmes triangles :

4° Supposant l'ellipsoïde de révolution autour du plus petit des axes CC', trouver le lieu des sommets des sections faites dans l'ellipsoïde par les plans diamétraux passant par deux diamètres conjugués égaux.

(*25 mai, de 8 h. 1/2 à 4 h. 1/2.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

746. — On considère les cordes d'une conique à centre (C) vues d'un point M de cette conique sous un angle constant. Montrer que

1° L'enveloppe de ces cordes est une conique (Γ) bitangente à (C).

2° L'enveloppe de la corde de contact D de (C) et de (Γ), le lieu du pôle M' de D, et le lieu du centre de (Γ) quand le point M se déplace sur (C) sont des coniques homothétiques à (C).

3° La droite MM' est la normale en M à la conique (C). VASNIER.

747. — Soit OABC un tétraèdre trirectangle en O inscrit dans une cubique gauche équilatère. Démontrer que le plan ABC est perpendiculaire sur la tangente en O à la cubique.

J. LEMAIRE.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1897, 2e Session.)

Géométrie analytique.

704. — *On donne deux axes quelconques* Ox *et* Oy, *un point* A $(x = a)$ *sur l'axe des* x, *un point* B $(y = b)$ *sur l'axe des* y *et une droite* (D) $y - mx = 0$.

1° *Former l'équation générale des coniques circonscrites au triangle* AOB *et telles que le pôle de la droite* AB *soit sur* (D).

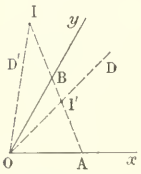
2° *Démontrer que toutes les coniques ont une tangente commune, qui, avec l'axe des* x, *l'axe des* y *et la droite* (D), *détermine sur* AB *une division harmonique ; et que la droite* (D) *a un pôle fixe par rapport à toutes les coniques.*

3° *Démontrer que le lieu des centres de ces coniques est tangent à la droite* (D) ; *et que si on fait varier* m, *il passe par quatre points fixes.*

4° *Démontrer que la polaire d'un point* (α, β) *donné, prise par rapport aux coniques du faisceau, passe par un point fixe. Construire ce point et voir comment il se déplace si on fait varier* m.

5° *Démontrer que le faisceau de coniques correspondant à une valeur donnée de* m *admet deux paraboles réelles ou imaginaires et chercher le lieu des points de rencontre des tangentes à ces paraboles aux points* A *et* B *quand* m *varie.*

1. Soit μ le coefficient angulaire de la tangente en O à une conique circonscrite au triangle AOB. L'équation de cette conique sera de la forme



$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)(y - \mu x) + 2\lambda xy = 0.$$

Exprimons que le pôle de la droite AB est situé sur la droite D. Soit (α, β) ce point $(\beta = m\alpha)$; nous exprimerons que sa polaire

$$\alpha\left[\frac{1}{a}(y - \mu x) - \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) + 2\lambda y\right] + m\alpha\left[\frac{1}{b}(y - \mu x) + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 + 2\lambda x\right] - (y - \mu x) = 0$$

se confond avec la droite AB, c'est-à-dire passe par les points A et B.

A$(a, 0)$ $\qquad \alpha[2\lambda mab - \mu(b + ma)] + \mu ab = 0,$

B$(0, b)$ $\qquad \alpha[2\lambda ab + (b + ma)] - ab = 0.$

Éliminant α entre ces deux équations, il vient

$$2\lambda(m + \mu)ab = 0,$$

qui se décompose en $\lambda = 0$ (conique particulière formée par la droite AB et la droite D, à rejeter) et $m + \mu = 0$, d'où $\mu = -m$ qui correspond à la conique cherchée. L'équation générale est donc

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)(y + mx) + 2\lambda xy = 0.$$

2. Toutes les coniques représentées par cette équation sont tangentes en O à la droite (D') dont l'équation est

$$y + mx = 0.$$

Cette droite est conjuguée harmonique de (D) par rapport aux axes Ox, Oy.

Ce résultat était facile à prévoir ; le pôle de AB étant sur la droite D, réciproquement le pôle de D est sur AB ; il est à la rencontre de AB avec la tangente en O. Soit I ; ce point est le conjugué harmonique, par rapport à A et B, du point I′ où la droite D rencontre AB.

Le pôle de D étant à l'intersection de AB avec la droite D′ est un point fixe. Vérifions ces résultats analytiquement. La polaire d'un point (α, β) a pour équation

$$(2)\quad \alpha\left[\frac{1}{a}(y+mx)+m\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+2\lambda y\right]+\beta\left[\frac{1}{b}(y+mx)+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+2\lambda x\right]-(y+mx)=0.$$

Exprimons qu'elle passe par l'origine $(0, 0)$ et que son coefficient angulaire est m $(1, m)$, il vient

$$(D')\qquad \beta+m\alpha=0$$

$$2m\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-1\right)+(\beta+m\alpha)\left(\frac{1}{a}+\frac{m}{b}-1+2\lambda\right)=0$$

ou, en tenant compte de la première condition,

$$(AB)\qquad \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-1=0.$$

Le point (α, β) est donc bien à l'intersection des droites D′ et AB.

3. Le centre est à l'intersection des droites

$$f'_x=\frac{1}{a}(y+mx)+m\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+2\lambda y=0,$$

$$f'_y=\frac{1}{b}(y+mx)+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+2\lambda x=0.$$

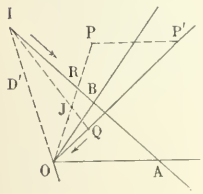
Eliminant λ, nous aurons l'équation du lieu

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)(y+mx)-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)(y-mx)=0.$$

m n'y figurant qu'au premier degré, le lieu passe par quatre points fixes qui sont l'origine et les milieux des trois côtés du triangle OAB. La tangente à l'origine a pour équation $y-mx=0$; c'est la droite D. Ces résultats se déduisent facilement des propriétés bien connues de la conique des neuf points.

4. L'équation (3) de la polaire d'un point $P(\alpha, \beta)$ par rapport aux coniques du faisceau contient le paramètre λ au premier degré seulement ; cette droite passe donc par un point fixe Q qui est le point de rencontre des droites

$$\alpha y+\beta x=0,\qquad \left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-1\right)(y+mx)+(\beta+m\alpha)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=0.$$



La première est la polaire du point P par rapport à la conique formée par les deux axes $(\lambda=\infty)$; la seconde, la polaire du point P par rapport à la conique formée par la droite AB et la tangente D′ $(\lambda=0)$. La première droite est fixe (OP′) ; c'est le lieu du point Q lorsque m varie ; la seconde droite passe par le point I mobile sur AB et un point fixe J qui est le point de rencontre des deux droites

$$\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-1\right)y+\beta\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=0,$$

$$\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-1\right)x+\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=0.$$

Ce point est situé sur la droite $\beta x-\alpha y=0$ (OP) ; c'est le conjugué harmonique du point P par rapport aux points de rencontre O et R de la sécante PO avec les droites D′ et AB. m prenant toutes

les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, le point I décrit la droite AB et la droite JI pivote autour du point J de façon que le point Q se déplace sur son lieu OP′, d'une façon continue.

5. Déterminons λ de façon que l'équation (1) représente une parabole

$$\delta = \frac{m}{ab} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{b} + 2\lambda\right)^2 = 0,$$

d'où deux valeurs de λ, réelles et distinctes, confondues ou imaginaires conjuguées suivant que $\frac{m}{ab} \gtrless 0$. Les deux paraboles correspondantes seront représentées par l'équation

$$bmx^2 \pm 2\sqrt{mab}\,xy + ay^2 - ab(y + mx) = 0.$$

Les tangentes en A et B ont pour équations $af'_x + f'_z = 0$, $bf'_y + f'_z = 0$, c'est-à-dire

$$a[2bmx \pm 2\sqrt{mab}\,y - abm] - ab(y + mx) = 0,$$

$$b[\pm 2\sqrt{mab}\,x + 2ay - ab] - ab(y + mx) = 0,$$

ou bien

$$abm(x - a) \pm 2a\sqrt{mab}\,y - aby = 0,$$

$$abmx \mp 2b\sqrt{mab}\,x - ab(y - b) = 0.$$

Posons $\pm\sqrt{abm} = \lambda$; nous sommes ramenés à éliminer λ entre les deux équations

$$\lambda^2(x - a) + 2a\lambda y - aby = 0, \qquad \lambda^2 x - 2b\lambda x - ab(y - b) = 0.$$

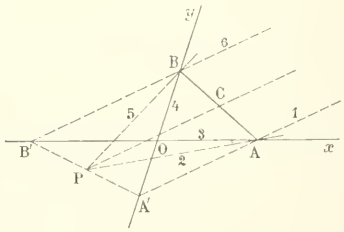
Le résultant est

$$[abxy - ab(x - a)(y - b)]^2 - 4abxy(bx + ay - ab)^2 = ab(bx + ay - ab)^2(ab - 4xy).$$

Le lieu se compose de la droite double (AB)

$$(bx + ay - ab)^2 = 0,$$

solution particulière qui correspond au cas où D′ est parallèle à AB (parabole réduite à deux droites parallèles), et de l'hyperbole $4xy - ab = 0$ qui admet pour asymptotes les axes de coordonnées et est tangente à AB en son milieu. C'est le lieu du milieu d'une corde variable qui intercepterait sur les axes un triangle d'aire constante.



Ce résultat pouvait être prévu. Soit P le pôle de AB par rapport à l'une des paraboles considérées. Cette parabole passant par les trois points O, A, B, sera complètement déterminée si on se donne la direction de ses diamètres. Menons le diamètre qui passe par le milieu C de la corde AB, ce diamètre passera par le point P. Proposons-nous maintenant de construire ce point. Pour cela, appliquons le théorème de Pascal à l'hexagone dont les côtés sont

1 et 6 les parallèles AA′ et BB′ au diamètre PC,
2 et 5 les tangentes PA et PB aux points A et B,
3 et 4 les côtés OA, OB du triangle OAB ;

les trois points A′(1, 4), P(2, 5) et B′(3, 6) sont en ligne droite. De plus C étant le milieu de AB, P est le milieu de A′B′ et enfin

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OA'}{OB}$$

d'où

$$OA'.OB' = OA.OB.$$

A′B′ détermine avec les axes un triangle d'aire constante égale à celle du triangle OAB ; P qui est le milieu de A′B′ décrit l'hyperbole trouvée plus haut.

P. L.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

690. — *On considère deux droites rectangulaires* Ox *et* By *et sur la droite* Ox *deux points* O *et* A *symétriques par rapport au point* B *et tels que* $OA = 2a$. *Par le point* O *on mène une droite variable* OD *qui coupe* By *en un point* C *et la circonférence décrite du point* C *comme centre, avec* CO *pour rayon en un point* E. *On trace* CA *et du point* E *on abaisse les perpendiculaires* EF *sur* CA, EG *sur* By.

Etudier, quand la droite OD *tourne autour du point* O, *les variations de l'aire du quadrilatère* CGEF.

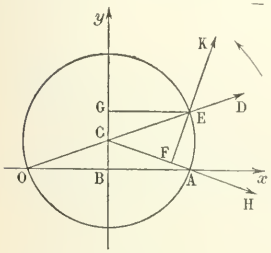


Fig. 1.

Fixons sur les droites Ox et By des directions positives et supposons le plan orienté de telle sorte que l'angle (xy) soit égal à $\frac{\pi}{2}$.

Nous prendrons comme variable l'angle $(x\mathrm{D})$ que nous représenterons par x.

L'angle $x\mathrm{AH}$ est égal à l'angle CAO qui est lui-même égal à l'angle COA. Nous choisirons sur CA comme direction positive la direction H telle que l'angle $(x\mathrm{H})$ soit égal à $-x$, et, sur FE, la direction K telle que l'angle (HK) soit égal à $\frac{\pi}{2}$.

La figure 1 correspond au cas où l'angle x est compris entre zéro et $\frac{\pi}{4}$. L'aire du quadrilatère CGEF est alors égale à la somme des aires des deux triangles rectangles CGE, CFE, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{CG}} \times \overline{\mathrm{GE}} + \overline{\mathrm{CF}} \times \overline{\mathrm{FE}}).$$

La notation $\overline{\mathrm{CG}}$ représente la valeur algébrique du segment dont la valeur absolue est CG. Dans le cas de la figure 1, chaque segment de l'expression précédente a sa valeur algébrique égale à sa valeur absolue.

Evaluons la valeur algébrique de chacun de ces segments.

$\overline{\mathrm{CG}}$ est la projection orthogonale de $\overline{\mathrm{CE}}$ sur la direction y, donc

$$\overline{\mathrm{CG}} = \overline{\mathrm{CE}} \sin \widehat{x\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{CE}} \sin x;$$

or

$$\overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{OC}} = \frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\cos x} = \frac{a}{\cos x};$$

par suite,

$$\overline{\mathrm{CG}} = a \operatorname{tg} x.$$

A cause de l'égalité des triangles OBC, CGE, on a

$$\overline{\mathrm{GE}} = \overline{\mathrm{OB}} = a.$$

Enfin, $\overline{\mathrm{CF}}$ et $\overline{\mathrm{FE}}$ étant les projections orthogonales de $\overline{\mathrm{CE}}$ sur les directions H et K, nous avons

$$\overline{\mathrm{CF}} = \overline{\mathrm{CE}} \cos \widehat{\mathrm{HD}} = \overline{\mathrm{CE}} \cos(\widehat{x\mathrm{D}} - \widehat{x\mathrm{H}}) = \overline{\mathrm{CE}} \cos 2x$$

et

$$\overline{\mathrm{FE}} = \overline{\mathrm{CE}} \sin \widehat{\mathrm{HD}} = \overline{\mathrm{CE}} \sin 2x,$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\overline{\mathrm{CE}}$ par sa valeur,

$$\overline{\mathrm{CF}} = \frac{a \cos 2x}{\cos x}, \qquad \overline{\mathrm{FE}} = \frac{a \sin 2x}{\cos x}.$$

Nous aurons donc finalement, en désignant par S l'aire du quadrilatère,

$$(1) \qquad 2\mathrm{S} = \overline{\mathrm{CG}} \times \overline{\mathrm{GE}} + \overline{\mathrm{CF}} \times \overline{\mathrm{FE}} = a^2 \operatorname{tg} x + \frac{a^2 \sin 2x \cos 2x}{\cos^2 x}$$

ou, en divisant les deux termes de la seconde fraction par $\cos x$,

$$2S = a^2 \operatorname{tg} x(1 + 2\cos 2x). \tag{2}$$

Avant d'étudier les variations de cette fonction, voyons ce qu'elle représente dans les différents cas de figure que l'on peut imaginer.

Nous obtiendrons ces différents cas de figure en supposant que l'angle x varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

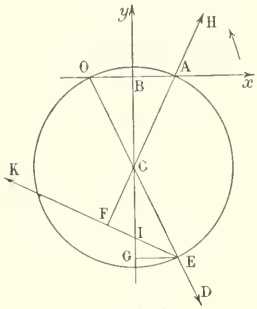


Fig. 2.

1° $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$. — La figure 2 correspond à ce cas. On voit que

$$\overline{CG} = -CG, \qquad \overline{GE} = GE,$$
$$\overline{CF} = -CF, \qquad \overline{FE} = -FE.$$

L'égalité (1) nous montre que la fonction représente dans ce cas

$$-CG \times GE + CF \times FE$$

c'est-à-dire le double de la différence entre l'aire du triangle CFE et l'aire du triangle CGE, ou encore, à cause de la partie commune CIE,

$$2(CFI - EGI).$$

2° $-\frac{\pi}{4} < x < 0$. — Pour $x = -\frac{\pi}{4}$ le point F tombe au point C, et quand x est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et zéro le point F est entre C et A, de sorte qu'on a la figure 3. Alors

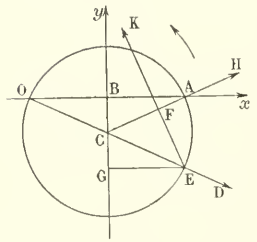


Fig. 3.

$$\overline{CG} = -CG, \qquad \overline{GE} = GE,$$
$$\overline{CF} = CF, \qquad \overline{FE} = -FE.$$

La fonction représente dans ce cas

$$-CG \times GE - CF \times FE$$

c'est-à-dire le double de l'aire du quadrilatère CGEF prise avec le signe —.

3° $0 < x < \frac{\pi}{4}$. — C'est le cas de la figure 1. La fonction représente le double de l'aire du quadrilatère CGEF.

4° $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. — Nous avons alors la figure 4, et $\overline{CG} = CG$, $\overline{GE} = GE$, $\overline{CF} = -CF$, $\overline{FE} = FE$.

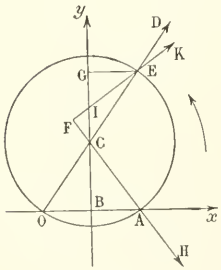


Fig. 4.

La fonction représente alors

$$CG \times GE - CF \times FE$$

c'est-à-dire le double de la différence entre l'aire du triangle CGE et l'aire du triangle CEF, ou

$$2(EGI - CIF).$$

Etudions maintenant les variations de la fonction (2). Quand on remplace x par $-x$, la valeur de la fonction change de signe. Il suffira donc d'étudier les variations de la fonction quand x varie de zéro à $\frac{\pi}{2}$. La fonction est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

Calculons sa dérivée.

$$\frac{2S'}{a^2} = \frac{1 + 2\cos 2x - 2\sin^2 2x}{\cos^2 x}.$$

ou

$$\frac{2S'}{a^2} = \frac{2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1}{\cos^2 x}. \tag{3}$$

L'équation du second degré par rapport à $\cos 2x$

$$2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 \tag{4}$$

a une racine positive et une racine négative ; en substituant -1, puis 1, à $\cos 2x$ dans le premier membre, on reconnaît que -1 est compris entre les racines, tandis que 1 est extérieur à ces racines. Par suite, la racine négative est plus petite que -1 et la racine positive est plus petite que 1. Comme $\cos 2x$ doit être compris entre -1 et $+1$, nous devons rejeter la racine négative. A la racine positive correspond un arc 2α compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, et, par suite, il existe une valeur α de x, plus petite que $\frac{\pi}{4}$ et plus grande que zéro, pour laquelle le premier membre de l'équation (4), et par suite la dérivée, changent de signe. Quand x varie de 0 à α, la dérivée est positive et la fonction croît. Quand x varie de α à $\frac{\pi}{2}$, la dérivée est négative et la fonction décroît. Pour $x = \alpha$, la fonction est maximum.

Pour $x = 0$, $S = 0$. Pour $x = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ε étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, $S = -\infty$. Dans l'intervalle, S s'annule quand $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $2x = 2\frac{\pi}{3}$, ou $x = \frac{\pi}{3}$. Calculons la valeur maximum de S. Elle est égale à $\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\alpha(1 + 2\cos 2\alpha)$, et l'équation (4) nous donne

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Par suite,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}}.$$

La valeur maximum de S est donc

$$\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}}\,.\sqrt{3} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{9 - 3\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}}$$

et, en multipliant et divisant sous le radical par $\sqrt{3} - 1$, on obtient

$$\frac{a^2}{2}\sqrt{3(2\sqrt{3} - 3)}.$$

La discussion est résumée dans le tableau suivant :

x	S'	S
0		0
	$+$	croît
α	0	$\frac{a^2}{2}\sqrt{3(2\sqrt{3}-3)}$
		décroît
$\frac{\pi}{4}$		$\frac{a^2}{2}$
		décroît
$\frac{\pi}{3}$	$-$	0
		décroît
$\frac{\pi}{2}-\varepsilon$		$-\infty$

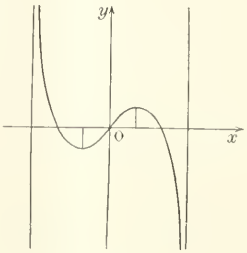


Fig. 5.

Les variations de la fonction, quand x varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, sont représentées par la courbe (*fig.* 5).

En se reportant à la figure 4 et à l'interprétation des valeurs de x comprises entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, on voit que pour $x = \frac{\pi}{3}$ les aires des deux triangles CFI, EGI sont égales, puisque leur différence est nulle.

Quand x est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$, l'aire du triangle EGI est plus grande que l'aire du triangle CFI. C'est le contraire quand x est compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Les solutions que nous avons reçues de cette question ne sont pas complètes.

---

699. — *Étant données deux paraboles* P *et* P_1 *ayant même axe et même sommet, trouver et construire le lieu du point de rencontre d'une tangente* T *à la parabole* P *avec une tangente à la parabole* P_1 *qui soit perpendiculaire à* T.

Prenons pour axe des x l'axe commun aux deux paraboles, pour axe des y la tangente commune, et désignons par p et p_1 les paramètres des deux paraboles. Elles ont pour équations $y^2 - 2px = 0$, $y^2 - 2p_1x = 0$. Une tangente quelconque à la première est représentée par $y = mx + \frac{p}{2m}$ et la tangente à la seconde, perpendiculaire à celle-ci, par $y = -\frac{1}{m}x - \frac{p_1 m}{2}$. En résolvant ces deux équations par rapport à x et à y, on a les équations du lieu de leur point de rencontre en fonction de m,

$$(1) \qquad \left\{ \quad x = -\frac{p + p_1 m^2}{2(1+m^2)}, \qquad y = \frac{p - p_1 m^4}{2m(1+m^2)}. \right.$$

L'équation cartésienne s'obtient par un calcul facile : la première donne $m^2 = -\frac{2x+p}{2x+p_1}$; en portant cette valeur dans la seconde, on obtient

$$m = \frac{p(2x+p_1)^2 - p_1(2x+p)^2}{2y(p_1-p)(2x+p_1)} = -\frac{4x^2 - pp_1}{2y(2x+p_1)};$$

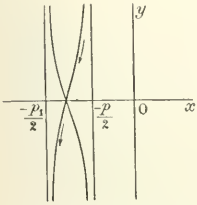
il n'y a plus qu'à élever au carré et égaler à m^2 pour avoir l'équation cherchée,

$$(2) \qquad 4y^2(2x+p)(2x+p_1) + (4x^2 - pp_1)^2 = 0.$$

Le lieu est donc une courbe du quatrième degré symétrique par rapport à Ox.

On peut construire cette courbe soit à l'aide de l'équation (2), soit en gardant les équations (1).

Elles mettent en évidence la symétrie de la courbe par rapport à Ox, car, si on y change m en $-m$ la valeur de x ne change pas et celle de y ne fait que changer de signe. En se bornant à construire l'une des moitiés de la courbe, il suffira donc de faire varier m de 0 à $+\infty$. Supposons alors, pour fixer les idées, que p_1 soit le plus grand des deux nombres p et p_1; comme la valeur de x peut encore s'écrire $x = -\frac{p_1}{2} + \frac{p_1 - p}{2(1+m^2)}$, nous voyons que x décroît de $-\frac{p}{2}$ à $-\frac{p_1}{2}$, quand m croît de 0 à $+\infty$. D'autre part, la dérivée de y est toujours négative; par suite, y décroît aussi constamment; il décroît de $+\infty$ à $-\infty$ et passe par la valeur 0 pour $m = \sqrt{\frac{p}{p_1}}$. La courbe est dès lors aisée à tracer.



Nous nous sommes placés dans le cas où p et p_1 sont de même signe. S'ils sont de signes contraires, y ne s'annule pas, x s'annule. La courbe change de forme, mais elle est trop aisée à tracer pour que nous insistions.

M. CANS (lycée de Toulouse).

Bonnes solutions : MM. L. ORLANDO, à Turin; G. ROUSIER; B. CHARVET, à Saint-Etienne; G. POUILLIART, à Nevers.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1897)

Arithmétique (M. COMBETTE).

617. — Ecrire le nombre 4382 dans le système de base 4. — 2435 étant un nombre rit ans le système de base 8, l'écrire dans le système de base 10.

618. — a désignant un nombre entier de 6 chiffres, limites supérieure et inférieure du nombre des chiffres de a^3.

619. — Reste de la division de 7948 par 11. — Montrer que le reste de $(7948)^{121}$ par 11 est le même que celui de 6^{324}. — Trouver ce reste.

620. — Trouver l'exposant de la plus haute puissance de 11 contenue dans 1000!.

621. — Racine carrée d'un nombre à $\frac{\alpha}{\beta}$ près. — Racine carrée de 42,7 à $\frac{17}{20}$ près.

622. — Si l'on a $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$, a, b, c étant commensurables, on a nécessairement $a = b = c = 0$.

623. — Calculer à $\frac{1}{100}$ près les expressions πe, $\frac{\pi}{e}$, $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

624. — La longueur d'une circonférence étant $45^m,218$ à $0^m,001$ près, calculer son rayon avec la plus grande approximation possible.

Algèbre (M. COMBETTE).

625. — Les égalités $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ entraînent $\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$.

626. — Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$.

627. — On donne $x^2 + y^2 + z^2 =$ constante. — Maximum du produit $x^m y^n z^p$.

628. — Figurer le triangle arithmétique de Pascal et démontrer au moyen de ce triangle que

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35.$$

629. — Etudier les séries $u_n = \frac{1}{n+e}$, $u_n = \frac{1}{\pi + n}$, $u_n = \frac{1}{n + \sin x}$, $u_n = \frac{\sin(n.10^\circ)}{n!}$.

630. — Série $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\ldots$

631. — Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\pm\frac{1}{m^2}\right)^m$ pour $m=\infty$. — Limite de $\left(2+\frac{1}{m}\right)^m$ pour $m=\infty$

632. — Limite pour $x=0$ des expressions suivantes

$$\left[1-\frac{\sin^2 x}{\sin 5x}\right]^{\operatorname{cotg} 2x},\qquad \left[1-\frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\sin 3x}\right]^{\operatorname{cotg} 2x},\qquad \left[1-\frac{\operatorname{tg}^4 3x}{\sin^2 2x}\right]^{\operatorname{cotg} 4x},\qquad \left[1-\frac{\sin^3 2x}{\sin 3x}\right]^{\operatorname{cotg}^2 5x}.$$

633. — Limite de $\sqrt[m]{A}$ pour $m=\infty$.

634. — Effectuer le quotient des deux logarithmes $2{,}3789 : \bar{3}{,}4976$.

635. — Effectuer par la règle à calcul le quotient $43{,}7 : 0{,}271$. — Calculer par la règle à calcul $\sqrt{428}$. — Calculer $\sin 15^\circ$, $48\times\sin 20^\circ$.

636. — Intérêts composés d'un capital placé à 4 0/0 pendant 3 ans 2 mois 20 jours.

637. — En combien de temps une somme placée à 4 0/0 est-elle triplée, les intérêts étant capitalisés à la fin de chaque année.

638. — Rembourser 7000 francs par versements égaux pendant 5 ans, le taux de l'intérêt étant de 4 0/0. Valeur de l'annuité.

639. — Quel nombre d'annuités égales à 3000 francs faut-il verser pour amortir un emprunt de 12000 francs, les intérêts étant capitalisés à la fin de chaque année à 4 0/0?

640. — Dérivées des fonctions suivantes :

$$\operatorname{cotg} 4x,\quad \sin^5 7x,\quad \cos^5 2x,\quad \sin^7(2x+1),\quad \sin^4 4x^2,\quad \operatorname{tg}^3 5x,$$
$$\operatorname{tg}^3 4x^2,\quad \operatorname{tg}^5(7x^2+1),\quad (\log \operatorname{tg} 5x)^3,\quad \log\sin 4x^2,\quad \log\sin(4x^2-1),$$
$$\sin^3 5x\times\cos^5 3x,\quad \cos^2 4x\times\operatorname{tg}^5 2x,\quad \cos^7 4x\times\log(x^2+x),$$
$$\sin(3x^2+1)\times\operatorname{arc\,tg}^5 3x,\qquad \frac{\sin^5 3x}{\cos^2 4x},\qquad \frac{\sin 5x^3}{\cos^2 5x},\qquad \frac{\sin^3 4x}{\operatorname{tg}^2 5x}.$$

641. — Dérivée d'ordre n des fonctions

$$y=a\cos bx,\qquad y=\frac{1}{1\pm x},\qquad y=\frac{1}{x^2-1}.$$

642. — Dérivées des fonctions suivantes:

$$(x^2-5x+1)^{x^2-2},\qquad (4x^3-5x)^{\sin^3 2x},\qquad (\cos 5x)^{x^2-1},\qquad [\cos(x^3-2)]^{x^4},$$
$$[\operatorname{tg}(4x^2+1)]^{3x^2-1},\qquad (\log_a \operatorname{tg} 5x)^{x^2+1},\qquad (\sin 3x)^{\cos 2x},\qquad (\operatorname{tg} 7x)^{\operatorname{cotg} 3x},$$
$$[\cos(3x^2+1)]^{\cos 5x},\qquad [L(5x^2-1)]^{\sin^3 2x},\qquad (\arcsin 5x^2)^{1.8x},\qquad [\operatorname{arc\,tg}(3x^2+1)]^{\sin^2 3x}.$$

643. — Fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$y'=\frac{2}{(x-3)^3},\qquad y'=\frac{2x-1}{(x+1)^3},\qquad y'=\frac{2x}{(x+2)^2+1},$$
$$y'=\frac{x-1}{(x+1)^2+1},\qquad y'=\frac{x^2+2}{(x-1)(x-2)},\qquad y'=\frac{5x^2-1}{(x-3)^2(x^2+1)}.$$

644. — Trouver toutes les fonctions y de x vérifiant l'équation $y''=-a^2y$.

645. — Peut-on toujours décomposer un polynome entier à coefficients réels en un produit de facteurs réels du second degré ? — De combien de manières en désignant par m son degré, $2l$ le nombre des racines imaginaires et supposant toutes les racines distinctes.

646. — Exprimer que l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$ a une racine double.

Exprimer que $x^4+mx^3+nx^2+px+q=0$ admet deux racines doubles.

647. — Conditions pour que $x^4+mx^3+nx^2+px+q=0$ ait une racine triple.

648. — On multiplie les coefficients de l'équation $A_0x^4+A_1x^2+A_2x+A_3=0$ par a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$. Démontrer que si l'équation donnée admet une racine d'ordre p l'équation obtenue admettra cette racine à l'ordre $p-1$.

649. — On considère l'équation $y=x^3+px+q=0$. Former l'équation qui admet pour racines les valeurs de y pour les racines α, β de sa dérivée.

650. — $x^3+px+q=0$ admet pour racines les tangentes trigonométriques des angles α, β, γ. — Calculer $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$.

651. — Les coefficients de $x^3+px^2+qx+r=0$ sont commensurables. Démontrer que si aucun des nombres $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ n'est divisible par 5, l'équation n'a pas de racine commensurable.

652. — Choisir les nombres a et b de manière que l'équation $x^5+ax^3+b=0$ ait le nombre maximum de racines réelles.

653. — a, b, c étant les racines d'une équation du 3e degré $f(x)=0$, montrer que l'on a

$$\frac{a}{f'(a)}+\frac{b}{f'(b)}+\frac{c}{f'(c)}=0.$$

654. — Décomposer en éléments simples les fractions

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)^2},\quad \frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x-2)},\quad \frac{3x+1}{(x-1)^3(x-2)},\quad \frac{3x-1}{(x-1)^3(x-2)^2},\quad \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2)}.$$

655. — Déterminer un polynome du 4e degré prenant les valeurs $0, 3, 1, -1, 2$ pour $x = 1, -1, 2, 0, 3$.

656. — Dans le polynome ax^2+bx+c on a fait $x = 1, 2, 3$ et on a trouvé $5, 1, 0$. Valeur du polynome pour $x = 4$.

Trigonométrie (M. Combette).

657. — Calculer $\sin\frac{2x}{3}$ en fonction de $\sin x$; $\cos\frac{2x}{3}$ en fonction de $\cos x$.

658. — Rendre calculable par logarithmes la formule $\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A$.

659. — On donne $\operatorname{tg}^2 x - p \operatorname{tg} x - q = 0$. Calculer x en supposant p et q positifs.

660. — Résoudre les inégalités

$$3\cos x - 1 < \sqrt{2\sin^2 x - 1}, \qquad 0 < x < \pi$$

$$\sqrt{4 - \cos^2 x} > 2 - 3\sin x \qquad 0 < x < \pi.$$

661. — Résoudre un triangle connaissant : 1° a, b, A ;
2° a, A, $b + c = l$;
3° A, B, S.

Conditions de possibilité.

A suivre.

QUESTIONS PROPOSÉES

748. — Etudier les variations de la fonction $y = \text{arc sin } Lx$. Construire la courbe et déterminer le point d'inflexion ainsi que la tangente en ce point. P. L.

749. — Il existe deux cercles orthogonaux à une parabole donnée (P) en un point M et tangents à l'axe de cette parabole. Trouver, quand le point M se meut sur la parabole (P) :
1° Le lieu du milieu de la tangente commune aux deux cercles, autre que l'axe de la parabole ;
2° Le lieu du point de rencontre des polaires du foyer par rapport aux deux cercles. G. Pouilliart.

BIBLIOGRAPHIE

Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications, par LUCIEN LÉVY, examinateur d'admission et répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique. — Paris, Gauthier-Villars et fils (1898).

C'est aujourd'hui un désir et un besoin presque universels dans les milieux où s'étudient les sciences mathématiques que de voir s'introduire dans le calcul algébrique de nouvelles simplifications et de nouveaux symboles qui permettent de préciser, d'expliciter avec plus de netteté certains résultats déjà obtenus, d'en acquérir de nouveaux, et de voir s'ajouter au domaine de l'analyse de nouvelles fonctions dont beaucoup d'étudiants pourront utiliser plus tard les propriétés et les lois de transformation. Il semble, en particulier, que l'heure a sonné pour les fonctions elliptiques et qu'il faille s'attendre à les voir pénétrer prochainement dans un enseignement moyen des sciences mathématiques qui les mettrait à la portée d'un assez grand nombre de personnes. Cet état d'esprit a inspiré récemment divers ouvrages sur ces fonctions ; l'un des plus intéressants est, sans contredit, celui dont je m'occupe actuellement.

Jusqu'ici les fonctions elliptiques, étudiées trop tard et un peu rapidement par beaucoup de professeurs, d'ingénieurs, etc., ne sont réellement connues que d'un petit nombre de savants ayant eu la patience de s'assimiler lentement les belles découvertes relatives à ces fonctions ; on peut même dire que parmi ces privilégiés ceux qui utilisent les fonctions elliptiques avec la même aisance que les fonctions circulaires sont en minorité. M. L. Lévy pense qu'il faut de bonne heure se livrer à une étude relativement élémentaire de ces fonctions et le livre qu'il publie a pour but de rendre, au sortir de la classe de mathématiques spéciales, cet effort possible et même assez facile. La pensée de l'auteur est visible et je me permets de la traduire ici un peu librement : M. L. Lévy croit qu'en se bornant aux choses essentielles, l'enseignement des fonctions elliptiques pourrait être placé même dans nos lycées, dans une seconde ou une troisième année de mathématiques spéciales ; aussi son ouvrage est-il rédigé de façon à pouvoir être lu par un élève de cette catégorie. Partout où l'auteur a rencontré des analogies avec certaines questions familières à son lecteur supposé, il les a mises en relief, afin que celui-ci ne se sente jamais complètement séparé du monde d'idées dans lequel il a vécu jusque là, mais soit au contraire rassuré par l'aspect déjà connu des énoncés et des démonstrations.

Pour ne pas décourager le lecteur, l'auteur s'est borné aux formules les plus importantes. Il a insisté plus spécialement sur les notations de Weierstrass, comme cela se fait partout aujourd'hui ; il n'a pas négligé pour cela les anciennes notations et il montre que rien n'est plus facile que de passer des fonctions utilisées maintenant aux fonctions de Jacobi.

Il faut féliciter M. L. Lévy d'avoir placé à la fin de son volume d'intéressantes applications mécaniques,

géométriques et algébriques, d'avoir montré comment se font les calculs numériques, les applications pratiques et d'avoir donné des tables qui permettent de les effectuer avec une approximation généralement suffisante.

M. L. Lévy a fait là un travail important, consciencieux et réfléchi. Je souhaite à son livre le succès auquel il a droit. Je souhaite aussi qu'il soit le point de départ d'une introduction des fonctions elliptiques dans l'enseignement moyen ; car alors les méthodes se simplifieront, les notations s'harmoniseront et deviendront définitives et le choix se fera des fonctions utiles à garder pour le calcul et les transformations théoriques. E. H.

La Mathématique, Philosophie, Enseignement, par C.-A. LAISANT, répétiteur à l'Ecole Polytechnique, docteur ès sciences. — Paris, Georges Carré et C. Naud, éditeurs.

Dès que j'eus jeté les yeux sur ce livre qui a paru depuis quelques mois déjà, j'eus l'intention d'en dire quelques mots aux lecteurs de la *Revue*. Je suis heureux de pouvoir aujourd'hui réaliser ce désir. L'aimable auteur de *La Mathématique* est, comme moi, trop occupé, pour ne pas comprendre ce retard et l'excuser.

Si j'ai bien compris l'idée de M. Laisant, son livre poursuit deux buts bien distincts: en premier lieu, exposer à tous ceux qui se tiennent éloignés des sciences mathématiques et qui sont cependant pourvus d'une instruction générale suffisante, ce qu'on doit entendre par sciences mathématiques, quels sont les moyens qu'elles emploient, les buts divers qu'elles poursuivent et les services qu'elles peuvent rendre dans l'étude des autres sciences ou dans la solution des problèmes pratiques ; en second lieu, indiquer comment l'enseignement des mathématiques doit être entendu et quelles sont les matières qu'il doit comporter pour la majorité des élèves faisant des études moyennes.

Dans la première partie, la plus longue de l'ouvrage, l'auteur cherche à définir cet objet multiple, variable à l'infini, que la mathématique doit étudier, et à élever une classification des sciences mathématiques qui soit sensiblement d'accord avec la tradition et qui soit justifiée par la nature des questions que chacune d'elles étudie. Une pareille entreprise présente trop de difficultés pour que l'on puisse attendre une solution indiscutable, que l'avenir ne remaniera plus : les diverses parties des mathématiques se mêlent les unes aux autres, se prêtent un appui mutuel et ne peuvent pas être séparées d'une façon parfaite. De même, dans le cas d'une partie de la science mathématique qui serait nettement séparée des autres, il ne faut pas compter sur une définition précise, simple et complète de l'objet dont cette science particulière s'occupe : les questions sont trop variées pour qu'il en soit ainsi ; chaque jour elles se diversifient et de nouveaux points de vue apparaissent. Tout ce qu'on pouvait attendre de l'auteur sur ces divers points, c'est qu'il donnât une classification raisonnable et réfléchie, et qu'il indiquât assez clairement l'objet particulier de chacune des branches de la science mathématique pour que le lecteur pût se rendre compte du but poursuivi. On ne peut contester à M. Laisant qu'il ait réussi d'une façon satisfaisante dans cette entreprise et il faut le louer de ce style heureux qui permet de lire sans fatigue et sans effort, douze chapitres consacrés à de hautes abstractions.

Toute cette partie de l'ouvrage est pleine de réflexions ingénieuses, intéressantes, qui ne peuvent manquer d'être profitables à la classe nombreuse des étudiants qui, sans avoir encore approfondi aucun point de la science mathématique, ont cependant sur les principales parties de cette science des notions déjà étendues. Je signalerai plus particulièrement, et pour les louer sans réserve, les idées de l'auteur sur les nombres incommensurables, négatifs et imaginaires et celles qu'il développe à propos d'une opération générale, peut-être un peu trop négligée aujourd'hui et qu'il désigne par cette locution : *retour de l'abstrait au concret*.

Dans la deuxième partie de l'ouvrage qui est consacrée à une étude rapide de l'enseignement mathématique actuel et à l'exposé des desiderata de l'auteur, j'ai plus spécialement remarqué les critiques nombreuses et très souvent justifiées que l'auteur adresse à notre enseignement mathématique. Je ne lui ferai qu'un reproche, c'est de ne pas avoir assez nettement séparé le corps des professeurs de mathématiques, qui n'est en rien responsable de cet état de choses, des divers corps qui ont élaboré les programmes actuels et qui ont, en fait, sinon supprimé, du moins considérablement amoindri l'enseignement mathématique dans les lycées et collèges de l'État.

L'auteur affirme que toute intelligence moyenne est apte à recueillir un enseignement mathématique assez complet pour être utilisé à un grand nombre de points de vue et pour assurer à celui qui le possède des idées raisonnables sur toute cette science mathématique jugée si faussement et si médiocrement aujourd'hui par l'immense majorité de ceux qui font cependant partie de la classe éclairée de la nation; il pense que l'on ne saurait commencer trop tôt cet enseignement, qu'il y a tout avantage à en mener de front les diverses parties, arithmétique, algèbre et géométrie, et qu'il vaut mieux ne rien faire du tout que de consacrer une classe unique de une heure et demie par semaine à développer un tel programme ; il croit que pour cet enseignement, comme pour tout autre d'ailleurs, il faut de la continuité dans les efforts, le temps matériel de revenir au besoin en arrière, de reprendre les points difficiles et de les illustrer par des exemples jusqu'à ce qu'ils se soient gravés dans l'esprit de l'élève. On ne saurait mieux penser ni mieux dire : il faut consacrer chaque semaine au moins trois classes de une heure et demie chacune ou deux classes et une conférence de une heure à cet enseignement ; il faut qu'il soit donné à tous uniformément jusqu'aux premières notions de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal, afin que la grande majorité des jeunes gens de notre pays soit prête pour la lutte industrielle et commerciale qui paraît devoir être malheureusement le couronnement de la civilisation moderne.

Il faut savoir gré à M. Laisant d'avoir appelé l'attention sur ce point capital. Si son livre devait être un des facteurs essentiels d'une réforme désirable à tant de points de vue, l'auteur pourrait se vanter, non seulement d'avoir écrit dans un style éloquent et clair un livre intéressant et instructif, mais encore d'avoir rendu un éminent service à son pays. E. H.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA CONCAVITÉ OU LA CONVEXITÉ D'UNE COURBE PLANE VERS UN POINT; APPLICATION A LA TRANSFORMÉE PAR DÉVELOPPEMENT D'UNE COURBE PLANE TRACÉE SUR UN CONE

par M. **A. Naud**, Professeur au lycée Charlemagne.

Je me propose, dans cette note :

1° De rappeler comment on peut étudier, en coordonnées rectilignes, la concavité ou la convexité d'un arc de courbe vers un point;

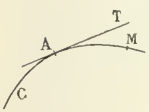
2° De montrer que les résultats ainsi obtenus s'appliquent très simplement à l'étude de la transformée par développement d'une section plane d'un cône.

Cette dernière question a déjà été traitée par M. Antomari dans le numéro d'août 1895 de la *Revue*, à l'aide des coordonnées polaires.

I. — Supposons que les coordonnées rectilignes x et y d'un point M d'un arc de courbe C s'expriment en fonction d'une même variable indépendante t par les formules

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

et cherchons la position de la courbe par rapport à une tangente AT au voisinage du point de contact A ayant pour coordonnées



$$x_0 = f(t_0), \qquad y_0 = \varphi(t_0).$$

Soit $t = t_0 + h$ et supposons remplies toutes les conditions nécessaires pour que x et y soient développables par la formule de Taylor limitée. Écrivons les développements sous les formes suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{h}{1} x'_0 + \dfrac{h^2}{1.2} x''_0 + \dfrac{h^3}{1.2.3} f'''(t_0 + \theta h), \\ y = y_0 + \dfrac{h}{1} y'_0 + \dfrac{h^2}{1.2} y''_0 + \dfrac{h^3}{1.2.3} \varphi'''(t_0 + \theta_1 h), \end{cases}$$

avec

$$x'_0 = f'(t_0), \qquad x''_0 = f''(t_0), \qquad 0 < \theta < 1,$$
$$y'_0 = \varphi'(t_0), \qquad y''_0 = \varphi''(t_0), \qquad 0 < \theta_1 < 1.$$

L'équation de la tangente AT sera, en prenant X et Y pour coordonnées courantes et supposant

x'_0 et y'_0 non nuls en même temps,

$$(X - x_0)y'_0 - (Y - y_0)x'_0 = 0.$$

Appelons $F(X, Y)$ le premier membre de cette équation.

Pour étudier la position du point M, de coordonnées x et y, par rapport à AT, il faut étudier le signe de $F(x, y)$ lorsque M se déplace sur la courbe. On a

$$F(x, y) = \frac{h^2}{1.2}(x''_0 y'_0 - x'_0 y''_0) + \frac{h^3}{1.2.3}\left[y'_0 f'''(t_0 + \theta h) - x'_0 \varphi'''(t_0 + \theta_1 h)\right].$$

Soit d'abord $$x''_0 y'_0 - x'_0 y''_0 = K \neq 0.$$

On pourra choisir h assez petit pour que $F(x, y)$ garde le signe de Kh^2 ou de K. Donc, au voisinage du point de contact A, la courbe sera située d'un seul côté de sa tangente, elle sera dite concave de ce côté.

Pour savoir si un point M_1 ayant pour coordonnées (x_1, y_1) est situé ou non de ce même côté de la tangente, il suffira de former $F(x_1, y_1)$ et de voir si cette expression a ou non le signe de K, c'est-à-dire si le produit $KF(x_1, y_1)$ est positif ou négatif; si ce produit était nul, le point M_1 serait sur la tangente. Si l'on a $KF(x_1, y_1) > 0$, la courbe est dite, au voisinage du point A, concave vers le point M_1; dans le cas contraire elle est dite convexe vers ce point.

En donnant au point (x_1, y_1) des positions particulières, on aura différents énoncés de cette règle.

Soient, par exemple, $x_1 = 0$, $y_1 = +\infty$; $F(x_1, y_1)$, égal à $(x_1 - x_0)y'_0 - (y_1 - y_0)x'_0$, aura le signe de $-x'_0$. Si l'on a pris x pour variable indépendante, il en résulte

$$x'_0 = 1, \qquad x''_0 = 0, \qquad K = -y''_0$$

et $KF(x_1, y_1)$ a le signe de y''_0. On voit ainsi que si l'on a $y''_0 > 0$ la courbe est concave vers les y positifs : c'est la règle bien connue.

On verrait de même que si l'on prend y pour variable indépendante et si l'on a $x''_0 > 0$ la courbe est concave, au voisinage du point (x_0, y_0), vers les x positifs.

Enfin, faisons $x_1 = y_1 = 0$, d'où $F(x_1, y_1) = x'_0 y_0 - y'_0 x_0$ et $KF(x_1, y_1) = (x''_0 y'_0 - y''_0 x'_0)(x'_0 y_0 - y'_0 x_0)$. On reconnaît qu'au voisinage du point (x_0, y_0) la courbe est concave ou convexe vers l'origine suivant que le produit $(x''_0 y'_0 - y''_0 x'_0)(x'_0 y_0 - y'_0 x_0)$ est positif ou négatif; si ce produit est nul, la tangente passe par l'origine.

Rappelons que cela suppose

$$x''_0 y'_0 - y''_0 x'_0 \neq 0.$$

Déplaçons maintenant le point A sur la courbe C.

Tant que le produit $KF(x_1, y_1)$ gardera un signe constant, l'arc décrit par le point A sera, en chacun de ses points, constamment concave ou constamment convexe vers le point M_1; il sera dit concave ou convexe vers ce point.

Comme on suppose toujours que les formules (1) s'appliquent, le produit $KF(x_1, y_1)$ reste fini et continu; il ne peut changer de signe qu'en s'annulant. S'il s'annulait en tous les points d'un arc de courbe, on reconnaît aisément que cet arc se réduirait à une ligne droite : nous écarterons ce cas. Alors, le produit $KF(x_1, y_1)$ ne s'annulera en changeant de signe qu'en des points particuliers. La courbe se décomposera donc en un certain nombre d'arcs tels que chacun d'eux soit concave ou convexe vers M_1.

Les points de division se partageront en plusieurs classes :

1° Ceux où $F(x_1, y_1)$ s'annule seul en changeant de signe : ce sont des points de contact de tangentes passant par M_1.

2° Ceux où K s'annule seul en changeant de signe : ils ne dépendent que de la courbe et non du point M_1; on peut reconnaître que ce sont des points d'inflexion.

3° Ceux où K et $F(x_1, y_1)$ s'annulent en même temps, de telle sorte que leur produit change de signe

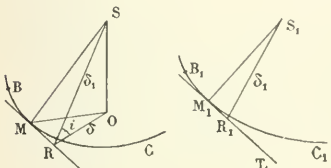
sans que x'_0 et y'_0 soient nuls en même temps : ce sont des points d'inflexion où la tangente passe par M_1.

Ces conclusions supposent que x'_0 et y'_0 ne sont pas nuls en même temps ; s'il en était ainsi en un point, l'équation $F(X, Y) = 0$ se réduirait à une identité et ne représenterait plus la tangente. Le but de cette note n'est pas l'étude détaillée des points où cette particularité se présente ; l'un d'eux peut servir ou non de limite commune à un arc concave et à un arc convexe vers M_1 ; on reconnaîtra que dans le premier cas la courbe y présente une inflexion ou un rebroussement de 1re espèce.

Enfin, il peut rester des points où les formules (1) ne s'appliquent plus : il est clair qu'un de ces points pourra séparer un arc concave d'un arc convexe vers M_1.

II. — Soient maintenant S le sommet d'un cône, C sa base dans un plan P, $SO = h \neq 0$ sa hauteur perpendiculaire au plan P.

Quand on développe le cône sur un plan, le sommet S devient S_1, la courbe C devient C_1 et au point M de la courbe C correspond un certain point M_1 de la courbe C_1.



Rapportons C à deux axes rectangulaires Ox, Oy, passant par O et soient (x, y) les coordonnées du point M.

Rapportons C_1 à deux axes rectangulaires S_1X, S_1Y, passant par S_1 et soient (X, Y) les coordonnées du point M_1.

La longueur de l'arc BM de la courbe C limité au point fixe B est égale à celle de l'arc correspondant B_1M_1 de la transformée C_1.

Le carré de la dérivée de l'arc BM par rapport à la variable indépendante t quelconque est $x'^2 + y'^2$ et le carré de la dérivée de l'arc B_1M_1 par rapport à la même variable est $X'^2 + Y'^2$. On a donc

$$x'^2 + y'^2 = X'^2 + Y'^2. \tag{2}$$

En même temps $\overline{OM}^2 + \overline{OS}^2 = \overline{SM}^2 = \overline{S_1M_1}^2$,

ou

$$x^2 + y^2 + h^2 = X^2 + Y^2. \tag{3}$$

On tire des formules (2) et (3) la relation

$$(x''y' - y''x')(x'y - y'x) = (X''Y' - Y''X')(XY' - YX). \tag{4}$$

Il suffit, pour cela, de remarquer que l'on a identiquement

$$(x''y' - y''x')(x'y - y'x) = (xx' + yy')(x'x'' + y'y'') - (x'^2 + y'^2)(xx'' + yy'')$$

et que les formules (2) et (3) donnent, par des dérivations faciles,

$$x'x'' + y'y'' = X'X'' + Y'Y'', \qquad xx' + yy' = XX' + YY'$$

et

$$xx'' + yy'' = XX'' + YY''.$$

Ce calcul, déjà simple, le serait encore plus si l'arc BM était pris pour variable indépendante, car on aurait

$$x'^2 + y'^2 = X'^2 + Y'^2 = 1, \qquad x'x'' + y'y'' = 0, \qquad XX' + YY' = 0.$$

De la relation (4), on tire la conclusion suivante :

Si la courbe C *est, au voisinage du point* M, *concave ou convexe vers le point* O, *la courbe* C_1 *sera aussi, au voisinage du point* M_1, *concave ou convexe vers le point* S_1.

A tout arc de C concave ou convexe vers le point O correspond un arc de C_1 concave ou convexe vers S_1.

Il faut ajouter que le facteur $X'Y - Y'X$ ne peut s'annuler si X' et Y' ne s'annulent pas en même temps. On a, en effet,

$$(X'Y - Y'X)^2 = (X'^2 + Y'^2)(X^2 + Y^2) - (XX' + YY')^2 = (x'^2 + y'^2)(x^2 + y^2 + h^2) - (xx' + yy')^2,$$

ou

$$(X'Y - Y'X)^2 = (x'y - y'x)^2 + h^2(x'^2 + y'^2);$$

donc si $X'Y - Y'X = 0$, il en résulte

$$x'y - y'x = 0 \qquad \text{et} \qquad x'^2 + y'^2 = 0, \qquad x' = 0, \qquad y' = 0;$$

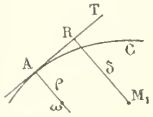
puis, en vertu de (2),

$$X' = 0, \quad Y' = 0.$$

Quand l'un ou l'autre des facteurs $x''y' - y''x'$ ou $x'y - y'x$ s'annule en changeant de signe en un point M où x' et y' ne sont pas nuls en même temps, c'est donc le facteur $(X''Y' - Y''X')$ qui s'annule en changeant de signe en un point M_1 où X' et Y' ne sont pas nuls en même temps : ce point M_1 est, dans les deux cas, un point d'inflexion de C_1. Le point M est, alors, soit un point d'inflexion de C, soit un point de C où la tangente passe par l'origine O.

Je n'étudierai pas les points où x' et y' seraient nuls en même temps, ni ceux où les formules (1) cesseraient de s'appliquer.

III. — **Interprétation géométrique.** — Revenons aux notations du n° I et remarquons que si (α, β) sont les coordonnées d'un point ω pris sur la normale en A à la courbe C et si M_1R est la distance du point M_1 à la tangente AT, on a



$$\frac{F(x_1, y_1)}{F(\alpha, \beta)} = \frac{\overline{RM_1}}{\overline{A\omega}}.$$

Dans cette formule le rapport $\frac{\overline{RM_1}}{\overline{A\omega}}$ est positif ou négatif suivant que les deux segments $\overline{RM_1} = \delta$ et $\overline{A\omega} = \rho$ sont de même sens ou de sens contraires. Cherchons ce que devient cette équation quand ω est le centre de courbure de la courbe C au point A, c'est-à-dire le point de contact de la normale en A avec l'enveloppe des normales. Les coordonnées de ce point satisfont à l'équation de la normale et à celle que l'on en déduit en prenant les dérivées de ses deux membres par rapport à t. On a ainsi en supposant les axes rectangulaires

$$(\beta - y_0)y_0 + (\alpha - x_0)x'_0 = 0, \qquad (\beta - y_0)y''_0 + (\alpha - x_0)x''_0 - x'^2_0 - y'^2_0 = 0;$$

puis

$$\frac{\alpha - x_0}{y'_0} = \frac{\beta - y_0}{-x'_0} = \frac{x'^2_0 + y'^2_0}{x''_0 y'_0 - y''_0 x'_0} = \frac{(\alpha - x_0)y'_0 - (\beta - y_0)x'_0}{x'^2_0 + y'^2_0};$$

d'où

$$F(\alpha, \beta) = (\alpha - x_0)y'_0 - (\beta - y_0)x'_0 = \frac{(x'^2_0 + y'^2_0)^2}{x''_0 y'_0 - y''_0 x'_0} = \frac{(x'^2_0 + y'^2_0)^2}{K},$$

et enfin

$$\frac{F(x_1, y_1)}{F(\alpha, \beta)} = \frac{KF(x_1, y_1)}{(x'^2_0 + y'^2_0)^2} = \frac{\overline{RM_1}}{\overline{A\omega}} = \frac{\delta}{\rho}.$$

L'inégalité $KF(x_1, y_1) > 0$, qui exprime la concavité vers M_1, exprime donc que le point M_1 et le centre de courbure ω sont du même côté de la tangente AT. Ces remarques, appliquées aux deux courbes C et C_1 du n° II, où

$$\delta = RO, \qquad \delta_1 = R_1S_1 = RS,$$

les rayons de courbure en M et M_1 étant ρ et ρ_1, donnent

$$\frac{\delta}{\rho} = \frac{\delta_1}{\rho_1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\delta}{\delta_1} = \frac{\rho}{\rho_1}.$$

Mais, en désignant par $i = \widehat{ORS}$ l'angle du plan tangent au cône en M avec le plan P, on a

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \cos i, \qquad \text{donc} \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = \cos i.$$

On trouve ainsi une relation bien connue.

LEMME D'ARITHMÉTIQUE

par M. **A. Goulard**, Professeur au lycée de Marseille.

Si un nombre premier p divise une somme de quatre carrés dont un au moins n'est pas divisible par p, il est lui-même une somme de quatre carrés au plus.

Divisons A, B, C, D par p, et soit $A = m.p \pm a$, $B = m.p \pm b$, $C = m.p \pm c$, $D = m.p \pm d$, a, b, c, d étant les restes minimums. On en déduit

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = m.p + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2);$$

donc p divise $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, et l'on peut poser

$$(1) \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = pq.$$

Comme nous avons supposé que l'un au moins des quatre restes a, b, c, d n'est pas nul, q n'est pas nul. D'autre part, on a

$$2a < p, \qquad 2b < p, \qquad 2c < p, \qquad 2d < p;$$

on en déduit

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < p^2,$$

c'est-à-dire

$$q < p.$$

Si $q = 1$, la proposition est vérifiée. Supposons maintenant $q > 1$, et divisons a, b, c, d par q : soit

$$a = qf + \alpha, \qquad b = qg + \beta, \qquad c = qh + \gamma, \qquad d = qk + \delta,$$

α, β, γ, δ étant les restes minimums, positifs ou négatifs. On en déduit

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m.q + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2);$$

donc q divise $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, et l'on peut poser

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = qq'.$$

Les restes α, β, γ, δ ne sont pas nuls tous les quatre : car, s'ils étaient nuls, a, b, c, d seraient divisibles par q, la somme $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ serait divisible par q^2, et par suite le nombre premier p serait divisible par q, ce qui est impossible, puisque q est compris entre 1 et p; donc q' n'est pas nul. D'autre part, on a

$$2\,|\,\alpha\,| \leqslant q, \qquad 2\,|\,\beta\,| \leqslant q, \qquad 2\,|\,\gamma\,| \leqslant q, \qquad 2\,|\,\delta\,| \leqslant q;$$

on en déduit

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \leqslant q^2,$$

et par suite

$$q' \leqslant q.$$

Mais pour avoir $q' = q$, il faudrait que

$$2\alpha = 2\beta = 2\gamma = 2\delta = q,$$

d'où

$$a = \frac{q}{2}(2f + 1), \qquad b = \frac{q}{2}(2g + 1), \qquad c = \frac{q}{2}(2h + 1), \qquad d = \frac{q}{2}(2k + 1);$$

en divisant alors tous les termes de l'égalité (1) par q, on aurait

$$q[f(f+1) + g(g+1) + h(h+1) + k(k+1) + 1] = p,$$

ce qui est impossible. En résumé, on a

$$0 < q' < q.$$

Cela posé, multiplions membre à membre les égalités (1) et (2) : il vient

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = pq^2q'.$$

Mais, d'après la formule d'Euler, le premier membre peut se mettre sous la forme d'une somme de quatre carrés, et l'on trouve

$$\begin{aligned}
a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta &= q'(f\alpha+g\beta+h\gamma+k\delta)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2),\\
&= q(f\alpha+g\beta+h\gamma+k\delta+q'),\\
a\beta-b\alpha-c\delta+d\gamma &= q(f\beta-g\alpha-h\delta+k\gamma),\\
a\gamma+b\delta-c\alpha-d\beta &= q(f\gamma+g\delta-h\alpha-k\beta),\\
a\delta-b\gamma+c\beta-d\alpha &= q(f\delta-g\gamma+h\beta-k\alpha).
\end{aligned}$$

En désignant par a', b', c', d' les valeurs absolues des nombres qui multiplient q dans les seconds membres, on aura

$$a'^2+b'^2+c'^2+d'^2=pq'. \tag{3}$$

Si $q'=1$, la proposition est vérifiée. Supposons donc $q'>1$. On observera que, pour transformer l'égalité (1), nous n'avons fait d'autres hypothèses que les suivantes : p premier et $1<q<p$. Comme on a de même $1<q'<p$, on pourra transformer l'égalité (3) comme on a transformé l'égalité (1), et l'on arrivera à une égalité de la forme

$$a''^2+b''^2+c''^2+d''^2=pq'',$$

avec les conditions $0<q''<q'$. Et ainsi de suite

Les quotients q, q', q'',.. .. allant toujours en diminuant sans qu'ils deviennent jamais nuls, l'un d'eux finira par devenir égal à 1, et l'on verra alors que p est égal à une somme de quatre carrés au plus.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

683. — *On considère un triangle* TPQ *inscrit dans une conique* Σ. *L'un des sommets* T *est fixe, le côté opposé passe par un point fixe* M ; *les deux autres côtés rencontrant une droite fixe* D *en deux points* A *et* B, *on demande le lieu des points de rencontre des tangentes menées par* A *et* B *à* Σ. *Ce lieu est une conique* C, *dont on demande l'enveloppe lorsque le point* T *se déplace sur la conique* Σ. *Dans la même hypothèse, on demande le lieu des points de rencontre des tangentes à* Σ *aux points communs à* C *et à* Σ. *Examiner le cas particulier où le point* M *est sur la droite* D.

Nous prendrons pour côtés du triangle de référence la droite D $(z=0)$ et les tangentes à la conique Σ aux points de rencontre avec la droite D. Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M et par $z^2-xy=0$ l'équation de la conique Σ.

On peut prendre pour coordonnées d'un point quelconque de la conique les valeurs $x=1$, $y=\lambda^2$, $z=\lambda$; de telle sorte qu'à toute valeur du paramètre λ correspond un point de la conique Σ.

Soient p et q les paramètres relatifs aux points P et Q ; l'équation de la droite PQ est

$$\begin{vmatrix} x & y & z\\ 1 & p^2 & p\\ 1 & q^2 & q \end{vmatrix}=0,$$

ou, en divisant par $p-q$,

$$pqx+y-z(p+q)=0.$$

En écrivant que cette droite passe au point M, on a

$$pqx_0+y_0-z_0(p+q)=0. \tag{1}$$

La droite PT qui a pour équation

$$ptx + y - z(p + t) = 0$$

rencontre D au point A dont les coordonnées x', y', z' sont fournies par les équations $z = 0$, $ptx' + y' = 0$.

L'ensemble des tangentes issues de ce point à la conique Σ a pour équation

$$(2zz' - xy' - yx')^2 - 4(z^2 - xy)(z'^2 - x'y') = 0,$$

ou

$$(2) \qquad (ptx - y)^2 - 4pt(z^2 - xy) = 0;$$

de même, les tangentes issues du point B, intersection des droites D et TQ, ont pour équation

$$(3) \qquad (qtx - y)^2 - 4qt(z^2 - xy) = 0.$$

Nous aurons l'équation du lieu en éliminant p et q entre les équations (1), (2) et (3).

Les équations (2) et (3) ne diffèrent que par le changement de p et q; elles expriment donc que p et q doivent être les racines de l'équation du deuxième degré

$$(\mathrm{X}tx - y)^2 - 4\mathrm{X}t(z^2 - xy) = 0$$

ou

$$\mathrm{X}^2t^2x^2 - 2\mathrm{X}t(2z^2 - xy) + y^2 = 0.$$

Nous en tirons

$$p + q = \frac{2t(2z^2 - xy)}{t^2x^2}, \qquad pq = \frac{y^2}{t^2x^2},$$

et en portant ces valeurs dans l'équation (1), nous obtenons

$$(\mathrm{C}) \qquad y^2x_0 + t^2x^2y_0 - 2tz_0(2z^2 - xy) = 0.$$

C'est l'équation du lieu; elle représente une conique C.

Pour avoir son enveloppe quand le point T se déplace sur Σ, il suffit d'écrire que son équation, considérée comme du deuxième degré par rapport à t, a une racine double; nous avons ainsi

$$z_0^2(2z^2 - xy)^2 - x_0y_0x^2y^2 = 0,$$

ou

$$z_0(2z^2 - xy) = \pm xy\sqrt{x_0y_0}.$$

Cette enveloppe se compose de deux coniques bitangentes à la conique Σ aux points où celle-ci est rencontrée par la droite D.

Cherchons maintenant le lieu des points de rencontre des tangentes à Σ aux points communs à C et Σ.

En remplaçant dans l'équation de C x par 1, y par λ^2 et z par λ, nous obtenons l'équation

$$(4) \qquad \lambda^4x_0 - 2tz_0\lambda^2 + t^2y_0 = 0,$$

qui admet comme racines les valeurs des paramètres correspondant aux points de Σ qui sont situés sur la conique C.

Soit (x', y', z') un point du lieu; la polaire de ce point par rapport à Σ $(2zz' - xy' - yx' = 0)$ rencontre cette conique en deux points dont les paramètres vérifient l'équation

$$(5) \qquad \lambda^2x' - 2\lambda z' + y' = 0.$$

Nous aurons l'équation du lieu en écrivant que les deux racines de l'équation (5) vérifient l'équation (4).

On pourrait diviser le premier membre de l'équation (4) par celui de l'équation (5) et écrire que le reste est identiquement nul; il sera plus simple de profiter de ce que l'équation (4) est bicarrée en opérant de la manière suivante.

La condition cherchée peut être remplie de deux manières. Ou bien les deux racines de (4) qui vérifient (5) sont égales et de signes contraires, ou bien leurs carrés sont différents.

Dans la première hypothèse, on doit avoir $z' = 0$; il en résulte que la droite D fait partie du lieu.

Supposons maintenant que les racines λ_1 et λ_2 de l'équation (5) aient leurs carrés différents; alors les quatre racines de l'équation bicarrée sont $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, et nous avons les égalités

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{2tz_0}{x_0}, \qquad \lambda_1^2\lambda_2^2 = \frac{t^2y_0}{x_0},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2z'}{x'}, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \frac{y'}{x'}.$$

Nous en déduisons sans difficulté

$$\frac{2tz_0}{x_0} + \frac{2y'}{x'} = \frac{4z'^2}{x'^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{t^2y_0}{x_0} = \frac{y'^2}{x'^2}.$$

Il ne nous reste plus qu'à éliminer t entre ces deux équations. Ce calcul est fort simple et conduit à l'équation du lieu

$$(2z'^2 - x'y')^2x_0y_0 - z_0^2x'^2y'^2 = 0.$$

ou, en supprimant les accents,

$$\pm(2z^2 - xy\sqrt{x_0y_0} = z_0xy.$$

Le lieu se compose de deux coniques bitangentes à Σ aux points de rencontre avec D.

Si le point M est sur la droite D, on a $z_0 = 0$, la conique (C) se réduit à deux droites $y^2x_0 + t^2x^2y_0 = 0$, qui se coupent en un point fixe.

Le dernier lieu se réduit à la droite D et à la conique $2z^2 - xy = 0$.

Bonne solution de M. L. Sayous.

Solution géométrique. — On sait que :

Deux points A *et* B *et les points de contact des tangentes menées de chacun d'eux à une conique* Σ *sont sur une même conique* C. *Cette conique* C *est le lieu des points* m *tels que les tangentes menées de ces points à* Σ *soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites* mA, mB.

Ceci rappelé, soient E et F les points de contact des tangentes menées de M à la conique Σ et désignons par e, f, p, q, les points où les droites TE, TF, TP, TQ rencontrent la droite D (*fig.* 1).

Quand la sécante PQ pivote autour de M, les points p, q déterminent sur la droite D une involution dont les points doubles sont e et f. Si donc m est le point de rencontre de deux tangentes menées à Σ des points p et q, les droites mp, mq sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites me, mf. Le lieu du point m est donc la conique C′ qui passe par les points e, f et les points de contact des tangentes menées de ces points à Σ.

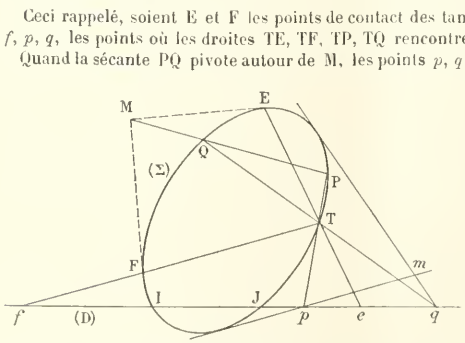


Fig. 1

Projetons la figure de façon que les points I, J d'intersection de Σ avec la droite D deviennent les ombilics du plan. La conique Σ se transforme en un cercle Σ'. Aux points de contact des tangentes menées de e et f à Σ, correspondent sur Σ' deux couples de points a, a', b, b' diamétralement opposés. La transformée de C est donc une conique C′ circonscrite au rectangle $aba'b'$, dont le centre est, par suite, le centre ω de Σ' et dont les asymptotes sont parallèles aux tangentes en a et b à Σ'.

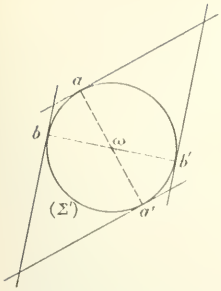


Fig. 2

Or, quand le point T décrit Σ, les points e et f déterminent sur D deux divisions homographiques dont les points doubles sont I et J. A chaque couple de points (e, f) correspondra une conique C' que l'on construira comme ci-dessus. D'ailleurs, l'angle des tangentes en a et b à Σ' restera constant. Toutes les coniques C' se déduiront donc de la première par une simple rotation autour de ω. Leur enveloppe sera le lieu de leurs sommets, c'est-à-dire un cercle concentrique à Σ'. L'enveloppe des coniques C est donc une conique bitangente à Σ en I et J.

De même, le lieu des points de rencontre des tangentes à Σ' en a, b, a', b', se compose de la droite de l'infini droite double et de deux cercles concentriques à Σ'. Le lieu des points de rencontre des tangentes à Σ aux points communs à C et Σ se composera donc de la droite double D et de deux coniques bitangentes à Σ en I et J.

Si, en particulier, M est sur la droite D, les points I et J constituent un couple de points p, q. Les points e et f, conjugués par rapport au segment IJ, le sont aussi par rapport à la conique Σ. Il en résulte immédiatement que la conique C se décompose en les deux droites Pe, Pf issues du pôle P de D par rapport à Σ.

Quand T décrit Σ, ces deux droites déterminent un faisceau involutif dont les rayons doubles sont les tangentes PI, PJ à Σ.

Cherchons enfin le lieu des points de rencontre des tangentes à Σ aux points où deux rayons conjugués du faisceau Pe, Pf la rencontrent. En associant les points situés sur un même rayon, on obtient la droite D parcourue deux fois. Si les points I et J sont réels, c'est là tout le lieu cherché car un seul des deux rayons Pe, Pf rencontre Σ en deux points réels.

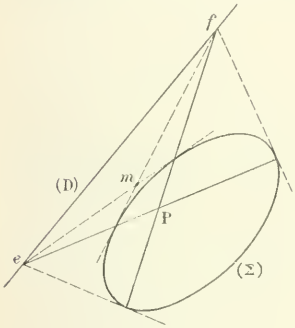


Fig. 3

Dans le cas où les points I et J sont imaginaires (*fig.* 3) il y a lieu de considérer en outre les points de rencontre m des tangentes obtenues en prenant deux points appartenant à chacun des deux rayons Pe, Pf. Elles passent respectivement par les points f, e, et sont conjuguées par rapport aux droites mI, mJ. Le lieu du point m est donc, puisque I et J appartiennent à Σ, une conique S bitangente à Σ, D étant la corde des contacts. Et, quand T décrit Σ, la conique S est parcourue deux fois par le point m.

On arrive d'ailleurs immédiatement à ce résultat en projetant comme plus haut de façon que les points I et J deviennent les points cycliques.

N. B. — Pour plus de commodité dans la notation, les lettres A, B de l'énoncé ont été remplacées par les lettres p, q.

VICTOR BERTRAND, Répétiteur au lycée de Lille.

---

694. — *Si p, q, r désignent des nombres réels et que l'équation*

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 - 4r)x + q^2 = 0$$

ait une racine réelle, simple, positive, l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

a toutes ses racines imaginaires.

Il est facile de déduire la première équation de la seconde. Désignons en effet par u la somme de deux racines de l'équation du quatrième degré, par v la somme des deux autres, par u' et v' les produits des racines dans les deux couples et formons l'équation qui donne les six valeurs de u. Elle se déduit facilement des quatre relations qui existent entre les racines et les coefficients de l'équation du quatrième degré. Celles-ci s'écrivent en effet

$$u + v = 0, \qquad uv + u' + v' = p,$$
$$uv' + vu' = -q, \qquad u'v' = r,$$

et les trois premières donnent successivement $v = -u$, $u' + v = p + u^2$, $u' - v' = \frac{q}{u}$; de là, nous déduisons $4u'v' = (u^2 + p)^2 - \frac{q^2}{u^2}$ et, par suite, $4r = (u^2 + p)^2 - \frac{q^2}{u^2}$; il suffit de développer cette équation et d'y poser $u^2 = -y$ pour obtenir l'équation indiquée

$$(1) \qquad y^3 - 2py^2 + (p^2 - 4r)y + q^2 = 0.$$

Cela posé, étudions tous les cas qui peuvent se présenter. Les cas généraux sont :

1. Les quatre racines de l'équation du quatrième degré sont réelles et distinctes. Alors leurs sommes deux à deux sont réelles et les valeurs de y sont toutes les trois négatives, en général, l'une d'elles cependant pouvant être nulle.

2. Deux racines sont réelles et distinctes, x_1 et x_2, les deux autres sont imaginaires conjuguées, $x_3 = \alpha + i\beta$, $x_4 = \alpha - i\beta$. On a alors $x_1 + x_2 = -2\alpha$, la valeur correspondante de y est négative; puis $x_1 + x_3 = x_1 + \alpha + i\beta$; si on tient compte de ce que la somme des racines est nulle, on retrouve $x_1 + x_2 = -2\alpha$; on ne peut avoir $x_1 + \alpha = 0$, car on aurait alors $x_2 + \alpha = 0$, et, par suite, $x_1 = x_2$, ce qui n'est pas supposé; la seconde valeur de y est donc imaginaire; il en est de même de la troisième.

3. Les quatre racines de l'équation du quatrième degré sont distinctes et imaginaires conjuguées deux à deux; elles peuvent alors se représenter par $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, $-\alpha + i\beta'$, $-\alpha - i\beta'$. On a, dans ce cas,

$$x_1 + x_2 = 2\alpha, \qquad x_1 + x_3 = i(\beta + \beta'), \qquad x_1 + x_4 = i(\beta - \beta');$$

d'autre part, puisque β et β' sont supposés différents de 0, les deux dernières sommes sont distinctes et il y a une valeur de y qui est négative, deux qui sont positives et distinctes.

Les autres cas sont des cas particuliers. Nous nous bornerons à étudier le cas qui peut présenter un doute au point de vue du résultat demandé : celui dans lequel il y a une racine double réelle et deux racines imaginaires conjuguées. Dans ce cas, les racines se représentent par α, α, $-\alpha + \beta i$, $-\alpha - \beta i$ et l'équation en y a une racine négative et une racine double positive.

Le seul cas qui corresponde à l'énoncé est donc le troisième et la vérité du théorème en découle.

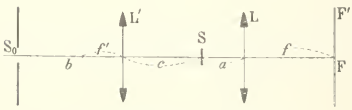
CONCOURS DE 1898 (*Suite*).

CONCOURS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Physique (Paris).

I. — Lois expérimentales de la capillarité.

II. — **750.** — On se propose d'éclairer un écran FF′ situé normalement à l'axe optique dans le plan focal d'une lentille convergente L, de distance focale f, au moyen d'une petite source lumineuse S circulaire, de rayon donné ρ, dont le plan est normal à l'axe optique de la lentille et dont le centre est sur cet axe.



Cette source S est en réalité l'image, fournie par une lentille auxiliaire convergente L′ de distance focale f', d'une ouverture circulaire S_0 de rayon convenable pour que son image S ait les dimensions voulues, ouverture éclairée en arrière par une source lumineuse d'éclat uniforme.

Les axes optiques des deux lentilles L et L′ sont confondus et les surfaces découvertes de ces deux lentilles sont des cercles de même rayon.

On demande d'étudier comment varie l'éclairement de l'écran FF′ avec la distance focale de la lentille auxiliaire, avec la distance de S à la lentille L et avec celle de l'ouverture éclairée S_0 à la lentille L′.

On comparera cet éclairement avec celui qu'on obtiendrait en éclairant directement l'écran par une source située à une distance de l'écran égale à la distance focale de L, cette source ayant même étendue que S et même éclat intrinsèque que S_0.

L'inclinaison des faisceaux sur l'axe est assez petite pour qu'il n'y ait pas lieu d'en tenir compte.

(27 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.)

Chimie (Paris).

I. — Arsenic et ses composés étudiés dans le cours. Analogies de l'arsenic avec le phosphore et l'antimoine.

II. — **751.** — Un mélange d'oxygène, d'ozone et de chlore, occupant V centimètres cubes dans les conditions normales de température et de pression, est mis au contact d'une dissolution aqueuse d'acide arsénieux jusqu'à la fin de la réaction. On ajoute une quantité d'iode juste suffisante pour qu'il n'en reste plus à l'état libre; soit a grammes ce poids. La liqueur exactement neutralisée donne avec l'azotate d'argent en excès un précipité qui, desséché, pèse P grammes. Ce précipité lavé à l'acide azotique étendu est réduit à un poids P′. Déduire de ces données la composition en volumes du mélange gazeux. Les inconnues seront exprimées en fonction de V, a, P, P′ et des constantes numériques sans effectuer aucun calcul. On fera ensuite dans les formules

$$V = 1500^{cmc}, \qquad a = 2^{gr},54, \qquad P = 21^{gr},46, \qquad P' = 7^{gr},57,$$

et on achèvera le calcul.

$$Ag = 108, \qquad As = 75, \qquad I = 127.$$

(3 juin, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Physique et Chimie.

Physique. — I. — Mélange des gaz et des vapeurs.

II. — **752.** — On a un cylindre droit vertical à base circulaire de rayon R et de hauteur H. A partir d'un point de la circonférence de la base inférieure on lance verticalement, de bas en haut, un point pesant avec une vitesse V.

1° Déterminer V pour que le projectile atteigne, sans la dépasser, la base supérieure du cylindre.

2° On opère de la même manière pendant que le cylindre tourne uniformément autour de son axe en faisant un tour pendant le temps T entre le départ du projectile et son retour au point de départ: trouver l'équation de la courbe tracée par le projectile sur le cylindre.

3° Comment doit être construit un appareil destiné à inscrire sur un cylindre tournant la trace de la chute d'un corps, pour que la courbe obtenue permette de vérifier assez exactement les lois de la pesanteur.

Chimie. — Préparation du cyanogène; son analyse; ses caractères; ses analogies avec le chlore.

(6 juin, de 7 h. à 10 h.)

Mathématiques.

753. — On considère une sphère (S) de rayon R, qui a pour centre l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, et un paraboloïde (P) qui a pour plan directeur xOy, et pour directrices: 1° l'axe Oz; 2° la droite AB définie par les points A et B dont les coordonnées x, y, z sont respectivement (R, 0, R) et (a, b, c).

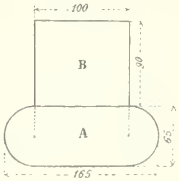
I. — Former les équations de la sphère et du paraboloïde.

II. — On prend un point M sur Oz, et les plans polaires [Σ] et [H] de ce point par rapport aux surfaces (S) et (P). Trouver le lieu de l'intersection de ces deux plans, quand M décrit Oz: déterminer la partie du lieu qui est sur le paraboloïde (P).

III. — En supposant AB à 45° sur Oz, et tangente à la sphère (S) au point B, dans le trièdre $Oxyz$, calculer les coordonnées a, b, c du point B en fonction de R: déterminer les génératrices du paraboloïde (P) qui sont tangentes à la sphère (S); calculer le nombre de centièmes de la cote c du point B, quand R est égal à 1.

On conservera les notations indiquées.

(7 juin, de 7 h. à 11 h.)



Lavis.

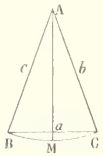
Exécuter en élévation, à teintes plates ou à teintes fondues, à volonté, le lavis d'un tore A surmonté par un cylindre B.

Les deux solides ont un même axe vertical.

Les dimensions sont indiquées en millimètres sur le croquis ci-contre.

Rayon lumineux à 45°.

(*7 juin, de 2 h. à 1 h. 1/2.*)



Calcul trigonométrique.

Un triangle isocèle ABC a pour côtés : $a = 23^{m},8274$, $b = c = 34^{m},9865$.

1° Calculer A, B, C, et la surface du triangle, S.

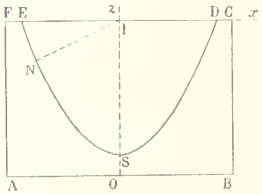
2° Calculer l'aire σ du secteur circulaire ABMC dans le cercle de centre A et de rayon AB.

3° Calculer en mètres cubes le volume engendré par la révolution complète du secteur ABMC tournant autour de son axe de symétrie AM.

(*7 juin, de 1 h. 1/2 à 6 h.*)

Géométrie descriptive.

754. — Un solide en forme de creuset ABCDEFS, repose sur le plan horizontal. Il est formé d'un cylindre droit à base circulaire dont le diamètre AB est égal à 16^{cm}, et la hauteur AF à 11^{cm}. La cavité ESD a la forme d'un paraboloïde de révolution autour de l'axe Oz du cylindre ; son diamètre supérieur $ED = 15^{cm}$; sa profondeur $IS = 9^{cm},5$.



On fera coïncider l'axe Oz du solide avec l'axe vertical de la feuille ; sa projection horizontale sera placée à 13^{cm} du bord inférieur de la feuille, et la projection verticale du point I à 4^{cm} au-dessous du bord supérieur du cadre.

La partie du solide à droite du plan de profil passant par Oz a été échancrée par un cylindre, dont l'axe IX est l'horizontale de front menée par le centre I de l'ouverture de la cavité, et dont le rayon est égal à la plus courte distance IN du point I à la surface parabolique intérieure.

Le solide est éclairé par des rayons parallèles de front venant d'en haut, à 45°, de gauche à droite.

On demande : 1° de représenter par ses projections le solide échancré, les parties vues en traits noirs pleins, les parties cachées en pointillé ; 2° de représenter par des hachures ou par une teinte noire légère, à volonté, les ombres déterminées sur la surface extérieure et intérieure du solide, et sur le plan horizontal.

On indiquera en traits pleins rouges les constructions nécessaires pour déterminer les points remarquables de l'épure.

(*8 juin, de 7 h. à 11 h.*)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Mathématiques.

755. Les axes $oxyz$ étant rectangulaires, on considère la surface T, du troisième degré,

$$(x^2 + y^2)(x + a) + z^2(x - a) = 0$$

où a est une constante donnée :

1° Il existe une infinité de sphères S dont chacune a son centre dans le plan xoy et est orthogonale à la surface T en tous les points de son intersection (1) avec cette surface. Lieu des centres des sphères S ;

2° Soit C l'intersection de la surface T et de l'une quelconque des sphères S : montrer que C se projette sur le plan xoy suivant une conique, et déterminer la portion de cette conique qui correspond à des points réels de C ;

3° Construire la projection de la courbe C sur le plan zox ;

4° Il existe une infinité de sphères Σ dont chacune est tangente à la surface T tout le long de son intersec-

(1) Dans toute la question, par intersection de la surface T avec une sphère, on entend l'intersection à *distance finie*.

tion avec cette surface. Lieu des centres des sphères Σ : (on pourra employer cette remarque que par l'intersection de la surface T et d'une sphère quelconque passent une infinité de surfaces du second degré) ;

5° Soit Γ la ligne de contact de T avec l'une quelconque des sphères Σ : montrer que cette ligne est un cercle ; lieu des centres de ces cercles ;

6° Montrer que toute sphère qui passe par un des cercles Σ coupe T suivant un autre cercle qui fait aussi partie des cercles Σ.

(13 juin, durée 6 h.)

Physique.

I. — Décomposition de la lumière par le prisme.

Procédé pour avoir un spectre pur.

II. — **756.** — Calculer les rayons des deux lentilles infiniment minces, lentille convergente en crown et lentille divergente en flint, qui doivent constituer un objectif achromatique, d'après les quatre conditions suivantes :

1° La distance focale principale du système sera égale à 1 mètre pour la lumière simple relativement à laquelle l'indice du crown est n, celui du flint n' ;

2° La distance focale principale du système sera encore égale à 1 mètre pour la lumière simple relativement à laquelle l'indice du crown est n_1, celui du flint n'_1 ;

3° Le rapport des rayons des faces extrêmes sera pris égal à celui qui, pour une lentille unique, réduirait au minimum l'aberration de sphéricité ;

4° Les rayons des faces en regard seront égaux et de signes contraires, de manière que les faces s'adaptent exactement l'une sur l'autre.

Discuter ces conditions.

(11 juin, durée 6 h.)

QUESTIONS PROPOSÉES

757. — Soient C et Γ deux coniques se coupant aux points I_1, I_2, I_3, I_4. Les tangentes en ces quatre points aux coniques C et Γ coupent les coniques Γ et C aux points A_1 et α_1, A_2 et α_2, A_3 et α_3, A_4 et α_4.

1° Les huit points A_1, A_2, A_3, A_4 ; α_1, α_2, α_3, α_4 sont sur une même conique à laquelle est autopolaire le triangle autopolaire commun aux deux coniques C et Γ ;

2° Six points, tels que I_1, I_2, A_3, A_4, α_3, α_4, sont sur une même conique. J. Merlin.

758. — Etant données deux coniques S et Σ telles que l'on puisse inscrire dans S une infinité de triangles ABC circonscrits à Σ, les points de contact des côtés BC, CA, AB étant les points α, β, γ, on sait que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourent en un point M ; démontrer que le lieu de M, quand le triangle ABC varie, est une conique passant par l'intersection de S et de Σ. J. Merlin.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NAVALE (Concours de 1898)

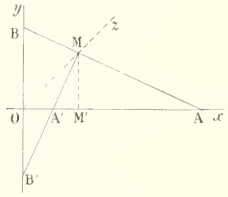
Géométrie analytique.

759. — I. — *Dans une circonférence on considère un diamètre et une corde parallèles. Démontrer que le paramètre de la parabole circonscrite au trapèze formé par ces deux droites est égal à la demi-distance de ces droites. Solution analytique ou géométrique.*

II. — *Oxy sont deux axes rectangulaires. D'un point M pris sur la bissectrice de l'angle xOy*

($OM' = M'M = a$), *on mène deux droites rectangulaires variables qui coupent les axes respectivement aux points* A, B *et* A', B'. *Soit* m *le coefficient angulaire de l'une d'elles qu'on prendra comme paramètre variable.*

On considère les deux paraboles dont l'une est circonscrite au triangle MAA' *et a son axe parallèle à* Oy, *dont l'autre est circonscrite au triangle* MBB' *et a son axe parallèle à* Ox.



A) *Démontrer que ces deux paraboles sont égales et que leur paramètre commun est indépendant de* m.

B) *Lieu du point de rencontre des axes ; lieu du point de rencontre des tangentes aux sommets ; lieu des sommets de ces deux paraboles.*

C) *Lieu des points de rencontre de ces deux paraboles.*

Pour simplifier les calculs, on mettra en évidence dans les équations des paraboles le coefficient $\mu = \dfrac{1 - m^2}{2m}$.

Dans la question II *les parties* A) *et* B) *sont susceptibles d'une démonstration géométrique en appliquant la question* I *et en se servant des propriétés du cercle des neuf points du triangle* ABB'.

(*3 juin, de 7 h. à 10 h. 1/2.*)

1. Soit p le paramètre d'une parabole et BB' une corde principale quelconque de cette courbe. Le cercle décrit sur BB' comme diamètre coupe la parabole en deux autres points réels ou imaginaires évidemment symétriques par rapport à l'axe Ox ; soit DD' la droite qui les joint ; les deux cordes principales BB' et DD' rencontrent l'axe aux points A et C et on a les relations

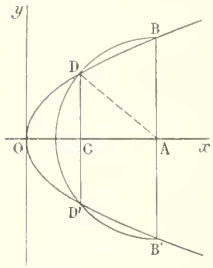


Fig. 1

$$\overline{AB}^2 = 2p.\overline{OA}, \qquad \overline{CD}^2 = 2p\overline{OC},$$

d'où

$$\overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 = 2p(\overline{OA} - \overline{OC}) = 2p.\overline{CA}.$$

En remplaçant le rayon AB par le rayon AD, puis $\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2$ par $\overline{CA}^2$, on obtient

$$\overline{CA}^2 = 2p.\overline{CA}, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{CA} = 2p.$$

Remarque. — A un quadrilatère on peut, en général, circonscrire deux paraboles ; mais si ce quadrilatère est un trapèze, l'une des paraboles se réduit aux deux bases et il n'existe plus qu'une parabole proprement dite passant par les quatre sommets. Remarquons en outre que la droite qui joint les milieux des deux bases est dans tous les cas un diamètre, et l'extrémité de ce diamètre est toujours plus voisine de la petite base que de la grande.

2. A) L'égalité des deux paraboles circonscrites aux triangles MAA', MBB' résulte de ce que, d'après la propriété qu'on vient d'établir, elles ont l'une et l'autre pour paramètre la moitié de la distance du point donné M à l'un ou l'autre des axes Ox et Oy.

Nous allons d'ailleurs trouver les équations des paraboles sans nous servir de la propriété établie ; cherchons d'abord l'équation qui représente à la fois les deux droites rectangulaires qui passent par le point M donné. Cette équation a la forme

$$(y - a)^2 + 2k(x - a)(y - a) - (x - a)^2 = 0.$$

Les coefficients angulaires des deux droites sont les deux racines de l'équation

$$m^2 + 2km - 1 = 0$$

et leur somme $-2k$ doit être égale à $m - \dfrac{1}{m}$ ou $\dfrac{m^2 - 1}{m}$, c'est-à-dire à -2μ d'après l'énoncé ;

l'équation qui représente les deux droites est donc

$$(1) \qquad (y-a)^2 + 2\mu(x-a)(y-a) - (x-a)^2 = 0.$$

Il en résulte que les abscisses des points A et A' sont les deux racines de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2a(1-\mu)x - 2\mu a^2 = 0.$$

Cela posé, toute parabole dont l'axe est parallèle à Oy peut être représentée par l'équation

$$(x-\alpha)^2 + \lambda(y-\beta) = 0;$$

elle coupe l'axe Ox en deux points dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \lambda\beta = 0.$$

En écrivant que les racines de cette équation sont précisément celles de l'équation (2) et que, de plus, la parabole passe au point donné M, nous obtenons le système de trois équations

$$\alpha = a(1-\mu), \qquad \alpha^2 - \lambda\beta = -2a^2\mu, \qquad (a-\alpha)^2 = \lambda(a-\beta),$$

pour déterminer les trois inconnues α, β et λ. On obtient sans difficulté

$$\alpha = a(1-\mu), \qquad \beta = a(1+\mu^2), \qquad \lambda = a.$$

Le paramètre de la parabole est donc bien égal à la moitié de a, comme on pouvait le prévoir et l'équation de la courbe est

$$[x - a(1-\mu)]^2 + a[y - a(1+\mu^2)] = 0.$$

On trouve par un calcul analogue pour l'équation de la seconde parabole

$$[y - a(1+\mu)]^2 + a[x - a(1+\mu^2)] = 0.$$

B) *Lieu des points de rencontre des axes.* — Les axes ont pour équations

$$x = a(1-\mu), \qquad y = a(1+\mu).$$

L'élimination de μ conduit à l'équation du lieu qui est

$$x + y - 2a = 0.$$

C'est la parallèle menée par le point M donné à la seconde bissectrice. La droite répond tout entière à la question parce que le paramètre variable μ peut prendre toutes les valeurs qu'on voudra et entre au 1er degré seulement dans les équations précédentes.

Lieu des points de rencontre des tangentes aux sommets. — Les tangentes aux sommets des deux paraboles sont représentées par les équations

$$x = a(1+\mu^2), \qquad y = a(1+\mu^2).$$

L'élimination de μ^2 entre ces équations conduit à $x = y$, première bissectrice. Il faut toutefois remarquer que la valeur du paramètre variable μ qui correspond à un point de cette droite n'est réelle que si les coordonnées du point surpassent a. Le lieu demandé est donc la partie de la première bissectrice située au-delà du point M du côté des coordonnées positives. On l'obtient deux fois parce qu'il y a deux valeurs de μ de somme nulle correspondant à chaque point de cette portion de droite.

Lieu des sommets de ces deux paraboles. — Pour la première, il suffit d'éliminer μ entre les équations

$$x = a(1-\mu), \qquad y = a(1+\mu^2),$$

ce qui donne

$$(x-a)^2 - a(y-a) = 0.$$

Pour la seconde, un calcul analogue conduit à l'équation

$$(y-a)^2 - a(x-a) = 0.$$

Ces équations représentent deux paraboles égales aux proposées et ayant pour sommet commun le

point M donné. La première a son axe parallèle à Oy et la concavité tournée du côté des y positifs ; la seconde a son axe parallèle à Ox et la concavité tournée du côté des x positifs.

Démonstration géométrique. — Le triangle rectangle MAA′ est égal au triangle MBB′ et le second vient s'appliquer sur le premier si on le fait tourner d'un angle droit autour du point M dans le sens direct. Comme on ne peut circonscrire qu'une seule parabole ayant AA′ pour corde principale, au triangle MAA′, la seconde parabole donnée vient après cette rotation s'appliquer sur la première, de sorte que leurs axes coïncident. Il en résulte qu'avant la rotation les axes EH et DC sont à la même distance du point M ; ce point est donc sur la bissectrice de leur angle DCH, et comme cette droite est parallèle à la seconde bissectrice des axes de coordonnées, elle est fixe et constitue le premier lieu demandé.

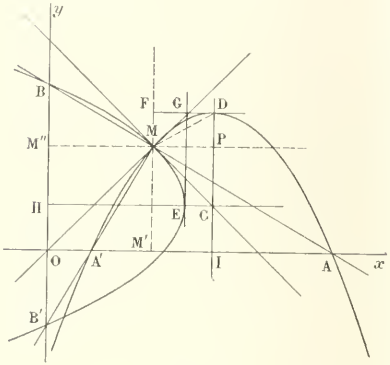


Fig. 2.

Tous les points de cette droite conviennent, car il suffit de mener par le point C, qu'on choisit arbitrairement sur la droite, la parallèle CI à Oy, puis de prendre $IA = IA' = IM$, pour avoir les deux droites rectangulaires MA et MA′ qui correspondent au point choisi.

On voit de la même manière que la tangente au sommet E de la seconde parabole vient, après la rotation, s'appliquer sur la tangente au sommet D de la première. Ces droites sont donc à la même distance du point M et il en résulte que le lieu de leur point de rencontre est la partie de la première bissectrice située au-delà du point M. Le lieu des sommets, que nous allons chercher, montre qu'à chaque point G de cette portion de droite correspondent deux paraboles de chaque espèce dont les tangentes au sommet se coupent deux à deux en G.

Enfin, pour trouver le lieu du sommet D de la première parabole on remarque que M étant un point de cette courbe, on a $\overline{MP}^2 = PD.PI$, et il suffit de remplacer ces trois longueurs par trois autres évidemment égales pour obtenir $\overline{FD}^2 = FM.FM'$, ce qui montre que le point D décrit une parabole égale aux précédentes, ayant pour sommet le point M et pour axe M′M. Il suffit qu'un point soit sur cette parabole pour qu'on puisse le regarder comme le sommet d'une des paraboles données ; son axe sera la parallèle à Oy menée par le point choisi, et la construction déjà indiquée donnera les deux droites rectangulaires qui correspondent à cette parabole.

Le lieu du sommet de la seconde parabole s'obtient de la même manière.

Remarque. — Le cercle des neuf points du triangle ABB′ est décrit sur IH comme diamètre ; il passe donc au point C où se coupent les axes des deux paraboles données, et de plus OC est un second diamètre ; on peut en conclure que l'angle OMC est droit et que le lieu du point C est la perpendiculaire à OM menée par le point M.

c) Pour trouver le lieu du point de rencontre des deux paraboles données, nous éliminons μ entre les deux équations

$$[x - a(1 - \mu)]^2 + a[y - a(1 + \mu^2)] = 0,$$
$$[y - a(1 + \mu)]^2 + a[x - a(1 + \mu^2)] = 0.$$

ou bien, après simplification,

$$x^2 - 2ax + ay + 2a(x - a)\mu = 0,$$
$$y^2 - 2ay + ax - 2a(y - a)\mu = 0.$$

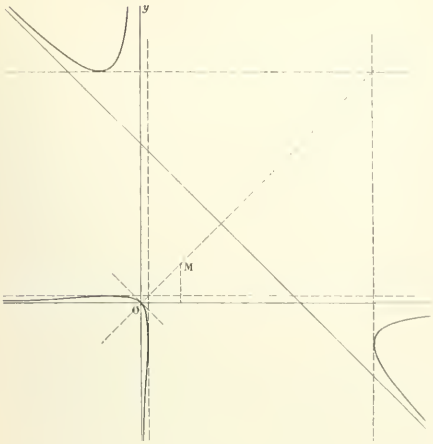


Fig. 3.

L'équation du lieu est donc

$$(x-a)(y^2-2ay+ax)+(y-a)(x^2-2ax+ay)=0,$$

c'est-à-dire

$$xy(x+y-4a)+a^2(x+y)=0.$$

La courbe représentée par cette équation passe par l'origine et la tangente en ce point est la seconde bissectrice. Elle a pour asymptotes les axes de coordonnées et la droite $x+y-4a=0$; cette dernière est une tangente d'inflexion, ainsi qu'on peut le prévoir en remarquant la symétrie de l'équation par rapport à x et y. Pour construire la courbe, on peut résoudre l'équation précédente par rapport à y.

On peut aussi commencer par faire tourner les axes de coordonnées de 45°, ce qui conduit à l'équation

$$y=\pm(x-a\sqrt{2})\sqrt{\frac{x}{x-2a\sqrt{2}}}.$$

Le point M est un point isolé de la courbe.

E. D.

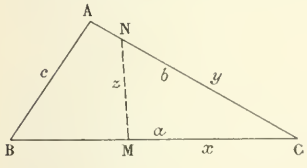
ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (COURS PRÉPARATOIRES, CONCOURS DE 1897).

Algèbre.

710. — *Etant donné un triangle* ABC, *le couper par une transversale intérieure* MN, *de manière à former un triangle et un quadrilatère tels que* CMN *et* ABMN, *ayant à la fois même surface et même périmètre.*

Désignons CM par x, CN par y et MN par z. En écrivant que le périmètre du triangle CMN est égal au périmètre du trapèze ABMN, nous avons l'équation

$$x+y+z=a+b-x-y+c+z.$$



Nous déduisons de là $x+y=\frac{a+b+c}{2}=p$. En écrivant que l'aire du triangle CMN est la moitié de celle du triangle CAB, nous avons $xy=\frac{ab}{2}$. Par conséquent x et y sont racines de l'équation

$$X^2-pX+\frac{ab}{2}=0, \tag{1}$$

dans laquelle rien ne distingue x de y, ni a de b.

Ce dernier point est évident *a priori*, car il est évident que si on a une solution on peut aussi bien porter la longueur x sur le côté CA que sur le côté CB, et la longueur y sur le côté CB que sur le côté CA : il suffit simplement que les points M et N restent ainsi compris entre C et B, d'une part et C et A, d'autre part. Pour la discussion du problème, il suffit donc de voir si x et y sont réels et

positifs et s'ils sont tous deux moindres que a et que b, ou plus simplement si l'un d'eux est moindre que le plus petit des deux côtés a et b et s'ils sont tous deux moindres que le plus grand.

La condition de réalité est $(a+b+c)^2 - 8ab \geqslant 0$; si elle est remplie, les racines sont positives et il suffit d'étudier le dernier point. Or, puisque a et b jouent le même rôle, nous pouvons sans inconvénient supposer $b > a$; alors la limite inférieure de c est $b-a$, et la condition précédente est sûrement remplie si l'on a $b \geqslant 2a$. Nous aurons donc deux cas à examiner.

Premier cas : $b \geqslant 2a$. — Alors les racines de l'équation (1) sont réelles et positives et l'on a $c \geqslant a$. Pour voir comment sont placés les nombres a et b par rapport à ces racines, substituons a et b dans le premier membre de l'équation; nous aurons à voir les signes de $a-c$ et $b-c$. La première expression est toujours négative; donc l'une des racines de l'équation (1) est moindre que a et l'autre plus grande, et l'on pourra porter sur a la longueur mesurée par la plus petite racine. Il faudra alors que l'autre racine soit moindre que b, c'est-à-dire, en somme, que les deux racines soient moindres que b. Ceci arrivera si $b-c > 0$. Donc si c est compris entre a et b, il y a une solution; sinon, il n'y en a pas.

Deuxième cas : $a \leqslant b < 2a$. — Alors la condition de réalité n'est pas nécessairement remplie: elle donne $c \geqslant 2\sqrt{2ab} - a - b$, et c'est là une véritable condition, car c est astreint simplement à être plus grand que $b-a$, et ce nombre est plus petit que $2\sqrt{2ab} - a - b$. Soit c_0 cette limite inférieure de c; nous voyons que c peut varier alors de c_0 à $a+b$.

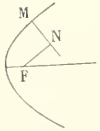
Il faut maintenant placer les racines de l'équation (1) par rapport à a et b, et, pour cela, étudier les signes de $a-c$ et de $b-c$. Or il est facile de voir que c_0 est plus petit que a; si donc c varie de c_0 à a, les deux nombres a et b sont plus grands que les deux racines de l'équation (1) et il y a deux solutions : on peut porter indifféremment la longueur prise pour valeur de x sur CB ou sur CA. Si, en second lieu, c est compris entre a et b, le nombre a est supérieur à une seule racine de l'équation (1) et b est plus grand que les deux : il y a une seule solution. Si, enfin, c est plus grand que b, les deux nombres a et b sont compris entre les racines de l'équation (1) et il n'y a pas de solution.

Mais, en se reportant à la mise en équation du problème, on peut remarquer qu'il suffit que x et y soient réels pour qu'il y ait une solution; seulement l'interprétation ne sera pas toujours la même : quand CN, par exemple, sera plus grand que CA, il faudra regarder la portion de périmètre du quadrilatère représentée par AN comme étant négative; il faudra aussi regarder comme étant négative la portion d'aire du quadrilatère extérieure au triangle ABC. Avec cette extension, le problème est toujours possible et a deux solutions, dès que les racines de l'équation (1) sont réelles.

Géométrie analytique.

711. — *Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer* F *d'une parabole sur les normales* MN *à cette courbe.*

Prenons pour axe des x l'axe de la parabole, pour origine le foyer et pour axe des y la perpendiculaire à l'axe menée par le foyer. L'équation de la normale en fonction de son coefficient angulaire est



$$(1) \qquad y = mx - \frac{pm}{2}(1+m^2) = 0.$$

La perpendiculaire menée par l'origine F sur cette normale a pour équation

$$(2) \qquad y = -\frac{1}{m}x.$$

En éliminant m entre ces deux équations, on aura l'équation du lieu. En retranchant l'équation (2) de l'équation (1), on obtient

$$(1') \qquad \left(m + \frac{1}{m}\right)x - \frac{pm}{2}(1 + m^2) = 0$$

qui se décompose en $\qquad 1 + m^2 = 0 \qquad$ et $\qquad x = \frac{pm^2}{2}$.

La solution $1 + m^2 = 0$ correspond aux droites isotropes menées par le foyer et donne comme lieu $x^2 + y^2 = 0$, c'est-à-dire un cercle de rayon nul réduit à ce point. En éliminant m entre l'équation (2) et l'équation $x = \frac{pm^2}{2}$, on aura l'équation du lieu

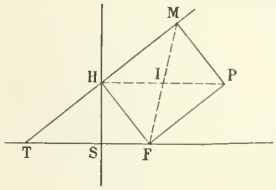
$$y^2 = \frac{p}{2}x.$$

C'est une parabole qui a pour sommet le point F dont l'axe est suivant l'axe de la parabole donnée et dont le paramètre est égal à $\frac{p}{4}$.

PAUL BRESSON, pensionnat de Valbenoite.

Autres solutions analytiques : F. PÉGORIER, à Cette ; GRESSER, élève de 3e marine, à Brest.

Solution géométrique. — Soient S le sommet de la parabole, F le foyer, MT une tangente quelconque, H le point de rencontre avec la tangente au sommet ; c'est le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer et en même temps le milieu de la tangente TM. Soit MP la normale à la parabole au point M, FP la perpendiculaire abaissée du foyer.



$$FP = HM = TH.$$

On en déduit que HP est parallèle à l'axe ; on peut dire qu'elle pivote autour d'un point K rejeté à l'infini dans la direction de l'axe. Les deux droites HP et FP engendrent deux faisceaux homographiques et le lieu du point de rencontre P est une conique passant par les points F et K (à l'infini) et qui de plus admet manifestement l'axe de la parabole comme axe de symétrie. La direction de cet axe étant une direction asymptotique, la conique a ses deux directions asymptotiques confondues. C'est une parabole ayant pour sommet le point F.

LUCIEN ORLANDO, à Turin.

Remarque. — Soit I le point de rencontre des diagonales du rectangle MHFP ; on a IF = IH et par conséquent le lieu du point I est une parabole ayant pour foyer le point F et pour directrice la droite SH. Or HP = 2HI, on en déduit que le lieu du point P est aussi une parabole ; quand le point H vient en S, le point I vient au milieu de SF et le point P en F. Cette parabole aura donc pour sommet le point F.

(P. L.)

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Intersection d'un cône de révolution droit avec une sphère dont le centre c est sur une génératrice quelconque du cône, et dont le rayon est déterminé comme suit :

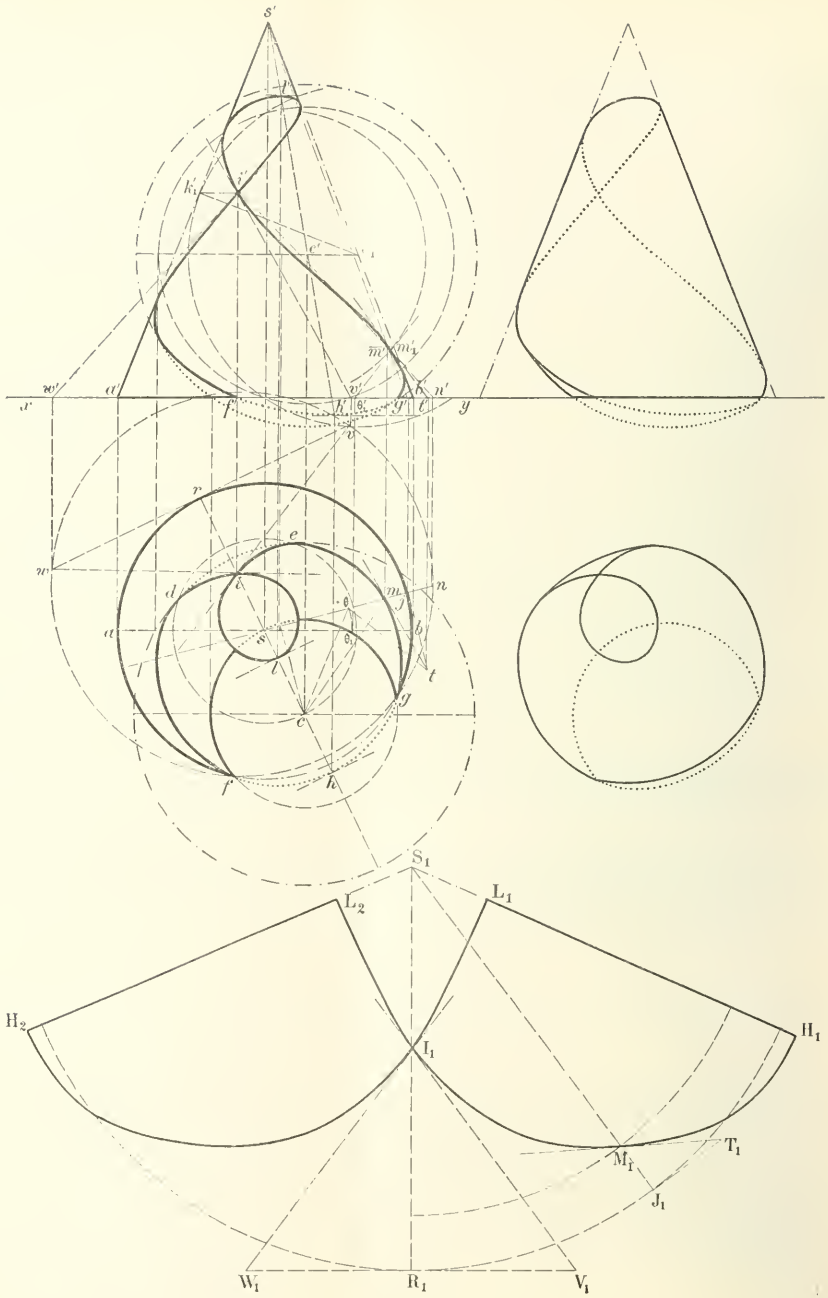
On fait tourner le centre c de la sphère autour de l'axe du cône jusqu'à ce qu'il rejoigne la génératrice G de contour apparent, et le rayon de la sphère est égal à la perpendiculaire c_1k_1 abaissée de la nouvelle position du centre sur l'autre génératrice du contour apparent du cône.

Tangente en un point de l'intersection :

Représentation à part du solide commun :

Développement de sa surface conique.

(*École des Mines de Saint-Etienne, 1897.*)


s'
h
k₁
c'
m'
m'₁
w'
a'
a
v'
n'
x
f
k
θ
y'
t'
y
v
r
e
m
n
d
θ
m
a
s
θ₁
b
l
t
g
c
f
h
S₁
L₂
L₁
H₂
H₁
I₁
T₁
M₁
J₁
W₁
R₁
V₁

Détermination d'un point quelconque et de la tangente en ce point. — Pour obtenir un point de l'intersection du cône et de la sphère, nous pouvons employer des plans horizontaux auxiliaires ou bien des plans verticaux passant par l'axe du cône. Nous avons pris un plan vertical de trace horizontale sm qui coupe le cône suivant deux génératrices situées dans un plan méridien, et la sphère suivant un petit cercle. Amenant, par une rotation autour de la verticale de (s, s'), ce plan vertical à être de front, les deux génératrices viennent coïncider avec les génératrices de front du cône $(sa, s'a')$ et $(sb, s'b')$. Le cercle de la sphère vient alors se projeter verticalement en vraie grandeur et nous avons en m'_1 la projection verticale d'un des quatre points de l'intersection donnés par le plan auxiliaire sm. Une rotation inverse donne le point (m, m') de cette intersection; la tangente $(mt, m't')$ en ce point est l'intersection du plan tangent au cône de trace horizontale mj et du plan tangent à la sphère de trace horizontale $0t$.

Points remarquables. — Remarquons d'abord que le plan vertical de trace horizontale sc est un plan de symétrie dans le cône et dans la sphère, en sorte que sc est un axe de symétrie de la projection horizontale. Les points de l'intersection projetés sur sc s'obtiennent par une rotation de ce plan vertical sc autour de la verticale de S et une rotation inverse donne ces points (i, i'), (h, h') et (l, l'). Aux points (h, h') et (l, l') la tangente est horizontale, car les plans tangents aux deux surfaces sont perpendiculaires au plan méridien sc et ont par suite leurs traces horizontales parallèles. Quant au point (i, i'), il est un point double réel de l'intersection. Pour obtenir les tangentes en ce point, nous avons pris le cône d'erreur qui a pour sommet (i, i') et pour directrice la courbe d'intersection; ce cône a sa trace horizontale circulaire passant par les traces f, g, n de trois de ses génératrices. L'intersection de la base circulaire de ce cône d'erreur et de la trace horizontale er du plan tangent commun en (i, i') aux deux surfaces donne les traces des tangentes au point double réel, qui sont alors $(vi, v'i')$ et $(wi, w'i')$. Comme autres points remarquables, nous avons obtenu les points d et e sur le contour apparent horizontal de la sphère, les points f et g sur la base du cône dans le plan horizontal, et les points sur le contour apparent vertical du cône. Ces derniers sont donnés par le plan de front qui passe par S.

Représentation du solide. — Dans la première figure, nous avons représenté le cône supposé plein et existant seul, en enlevant la partie contenue dans la sphère. Nous avons tracé en trait caché la partie située au-dessous du plan horizontal.

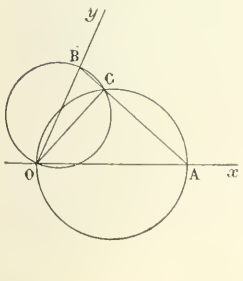
Dans la seconde figure, nous avons représenté le solide commun. Les parties qui restent se trouvent immédiatement, ainsi que la visibilité.

Développement de la surface conique du solide commun.—Ayant calculé l'angle au sommet $H_1S_1H_2$ du secteur circulaire, développement de la surface latérale du cône, nous avons fait ce développement sur le plan tangent au cône au point double réel I de l'intersection, après avoir ouvert la surface suivant la génératrice opposée SH. Nous avons déterminé I_1 qui correspond à (i, i'), ainsi que les tangentes en ce point, puis les points H_1, H_2 et L_1, L_2 qui correspondent à H et à L. Enfin, nous avons fait la construction pour le point M_1 qui correspond au point quelconque (m, m') déterminé de l'intersection des deux surfaces; la tangente M_1T_1 en M_1 à la transformée s'obtient par la méthode ordinaire. N. C.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

696. — *On considère deux droites fixes* Ox *et* Oy, *sur lesquelles on prend respectivement des points* A *et* B *tels que* OA + OB = l, l *étant une longueur donnée. On demande :*

1° *Le lieu du point de rencontre avec* AB *de l'axe radical des deux cercles décrits respectivement sur* OA *et* OB *comme diamètres ;*



2° *Le lieu du second point de rencontre de ces deux cercles. — Cas particulier où l'angle* xOy *est droit.*

Soit C le point de rencontre des deux cercles considérés; les angles OCA et OCB étant droits, les points A, B, C sont en ligne droite. Il en résulte que les deux lieux demandés sont identiques.

Posons $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, nous avons la relation

(1) $\alpha + \beta = l$.

L'équation du cercle de diamètre OA rapportée aux axes Ox et Oy est

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2 + 2\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)y\cos\theta - \frac{\alpha^2}{4} = 0,$$

ou
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - \alpha(x + y\cos\theta) = 0;$$
l'équation du cercle de diamètre OB est
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - \beta(x\cos\theta + y) = 0.$$

Le lieu géométrique du point C s'obtiendra en éliminant α et β entre les équations des deux cercles et la relation (1).

Le résultat de cette élimination est
$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}{x + y\cos\theta} + \frac{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}{x\cos\theta + y} = l,$$
ou
$$(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta)(x + y)(1 + \cos\theta) - l(x + y\cos\theta)(x\cos\theta + y) = 0.$$

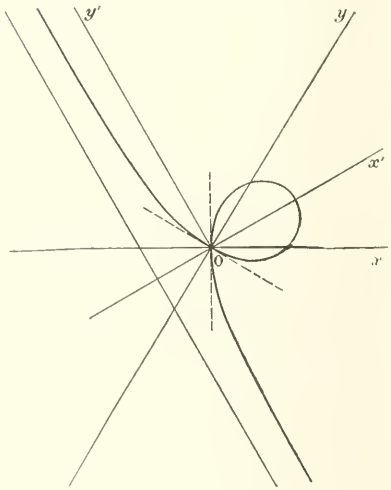
Cette équation représente une cubique circulaire ayant un point double à l'origine et symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle xOy.

Les tangentes à l'origine sont perpendiculaires aux axes de coordonnées.

Pour construire cette courbe, posons $y = tx$; nous avons
$$x = \frac{l(t\cos\theta + 1)(t + \cos\theta)}{(t^2 + 2t\cos\theta + 1)(t + 1)(1 + \cos\theta)}, \qquad y = \frac{l(t\cos\theta + 1)(t + \cos\theta)t}{(t^2 + 2t\cos\theta + 1)(t + 1)(1 + \cos\theta)}.$$

Supposons θ aigu et faisons varier t de $-\infty$ à $+\infty$, les signes et les valeurs remarquables de x et de y sont indiqués dans le tableau suivant :

t	$-\infty$		$-\frac{1}{\cos\theta}$		-1		$-\cos\theta$		0		$+\infty$
x	0	$-$	0	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{l\cos\theta}{1+\cos\theta}$	$+$	0
y	$\frac{l\cos\theta}{1+\cos\theta}$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\frac{l\cos\theta}{1+\cos\theta}$



On en déduit aisément la forme de la courbe.

L'équation de l'asymptote est
$$y + x + \frac{l(1 - \cos\theta)}{2(1 + \cos\theta)} = 0;$$
c'est une asymptote d'inflexion puisqu'elle est perpendiculaire à l'axe de symétrie de la courbe.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'équation de la courbe s'écrit
$$(x^2 + y^2)(x + y) - lxy = 0;$$
elle représente une strophoïde droite.

Remarque. — On aurait pu pour construire la courbe prendre pour nouveaux axes de coordonnées les bissectrices Ox' et Oy' des axes Ox et Oy. Les formules de transformation sont
$$x = \frac{x'\sin\frac{\theta}{2} - y'\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta},$$
$$y = \frac{x'\sin\frac{\theta}{2} + y'\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta},$$

et l'équation transformée de la courbe est

$$2(x'^2+y'^2)x'\cos\frac{\theta}{2}-l\left(x'^2\cos^2\frac{\theta}{2}-y'^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=0.$$

On peut alors discuter en résolvant l'équation par rapport à y'^2.

F. PÉGORIER, à Cette.

Bonnes solutions par MM. Bunel, lycée de Rennes et Rouzier.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1897) (*)

Géométrie analytique (M. Gouilly.)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

662. — Interpréter l'équation $x^2+y^2=(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2$.

663. — Angle des deux droites $2x^2-8xy-y^2$. Construire ces deux droites. Équation du système des deux bissectrices.

664. — Interpréter l'équation $x^2+y^2-R^2=\pm(ax+by+c)^2$.

665. — Construire les courbes

$$y=x+\frac{1}{x},\qquad y=x+\frac{1}{x-1},\qquad y=2x+1+\frac{3}{x-2},\qquad y=x^2+\frac{1}{x-1},\qquad y=x^2+\frac{1}{(x-1)^2},$$

$$y=x\pm\sqrt{x},\qquad y=x\pm\sqrt{x+1},\qquad y=x\pm\sqrt{x^2-1},\qquad y=2x\pm\sqrt{x^2-1},$$

$$y=2x\pm\sqrt{(x-1)(x-2)},\qquad y=x\pm\sqrt{(x+2)(x+4)+1},\qquad y=x^2\pm\sqrt{x^2+1},$$

$$y=\pm\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},\qquad y=\pm x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\qquad y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x}},\qquad y=x^2\pm\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}.$$

666. — Construire les courbes

$$xy^2-y^2-x^2=0;\qquad xy^2+x^3+y^2-x^2=0;\qquad y^2-2x^2y+1=0.$$

667. — Variation de l'angle de deux diamètres conjugués de l'hyperbole $xy=k^2$.

668. — Lieu des milieux des cordes d'une ellipse qui sont vues du centre sous un angle droit.

669. — Condition pour que $x^2+y^2=(mx+ny+h)^2$ représente une parabole.

670. — Équation générale des coniques admettant pour foyer l'origine et pour asymptote une droite donnée.

671. — Équation d'une parabole de paramètre donné et tangente à deux axes rectangulaires. Lieu du foyer.

672. — Équation générale des paraboles circonscrites à un triangle rectangle.

673. — On donne les droites $P+\lambda Q=0$, $P+\mu Q=0$, λ et μ étant liés par une relation homographique. Lieu du point de rencontre.

674. — Soit $f(x)=0$ l'équation aux abscisses des points de rencontre de deux coniques. Qu'arrive-t-il quand les deux coniques ont une direction asymptotique commune? Vérifier que l'équation s'abaisse au 3e degré.

675. — Les sécantes communes à un cercle et à une conique sont également inclinées sur les axes de la conique.

676. — Construire les courbes

$$\rho=\frac{1}{\omega^2},\qquad \rho=\frac{\omega}{1-\omega},\qquad \rho=\sin 2\omega,\qquad \rho^2=\sin\omega.$$

677. — Quelle est la courbe dans laquelle la tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur ?

(*) La question d'Algèbre n° 651, page 534, n° de juin, doit être lue ainsi : « Les coefficients de $x^4+px^2+qx+r=0$ sont des nombres entiers. Démontrer que si aucun des nombres.... »

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

678. — Mener un plan par les deux droites $\begin{cases} y - mx = 0, \\ z - nx = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y - m'x = 0 \\ z - n'x = 0. \end{cases}$

679. — Distance de l'origine à la droite $y = mx + n, \quad z = px + q.$

680. — On donne 3 axes rectangulaires. Trouver une sphère tangente aux 3 plans de coordonnées et à un autre plan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$

681. — Condition d'orthogonalité de deux sphères.

682. — Tangente à la courbe $z = \sin y, \quad x = ay + b.$

683. — Equation d'un cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la courbe

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad z = h$$

684. — Equation d'un cylindre circonscrit à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ et dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée (p, q, r).

685. — Cône circonscrit à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et ayant pour sommet le point $x = a, \quad y = 0, \quad z = 0.$

686. — Surface engendrée par la droite $y = mx, \quad z = h$ en tournant autour de Oy.

687. — Que représente l'équation $\sqrt{x^2 + y^2} + z - a = 0$? La surface représentée par l'équation

$$\sqrt{x^2 + y^2} + ax + bz + c = 0$$

est-elle une surface de révolution ?

688. — Surface engendrée par la parabole $x^2 - 2pz = 0$ en tournant autour de Ox.

689. — Surface engendrée par le cercle $(x - a)^2 + z^2 = R^2$ en tournant autour de Oz.

690. — Surface engendrée par une droite parallèle au plan des yz s'appuyant sur Ox et sur la droite $y = b, \quad z = mx$. Nature de la surface. Plans directeurs.

691. — Montrer que dans le cas d'un centre unique à distance finie, l'équation en S n'a pas de racine nulle.

692. — Equation générale des quadriques qui admettent des sections circulaires parallèles au plan des xy.

693. — Exprimer qu'une quadrique est tangente à un plan ; combien de conditions si on donne le point de contact ? — Intersection d'une quadrique avec son plan tangent.

694. — Condition pour que $ax^2 + by^2 + cz = 0$ admette des génératrices rectilignes.

695. — Lieu de l'intersection des deux plans

$$x + y + \lambda = 0, \qquad \lambda z + y = 0.$$

Discuter. Mettre en évidence le second système de génératrices rectilignes.

QUESTIONS PROPOSÉES

760. — Trouver la dérivée d'ordre n de la fonction

$$y = \sin ax . \cos bx.$$

Appliquer au cas où $a = 1, \quad b = 1,$ et vérifier le résultat obtenu.

P. Lamaire.

761. — Résoudre et discuter l'équation

$$m^2x^6 + m(m^2 + 1)x^4 - 2m^2x^3 - 2m(m^2 + 1)x^2 + m(m^2 + m + 1)x + m^4 + m^3 + 2m^2 + m + 1 = 0.$$

G. Pouilliart.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

8e Année. N° 11. Août 1898.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES FORMULES DE PLÜCKER

par M. G. **Fontené**, professeur au collège Rollin.

§ I.

1. Un point double d'une courbe algébrique d'ordre m est un point tel que, parmi les m points d'intersection de la courbe avec une sécante arbitraire menée par ce point, deux sont confondus avec le point considéré ; si les deux tangentes au point double sont distinctes, on a un *point nodal ;* si les deux tangentes sont confondues, on a un point cuspidal ou *point de rebroussement.*

Corrélativement, une tangente double d'une courbe algébrique de classe n est une tangente telle que, parmi les n tangentes menées à la courbe d'un point arbitraire de cette tangente, deux sont confondues avec la tangente considérée ; si les deux points de contact de la tangente double sont distincts on a une *bitangente*, si les deux points de contact sont confondus on a une *tangente d'inflexion.* On a ce tableau

$$\text{Points doubles}\begin{cases}\text{Points nodaux,}\\ \text{Points de rebroussement ;}\end{cases}\qquad \text{Tangentes doubles}\begin{cases}\text{Bitangentes,}\\ \text{Tangentes d'inflexion.}\end{cases}$$

Pour une courbe dépendant d'un paramètre, de même qu'un point nodal peut se transformer en un point de rebroussement, une bitangente peut se transformer en une tangente d'inflexion.

2. Au premier abord, une courbe de 3e ordre est de 6e classe, et, étant de 6e classe, elle devrait être de 30e ordre ; c'est ce paradoxe que Plücker a expliqué, en cherchant les causes d'abaissement de la classe quand l'ordre est donné, les causes d'abaissement de l'ordre quand la classe est donnée, et en montrant qu'une courbe algébrique n'est jamais générale à la fois de son ordre et de sa classe, sauf les coniques. Il s'est pour cela posé deux problèmes. On connaît l'ordre m d'une courbe algébrique, le nombre δ de ses points nodaux, le nombre k de ses points de rebroussement : on demande sa classe n, le nombre τ de ses bitangentes, le nombre ι de ses tangentes d'inflexion ; il est naturel de chercher à résoudre la question avec des coordonnées ponctuelles seulement, et nous verrons dans un instant jusqu'à quel point on y réussit. Le problème corrélatif, qui est en même temps le problème inverse puisque l'on donne n, τ, ι pour obtenir m, δ, k, se traite par les coordonnées tangentielles ou se ramène au précédent par le moyen des notions générales relatives à la corrélation des figures, et l'on obtient trois formules équivalentes aux premières ; on le vérifiera. Ces formules sont, sous une forme aussi intuitive que possible,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &n+2\delta+3k=m(m-1),\\ &\iota+6\delta+8k=3m(m-2),\\ &\tau+2\delta(n-4)+3k(n-3)+2^2\frac{\delta(\delta-1)}{2}+2.3\delta k\\ &\qquad+3^2\frac{k(k-1)}{2}=\frac{m(m-2)(m^2-9)}{2}; \end{aligned}\right. \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} &m+2\tau+3\iota=n(n-1),\\ &k+6\tau+8\iota=3n(n-2),\\ &\delta+2\tau(m-4)+3\iota(m-3)+2^2\frac{\tau(\tau-1)}{2}+2.3\tau\iota\\ &\qquad+3^2\frac{\iota(\iota-1)}{2}=\frac{n(n-2)(n^2-9)}{2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir la première des formules de gauche, on considère la *première polaire* d'un point : c'est une courbe d'ordre $m-1$, et, sans la présence des points doubles, la classe de la courbe donnée serait $m(m-1)$; mais la première polaire d'un point quelconque passe par les points nodaux, ce qui supprime deux tangentes pour chaque point nodal, et, dans le cas d'un point de rebroussement, la première polaire d'un point quelconque passe par le point de rebroussement et touche en ce point la tangente de rebroussement, ce qui supprime trois tangentes.

Pour avoir la seconde des formules de gauche, on démontre d'abord que les points d'inflexion de la courbe donnée sont sur une courbe d'ordre $3(m-2)$ appelée *Hessienne* de la première courbe, ce qui donnerait $3m(m-2)$ points d'inflexion ; mais un point nodal de la courbe donnée est un point double de la Hessienne, et les deux courbes ont en ce point les mêmes tangentes, ce qui supprime six points d'inflexion ; un point de rebroussement de la courbe donnée est un point triple pour la Hessienne, et deux des tangentes en ce point coïncident avec la tangente de rebroussement, ce qui supprime $3+3+2$ ou 8 points d'inflexion.

La dernière formule de gauche, non démontrée directement par Plücker, résulte de la considération de la *courbe bitangentielle*, courbe passant par les points de contact des tangentes doubles. Jacobi a démontré le premier que cette courbe est d'ordre $(m-2)(m^2-9)$, et Hesse a donné en même temps l'équation de la bitangentielle d'une quartique ; on trouvera au paragraphe IV la démonstration de M. Cayley, telle à peu près qu'elle est exposée dans le *Traité de Géométrie analytique* de Salmon : j'ai seulement remplacé par une considération géométrique des faits analytiques d'un ordre trop élevé pour trouver place ici, et écarté des généralités qui ne sont pas indispensables. Le degré de la courbe bitangentielle étant supposé connu, comme chaque bitangente a deux points de contact, le nombre des bitangentes est $\frac{m(m-2)(m^2-9)}{2}$, si la courbe n'a pas de points doubles. Dans le cas où elle en a, la démonstration de la formule exigerait que l'on sût former effectivement l'équation de la courbe bitangentielle, ce qui n'a été fait que pour une quartique ; la solution directe du problème posé est donc encore incomplète, et cela nous amène à abandonner la méthode naturelle indiquée au début du n° 2, pour suivre la méthode simple adoptée par Plücker, et qui consiste à employer les deux premières formules de gauche et leurs corrélatives, sans oublier que ces quatre formules doivent se réduire à trois formules distinctes, comme on le vérifiera plus loin ; ce sont d'ailleurs ces quatre formules que l'on appelle ordinairement *formules de Plücker*.

Voici ces formules :

$$(2)\qquad \begin{cases} n+2\delta+3k=m(m-1), \\ \iota+6\delta+8k=3m(m-2), \end{cases} \qquad \begin{cases} m+2\tau+3\iota=n(n-1), \\ k+6\tau+8\iota=3n(n-2). \end{cases}$$

Nous ferons seulement deux remarques relatives à la formule dont la démonstration directe reste inachevée. Elle se déduit des formules établies de la façon suivante : on écrit

$$\begin{aligned} 2\tau+3\iota-n(n-1) &= -m, \\ \iota+6\delta+8k &= 3m(m-2), \\ (n+2\delta+3k)^2 &= m^2(m-1)^2, \\ n+2\delta+3k &= m(m-1), \end{aligned}$$

et l'on ajoute ces formules multipliées respectivement par $1, -3, +1, -1$, de manière à faire disparaître les termes 3ι, $-n^2$, $+n$ qui entrent dans la première ; on obtient

$$\begin{aligned} 2\tau-(20\delta+27k)+2n(2\delta+3k)+(2\delta+3k)^2 &= m[-1-9(m-2)+m(m^2-2m+1)-m+1] \\ &= m[-9(m-2)+m^2(m-2)] \\ &= m(m-2)(m^2-9), \end{aligned}$$

qui est le développement de la formule en question. D'autre part, sous la forme qu'on lui a donnée dans le tableau (1), on aperçoit comment cette formule pourra un jour être démontrée directement : de chaque point nodal partent des tangentes en nombre $n-4$, de chaque point de rebroussement partent des tangentes en nombre $n-3$, et ces droites se présenteront comme des bitangentes parasites, les premières deux fois, les dernières trois fois ; d'autre part, les droites qui joignent deux points nodaux, ou un point nodal et un point de rebroussement, ou deux points de rebroussement, se présenteront comme des bitangentes parasites, et l'ordre de multiplicité de ces solutions sera 2^2 pour les premières, 2×3 pour les secondes, 3^2 pour les dernières.

§ II.

3. Notre but est maintenant d'arriver à la notion du *genre* d'une courbe algébrique, et d'introduire le genre dans les formules de Plücker. Afin de mieux rendre compte des transformations de formules que nous aurons à

effectuer, nous dirons ici, sans en pouvoir donner la démonstration, que les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique, ou les coordonnées d'une tangente à la courbe, peuvent être exprimées en fonction d'un paramètre t au moyen de fonctions dont la nature dépend précisément du genre de la courbe ; et l'emploi de ce paramètre t amène une différence essentielle entre les points nodaux et les points de rebroussement, entre les bitangentes et les tangentes d'inflexion. En Géométrie pure, une courbe est regardée d'abord comme lieu de ses points, et l'on définit la tangente en un point de façon qu'une droite quelconque passant par un point double n'ait pas le caractère d'une tangente ; la courbe étant ensuite regardée comme l'enveloppe de ses tangentes, le point de contact est déterminé de telle façon qu'un point quelconque d'une tangente double n'a pas le caractère d'un point de la courbe. En Géométrie analytique, avec des coordonnées ponctuelles x, y, z, une droite se présente comme tangente dès qu'elle rencontre la courbe en des points dont deux sont confondus, de sorte qu'une droite quelconque passant par un point double, point nodal ou point cuspidal indifféremment, se présente comme une tangente parasite ; avec des coordonnées tangentielles u, v, w, un point se présente comme point de la courbe dès que, parmi les tangentes menées de ce point à la courbe, deux sont confondues, et alors un point quelconque d'une tangente double, bitangente ou tangente d'inflexion indifféremment, se présente comme un point parasite de la courbe ; les formules de Plücker, telles qu'on les a écrites, se rattachent à ce point de vue. Supposons maintenant que les coordonnées d'un point d'une courbe soient exprimées en fonction d'un paramètre t : on écrira qu'une droite est tangente en écrivant que, parmi les t des points d'intersection de la droite et de la courbe, deux sont égaux ; comme un point nodal correspond à deux valeurs différentes du paramètre selon la branche par laquelle on y arrive, une droite passant par un point nodal ne se présente pas alors comme une tangente parasite ; mais cela arrive pour un point de rebroussement, lequel correspond à une seule valeur du paramètre ; il en résulte que, si l'on cherchait la classe d'une courbe donnée par ses points au moyen d'un paramètre t, au lieu d'une formule telle que la première des formules 2), on aurait une formule donnant $n+k$. Corrélativement, les coordonnées d'une tangente à une courbe étant exprimées en fonction d'un paramètre t, on écrit qu'un point est sur la courbe en écrivant que, parmi les t des tangentes issues du point, deux sont égaux ; un point d'une bitangente ne se présente pas alors comme un point parasite, mais cela arrive pour une tangente d'inflexion, et l'on voit s'introduire ainsi le nombre $m+t$. C'est à ce nouveau point de vue, celui du paramètre t, que se rapporte principalement la forme que l'on va donner aux formules de Plücker.

4. Revenons aux formules (2). Pour montrer qu'elles se réduisent à trois formules distinctes, on observe que l'élimination de δ entre les deux formules de gauche, ou celle de τ entre les deux formules de droite, donne la relation

$$k - t = 3(m - n),$$

ou

$$3n + k = 3m + t.$$

[Nous remarquerons ici que l'équivalence des trois formules de gauche du tableau (1) et des trois formules de droite est maintenant démontrée, puisque la dernière formule de chaque groupe résulte comme on l'a vu des formules (2)].

En adjoignant la relation ci-dessus, *corrélative d'elle-même*, à la première formule de gauche du tableau (2) et à la formule corrélative, on a un système de trois relations équivalent à l'un quelconque des précédents. Il est alors assez naturel d'introduire dans ces formules le nombre $\delta + k$ des points doubles, le nombre $\tau + t$ des tangentes doubles, et les deux nombres $n+k$ et $m+t$ qui se sont présentés au n° 3 ; on a ainsi

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} n + k &= m(m-1) - 2(\delta + k) \mid m + t = n(n-1) - 2(\tau + t),\\ (n + k) - 2m &= (m + t) - 2n. \end{aligned}\right.$$

5. Si l'on retranche $2m$ aux deux membres de la première formule, et $2n$ aux deux membres de la seconde, pour faire apparaître les quantités qui figurent dans la troisième, on est conduit à définir un nombre p, *corrélatif de lui-même*, par les formules

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} 2(p-1) &= (n+k) - 2m,\\ &= (m+t) - 2n,\\ &= m(m-3) - 2(\delta + k),\\ &= n(n-3) - 2(\tau + t). \end{aligned}\right.$$

6. Les deux dernières formules peuvent s'écrire, en divisant par 2 et en ajoutant 1 aux deux membres,

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - (\delta + k),$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (\tau + t).$$

Or, le nombre maximum de points doubles d'une courbe d'ordre m est $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$; car, si elle en avait un de plus, par ces $\frac{(m-1)(m-2)}{2}+1$ points et $(m-3)$ autres points de la courbe, ce qui forme $\frac{(m-1)(m-2)}{2}+(m-2)$ ou $\frac{(m-2)(m+1)}{2}$ points, on pourrait faire passer une courbe d'ordre $(m-2)$, qui devrait être considérée comme coupant la courbe donnée en $[(m-1)(m-2)+2]+(m-3)$ ou $m(m-2)+1$ points, et cela est impossible si la courbe donnée est indécomposable, comme on le suppose. De même, le nombre maximum de tangentes doubles d'une courbe de classe n est $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Le nombre entier p est donc positif ou nul. On appelle *genre* d'une courbe d'ordre m et de classe n, le nombre entier p, défini par les deux membres de l'égalité ci-dessus, qui exprime la différence entre le nombre de points doubles de la courbe et le nombre maximum de points doubles que permettrait son ordre, et aussi la différence entre le nombre des tangentes doubles de la courbe et le nombre maximum de tangentes doubles que permettrait sa classe; l'expression anglaise *deficiency* rappelle cette définition.

7. L'ordre, la classe et le genre d'une courbe étant donnés, les quatre nombres k, ι, δ, τ sont déterminés par les formules (4). On peut écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} n+k=2(m+p-1),\\ m+\iota=2(n+p-1),\end{cases}$$

et

$$(5')\qquad \begin{cases} \delta+k=\dfrac{m(m-3)}{2}-(p-1)=\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}-p,\\ \tau+\iota=\dfrac{n(n-3)}{2}-(p-1)=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}-p.\end{cases}$$

8. Nous dirons ici quelques mots des courbes unicursales.

Le genre d'une courbe est sa caractéristique fondamentale, en ce sens que ce nombre détermine, comme on l'a déjà dit, la nature des fonctions au moyen desquelles on peut exprimer les coordonnées d'un point ou d'une tangente à l'aide d'un paramètre t. Considérons une courbe de genre 0, c'est-à-dire une courbe ayant autant de points doubles que son ordre en permet, autant de tangentes doubles que sa classe en permet; nous aurons alors $p=0$,

$$\begin{cases} n+k=2(m-1),\\ m+\iota=2(n-1),\end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta+k=\dfrac{(m-1)(m-2)}{2},\\ \tau+\iota=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}.\end{cases}$$

Clebsch a montré le premier que l'on peut alors exprimer les coordonnées d'un point de la courbe, ou d'une tangente, en fonctions rationnelles d'un paramètre t, par des formules de la forme

$$\frac{x}{X(t)}=\frac{y}{Y(t)}=\frac{z}{Z(t)},\qquad \frac{u}{U(t)}=\frac{v}{V(t)}=\frac{w}{W(t)},$$

X, Y, Z et U, V, W étant des polynomes entiers en t, les premiers de degré m, les derniers de degré n. Chasles a donné ensuite ce théorème : *Si une courbe d'ordre m a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, on peut déterminer ses points individuellement au moyen d'un faisceau de courbes d'ordre $m-1$, qui ont $m-2$ points doubles communs avec pareil nombre de points doubles de la courbe, $\frac{(m-2)(m-3)}{2}$ points simples coïncidant avec les autres points doubles de la courbe, et qui passent par un autre point de la courbe;* il est en effet facile de voir que le faisceau est déterminé, et que la courbe variable a avec la courbe donnée un seul point d'intersection variable. On démontre aisément la proposition réciproque de celle de Clebsch. Les courbes de genre 0 sont dites *unicursales*, parce qu'on obtient la partie réelle de la courbe en faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$.

En appelant *élément* d'une courbe l'ensemble d'un point et de la tangente en ce point, à cause des points

nodaux et des bitangentes, le rapport anharmonique de quatre éléments t_1, t_2, t_3, t_4 d'une courbe unicursale est la quantité

$$R = (t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} : \frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_2},$$

qui reste inaltérée par la substitution au paramètre t d'un paramètre t' lié au premier par la relation doublement linéaire $t = \frac{at' + b}{ct' + d}$; cette substitution est d'ailleurs la seule possible, si l'on veut qu'un point de la courbe corresponde à une valeur unique de t.

9. Les formules (5), dont l'accord est une conséquence immédiate de la relation $k - \iota = 3(m - n)$, si facile à établir, donnent lieu aux remarques suivantes. Si l'on cherchait au moyen du paramètre t la classe d'une courbe d'ordre m et de genre p, on devrait arriver à la première de ces formules, d'après ce qu'on a vu au n° 3; le calcul est facile pour une courbe unicursale. En supposant d'une manière générale

$$\frac{x}{X(t)} = \frac{y}{Y(t)} = \frac{z}{Z(t)},$$

une sécante issue d'un point donné (a, b, c) rencontre la courbe en des points dont deux sont confondus, *avec même valeur de* t, si on la dirige de façon que l'un des t d'intersection vérifie la relation

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ X(t) & Y(t) & Z(t) \\ X'(t) & Y'(t) & Z'(t) \end{vmatrix} = 0;$$

dans le cas d'une courbe unicursale d'ordre m, cette équation est du degré $2(m - 1)$, comme on le voit par l'application du théorème des fonctions homogènes, et l'on a bien $n + k = 2(m - 1)$, ce qui est la première des formules (5) pour $p = 0$.

§ III.

Je réunis ici quelques applications des formules de Plücker.

10. Si l'on a $m = n$, les formules (3) montrent que l'on a aussi $k = \iota$, $\delta = \tau$. A cela se rattachent les deux formules

$$(6) \qquad \begin{cases} k - \iota = 3(m - n), \\ 2(\delta - \tau) = (m - n)(m + n - 9), \end{cases}$$

dont la première a d'ailleurs donné la dernière des formules (3); pour obtenir l'autre, on retranche la première formule de droite du groupe (2) de la première formule de gauche, et l'on remplace $k - \iota$ par $3(m - n)$.

11. L'addition des deux formules (5) donne

$$(7) \qquad k + \iota = (m - 2) + (n - 2) + 4p;$$

donc, à l'exception des coniques, *une courbe algébrique a nécessairement des points de rebroussement ou des tangentes d'inflexion.*

12. Une courbe d'ordre m, qui a δ points nodaux et k points de rebroussement, dépend de paramètres en nombre égal à

$$\frac{m(m+3)}{2} - (\delta + 2k), \qquad \text{ou} \qquad \frac{m(m+3)}{2} - (2\delta + 3k) + (\delta + k),$$

ou, d'après la première des formules (2),

$$\frac{m(m+3)}{2} - m^2 + m + n + (\delta + k),$$

ou enfin

$$(m + n) - \left[\frac{m(m-3)}{2} - (\delta + k)\right];$$

en partant d'une courbe de classe n, avec τ bitangentes et ι tangentes d'inflexion, on aurait pour le nombre des

paramètres une expression corrélative, naturellement égale à la première; au moyen des deux dernières formules (4) on voit que le nombre des paramètres dont dépend une courbe d'ordre m, de classe n, et de genre p, est

$$(8) \qquad m + n - p + 1.$$

Voici une vérification pour les courbes unicursales. L'unicursale générale d'ordre m, dont on exprime les coordonnées d'un point en fonction rationnelle de t, dépend de paramètres en nombre

$$3(m+1) - 1 - 3, \qquad \text{ou} \qquad 3m - 1,$$

en tenant compte de la substitution possible $t = \frac{at'+b}{ct'+d}$; comme on a alors $n = 2(m-1)$, le nombre précédent peut s'écrire sous la forme $m + n + 1$; cette dernière expression du nombre des paramètres d'une courbe unicursale est générale pour ces courbes, tout point de rebroussement substitué à un point nodal ayant pour effet de diminuer d'une unité la classe de la courbe et le nombre des paramètres.

13. L'identité des résultats obtenus au n° précédent, soit qu'on parte des données m, δ, k, soit qu'on parte des données n, τ, ι et la présence du nombre $m + n$ dans le résultat, sont liées à ce fait que les premières relations (2) peuvent s'écrire

$$(9) \qquad m^2 - (2\delta + 3k) = n^2 - (2\tau + 3\iota) = m + n.$$

M. Cayley a utilisé cette remarque pour expliquer un paradoxe qui se présente dans la théorie des enveloppes; l'enveloppe d'une courbe mobile est à la fois le lieu de $m^2 - (2\delta + 3k)$ ou $m + n$ points d'intersection de deux courbes infiniment voisines, et l'enveloppe de $n^2 - (2\tau + 3\iota)$ ou $m + n$ tangentes communes, chacun de ces points d'intersection correspondant à une de ces tangentes communes, tandis qu'il y aurait absurdité si l'on devait considérer m^2 points d'intersection et n^2 tangentes communes, avec correspondance de chaque point à une tangente; le nombre des contacts de la courbe mobile avec son enveloppe est $m + n$. L'emploi d'un paramètre t rend bien compte de ce qui se passe.

§ IV.

14. — Voici la démonstration annoncée au n° 2 pour l'ordre de la courbe bitangentielle. Etant donnés deux points M′ et M, de coordonnées homogènes (x', y', z') et (x, y, z), les coordonnées d'un point de la droite M′M sont $x' + \lambda x, \ldots$; la courbe $U(x, y, z) = 0$ est rencontrée par cette droite en des points qui correspondent aux valeurs de λ données par l'équation

$$U(x' + \lambda x, \quad y' + \lambda y, \quad z' + \lambda z) = 0,$$

ou

$$U' + \frac{\lambda}{1}(xU'_1 + yU'_2 + zU'_3) + \frac{\lambda^2}{1.2}(x^2U'_{11} + \ldots + 2xyU'_{12} + \ldots) + \ldots = 0,$$

U_1, U_2, U_3 représentant les dérivées partielles de U par rapport aux variables x, y, z, $U_{11}, \ldots, U_{12}, \ldots$ représentant les dérivées secondes, l'accent indiquant d'ailleurs que l'on remplace x, y, z par x', y', z'. Si M′ est un point de la courbe U, et si M est un point déterminé de la tangente en M′, l'équation en λ a deux racines nulles, et les $n - 2$ autres valeurs de λ sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{1.2}(x^2U'_{11} + \ldots + 2xyU'_{12} + \ldots) + \ldots + \lambda^{m-2}U = 0.$$

Si le point M′ est tel que la tangente M′M en ce point soit tangente à la courbe en un second point, l'équation en λ que l'on vient d'écrire a une racine double, et par suite, en appelant $\Delta(x, y, z, x', y', z')$ le discriminant de cette équation, on doit avoir simultanément

$$\begin{cases} U' = 0, \\ xU'_1 + yU'_2 + zU'_3 = 0, \\ \Delta(x, y, z, x', y', z') = 0. \end{cases}$$

Or, M′ étant un point de la courbe, de sorte que l'on a $U' = 0$, regardons x, y, z comme des coordonnées courantes, et considérons les deux lignes représentées par les deux dernières équations, lignes dont la première est la tangente en M′; si M′ n'est pas un point de contact d'une bitangente, tous les points d'intersection des deux lignes coïncident avec M′: car, si les deux dernières équations ci-dessus avaient lieu pour un point M distinct de M′, la tangente M′M serait une bitangente; si M′ est un point de contact d'une bitangente, les deux relations en question ont lieu pour un point quelconque de la tangente, et le déterminant Δ contient le facteur $xU'_1 + yU'_2 + zU'_3$; en cherchant la condition pour qu'il en soit ainsi, on aura la condition pour que x', y', z'

soit un point de contact d'une bitangente, on aura donc l'équation de la courbe bitangentielle. Le fait en question se produira d'ailleurs si, prenant la droite arbitraire $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, les trois lignes

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \\ x U'_1 + y U'_2 + z U'_3 = 0, \\ \Delta(x, y, z, x', y', z') = 0 \end{cases}$$

ont un point commun, c'est-à-dire si l'on a, pour α, β, γ quelconques,

$$\Delta(\beta U'_3 - \gamma U'_2, \ldots, \ldots, x', y', z') = 0.$$

En désignant pour un instant par k et k' les degrés du polynome Δ par rapport à x, y, z et x', y', z' respectivement, cette relation est du degré k par rapport aux quantités α, β, γ, et du degré $(m-1)k + k'$ par rapport aux quantités x', y', z'. Mais, comme le résultat de l'élimination faite s'obtient en multipliant les résultats de la substitution dans $\alpha x + \beta y + \gamma z$ des coordonnées de chacune des intersections des deux dernières lignes considérées, et comme toutes ces intersections coïncident avec x', y', z', le résultat doit être de la forme $\Pi \times (\alpha x' + \beta y' + \gamma z')^k$; en écartant le second facteur, qui correspond au cas où la droite arbitraire passe en M', la condition restante $\Pi = 0$ est la condition cherchée, et l'on voit qu'elle ne renferme pas α, β, γ, et qu'elle est du degré

$$(m-2)k + k'$$

en x', y', z'. Pour déterminer k et k', observons que Δ est le discriminant d'une équation du degré $m-2$, de sorte que l'ordre de ce discriminant (degré de chaque terme par rapport aux coefficients) est $2(m-3)$, et que son poids (somme des indices des coefficients dans chaque terme) est $(m-2)(m-3)$; cette équation peut d'abord s'écrire sous la forme

$$A_0\lambda^{m-2} + A_1\lambda^{m-3} + \cdots + A_{m-2} = 0,$$

l'indice indiquant le degré du coefficient par rapport à x', y', z', et il en résulte que l'on a

$$k' = (m-2)(m-3);$$

on peut encore l'écrire sous la forme

$$B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \cdots + B_{m-2}\lambda^{m-2} = 0$$

liée à l'équation aux valeurs de $\frac{1}{\lambda}$, et les degrés des coefficients par rapport à x, y, z surpassent toujours l'indice de deux unités : il en résulte que l'on a

$$k = (m-2)(m-3) + 4(m-3) = (m+2)(m-3),$$

l'ordre du discriminant étant $2(m-3)$. Le degré de la courbe bitangentielle est donc

$$(m-2)(m+2)(m-3) + (m-2)(m-3),$$

ou $\qquad (m-2)(m-3)(m+3), \qquad$ ou $\qquad (m-2)(m^2-9).$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

693. — *Par un point* M *d'une strophoïde droite, on peut mener deux tangentes, autres que la tangente en* M. *La droite* Δ *qui joint les points de contact* P *et* Q *de ces tangentes coupe la courbe en un troisième point* R.

Trouver, quand le point M *décrit la strophoïde :*

1° *L'enveloppe de* Δ *et celle de la droite* MR;

2° *Le lieu du centre de gravité et celui du point de concours des hauteurs du triangle* MPQ;

3° *Le lieu du centre et l'enveloppe du cercle circonscrit à ce triangle.*

En prenant pour origine le point double, pour axe des x la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'asymptote et pour axe des y une parallèle à l'asymptote, l'équation de la strophoïde est

$$x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0.$$

Désignons par α et β les coordonnées du point M, nous aurons, pour équation de la première polaire de ce point,

$$(1) \qquad \alpha(3x^2 + y^2 + 2ax) + 2\beta(x - a)y + a(x^2 - y^2) = 0,$$

avec la relation $\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + a(\alpha^2 - \beta^2) = 0$, qui lie les paramètres α et β; cette relation donne une valeur de β^2, $\beta^2 = \frac{\alpha^2(a + \alpha)}{a - \alpha}$, qui sera utilisée plus tard.

La conique (1) coupe la strophoïde en deux points confondus avec l'origine, deux points confondus avec le point M et aux deux points P et Q. Formons l'équation aux abscisses des points de rencontre; pour cela, tirons d'abord y^2 de l'équation de la strophoïde, portons cette valeur dans l'équation (1) et simplifions, nous aurons

$$y = -x\,\frac{x^2(a + \alpha) - a\alpha x - a^2\alpha}{\beta(x - a)^2};$$

portons alors cette valeur de y dans l'équation de la strophoïde, supprimons le facteur x^2, qui correspond à l'origine, et développons; nous obtenons

$$[\beta^2 + (a + \alpha)^2]x^4 - 2a[\beta^2 + \alpha(\alpha + a)]x^3 - a^2\alpha(\alpha + 2a)x^2 + 2a^3(\alpha^2 + \beta^2)x + a^4(\alpha^2 - \beta^2) = 0;$$

enfin, remplaçons dans cette équation β^2 par la valeur trouvée antérieurement, nous avons finalement

$$a^2(a + \alpha)x^4 - 2a^2\alpha(a + \alpha)x^3 - a^2\alpha(a - \alpha)(\alpha + 2a)x^2 + 4a^4\alpha^2x - 2a^4\alpha^3 = 0.$$

Le premier membre de cette équation admet deux fois le facteur $x - \alpha$, et il reste, après suppression de ce facteur, l'équation

$$(a + \alpha)x^2 = 2a^2\alpha,$$

qui donne les abscisses des points P et Q. Pour chacune d'elles, la valeur de y que nous avons trouvée antérieurement se simplifie et devient

$$y = \frac{\alpha(a + \alpha)x + 2a\alpha^2}{\beta(\alpha - a)}.$$

Il est alors facile de former l'équation de la droite Δ, qui joint les deux points P et Q. Nous trouvons ainsi

$$(\Delta) \qquad \alpha(a + \alpha)x - \beta(\alpha - a)y + 2a\alpha^2 = 0.$$

Pour avoir les coordonnées du point R, nous formons l'équation aux abscisses des points de rencontre de (Δ) avec la strophoïde; deux de ces racines ont une somme nulle, ce sont les abscisses des points P et Q; l'autre est donc égale à la somme des racines. Ce calcul donne $x = -\alpha$, pour abscisse du point R; la valeur de y s'en déduit aisément : c'est $y = -\frac{\alpha^2}{\beta}$. La droite MR a dès lors une équation facile à former, puisqu'on connaît les coordonnées des deux points M et R. Cette équation est

$$(\alpha^2 + \beta^2)x - 2\alpha\beta y + \alpha(\beta^2 - \alpha^2) = 0,$$

ou, en tenant compte de la valeur de β^2,

$$(\mathrm{MR}) \qquad a\alpha x - \beta(a - \alpha)y + \alpha^3 = 0.$$

1. Pour avoir les enveloppes de ces droites, il suffit d'isoler dans leurs équations le terme $\beta(a - \alpha)y$, d'élever ensuite les deux membres de chacune d'elles au carré, de remplacer β^2 par $\frac{\alpha^2(\alpha + a)}{a - \alpha}$, et d'ordonner par rapport à α; on trouve ainsi les deux équations

$$[(x + 2a)^2 + y^2]\alpha^2 + 2a^2(x + 2a)\alpha + a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

$$\alpha^4 + (2ax + y^2)\alpha^2 + a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

En exprimant que ces deux équations du second degré par rapport aux paramètres α et α^2, ont

chacune une racine double, on obtient les deux enveloppes. Elles coïncident avec la parabole

$$(2) \qquad y^2 + 4ax + 4a^2 = 0,$$

qui a même axe de symétrie que la strophoïde, même sommet, qui a pour paramètre $2a$ et dont la concavité est dirigée vers les x négatifs.

2 et **3**. Appelons x', y' les coordonnées du point P, x'', y'' celles du point Q, nous aurons, pour coordonnées du centre de gravité du triangle MPQ,

$$x = \frac{x' + x'' + \alpha}{3}, \qquad y = \frac{y' + y'' + \beta}{3};$$

or $x' + x'' = 0$; si nous tenons compte en outre du calcul qui a été fait plus haut pour y' et y'', les expressions de x et de y se simplifient et deviennent

$$x = \frac{\alpha}{3}, \qquad y = \frac{4a\alpha^2}{3\beta(\alpha - a)} + \frac{\beta}{3} = \frac{4a\alpha^2 + \beta^2(\alpha - a)}{3\beta(\alpha - a)}.$$

D'ailleurs $\beta^2(\alpha - a) = -\alpha^2(\alpha + a)$; nous avons donc

$$y = \frac{\alpha^2(3a - \alpha)}{3\beta(\alpha - a)};$$

en remplaçant α par $3x$, élevant y au carré, portant encore dans cette expression la valeur de β^2, nous obtenons finalement

$$(3) \qquad y^2 = \frac{9x^2(a - x)^2}{9x^2 - a^2}.$$

C'est l'équation du lieu.

Il nous semble préférable maintenant, au point de vue de la rapidité des calculs, de traiter d'abord la dernière question. A cet effet, cherchons l'équation du cercle circonscrit. Ce cercle passe aux deux points P et Q, c'est-à-dire aux points déterminés par les deux équations

$$(a + \alpha)x^2 - 2a^2\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha(a + \alpha)x - \beta(\alpha - a)y + 2a\alpha^2 = 0;$$

c'est donc l'une des coniques représentées par l'équation générale

$$\lambda[(a + \alpha)x^2 - 2a^2\alpha] + (ux + vy + w)[\alpha(a + \alpha)x - \beta(\alpha - a)y + 2a\alpha^2] = 0;$$

si nous exprimons que le terme en xy disparaît et que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux, nous obtenons de suite $u = \alpha(a + \alpha)$, $v = \beta(\alpha - a)$ et $\lambda = -2a\alpha^2$; pour avoir w, il n'y a plus qu'à exprimer que ce cercle passe au point (α, β); nous arrivons ainsi définitivement à l'équation

$$(\alpha - a)(x^2 + y^2) - a(a - 3\alpha)x - \frac{a\beta}{\alpha}(a - \alpha)y + 2a^2\alpha = 0.$$

Les coordonnées du centre sont fournies par les deux équations

$$x = \frac{a(a - 3\alpha)}{2(\alpha - a)}, \qquad y = \frac{a\beta(a - \alpha)}{2\alpha(\alpha - a)} = -\frac{a\beta}{2\alpha};$$

en éliminant entre elles et la relation $\beta^2 = \dfrac{\alpha^2(a + \alpha)}{a - \alpha}$ les paramètres variables α et β, nous avons sans peine l'équation du lieu du centre

$$(4) \qquad 9y^2 = 4a(x + a).$$

Ce lieu est une parabole ayant même axe de symétrie que la strophoïde et même sommet.

Or le cercle précédent passe constamment par ce sommet, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer ; par conséquent son enveloppe est l'homothétique de la podaire de la parabole (4) par rapport à son sommet, le centre d'homothétie étant aussi au sommet et le rapport d'homothétie ayant pour valeur 2. Cette enveloppe est donc une cissoïde droite ayant pour axe de symétrie l'axe de la strophoïde et pour point de rebroussement le sommet de cette courbe.

Il est facile maintenant d'avoir l'orthocentre du triangle MPQ et le lieu de ce point. En effet, les normales en P et Q se coupent en un point M′ du cercle circonscrit, diamétralement opposé au point M, les hauteurs du triangle forment avec les deux normales un parallélogramme dont le centre est le milieu de PQ : ce point est donc aussi le milieu de M′M″, en appelant M″ le point de concours des hauteurs. Cela posé, appelons α', β' les coordonnées du point M′, α'', β'' celles du point M″, nous avons successivement

$$\alpha' + \alpha = \frac{a(a-3\alpha)}{\alpha - a}, \qquad \beta' + \beta = -\frac{a\beta}{\alpha},$$

$$\alpha' + \alpha'' = 0, \qquad \beta' + \beta'' = \frac{4a\alpha^2}{\beta(\alpha - a)};$$

par conséquent, nous avons aussi

$$\alpha'' - \alpha = \frac{a(a-3\alpha)}{a-\alpha}, \qquad \beta'' - \beta = \frac{4a\alpha^3 + a\beta^2(\alpha - a)}{\alpha\beta(\alpha - a)}.$$

Désignons maintenant α'' et β'' par x et y et achevons le calcul de ces nombres, nous voyons que les coordonnées du point de concours des hauteurs du triangle MPQ sont

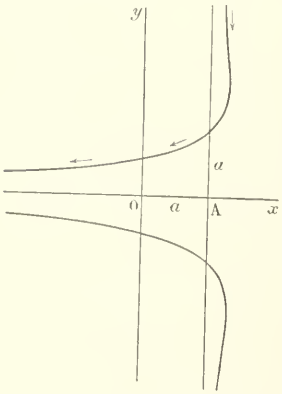
$$x = \frac{a^2 - 2a\alpha - \alpha^2}{a-\alpha}, \qquad y = -\frac{\alpha(\alpha - a)}{\beta}.$$

En élevant la seconde au carré et remplaçant β par la valeur déjà employée, nous obtenons les deux équations

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^2 - 2a\alpha - \alpha^2}{a-\alpha}, \\[2ex] y^2 = \dfrac{(a-\alpha)^3}{a+\alpha}, \end{cases}$$

qui représentent le lieu cherché.

Il serait facile d'avoir l'équation cartésienne de ce lieu, en éliminant α entre les deux équations (5) ; mais il vaut mieux garder ces deux équations et s'en servir pour étudier le lieu.



Elles montrent immédiatement que la courbe correspondante est du 5e ordre et que ses points réels correspondent aux valeurs de α comprises entre $-a$ et $+a$. Pour $\alpha = -a$, on a $x = a$, $y = \pm\infty$; pour $\alpha = a$, x est infini, les deux valeurs de y sont nulles ; enfin, pour $\alpha = a(\sqrt{2} - 1)$, la valeur de x est nulle, les valeurs de y sont moindres que a. La valeur de x est positive depuis $\alpha = -a$ jusqu'à $\alpha = a(\sqrt{2} - 1)$; elle est négative ensuite. Au surplus il est facile de voir que x croît depuis $\alpha = -a$, jusqu'à $\alpha = -a(\sqrt{2} - 1)$ et décroît ensuite, que la valeur de y^2 décroît toujours dans l'intervalle envisagé, et, qu'en particulier, pour $\alpha = 0$, $x = a$, $y = \pm a$. La courbe se trace donc sans difficulté.

La courbe (3) s'étudie tout aussi aisément.

Solution satisfaisante de M. G. A. Poulliart.

PHYSIQUE

669. — Quelques modifications produites dans l'apparence d'un astre éloigné par une atmosphère très réfringente entourant cet astre. — *L'astre est supposé lumineux par lui-même ; il est sphérique ; il*

tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire au rayon qui joint le centre de l'astre à l'œil de l'observateur.

L'atmosphère de l'astre est supposée homogène; elle est limitée par une sphère de même centre que l'astre.

On demande :

1° Comment le diamètre apparent de l'astre dépend de l'épaisseur et de l'indice de réfraction de l'atmosphère; à quelle partie de la planète correspond le disque apparent;

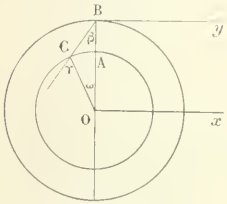
2° Pendant quelle fraction de tour un point de l'astre est visible sur le disque apparent; la position du point est définie par sa latitude vraie à la surface de l'astre.

3° On décrira sommairement l'aspect sous lequel on verrait le réseau de parallèles et de méridiens de l'astre.

Notations. — Le rayon de l'astre dépourvu d'atmosphère est pris pour unité. — Épaisseur de l'atmosphère e. — Indice de réfraction de l'atmosphère n.

(École normale, 1897.)

Soient Ox la direction des rayons visuels, OB l'axe de rotation de l'astre, By un rayon venant du point B de l'atmosphère, CB le rayon correspondant venant de l'astre.



Supposons d'abord que ce rayon existe. Le diamètre apparent de l'astre sera celui de l'atmosphère et ce diamètre apparent correspond au point C.

Calculons l'angle ω de la zone AC rendue ainsi visible. Dans le triangle OBC, on a

$$\omega = \gamma - \beta, \qquad \text{d'où} \qquad \sin\omega = \sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta.$$

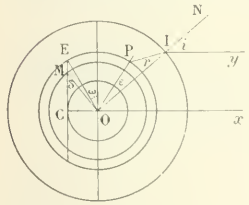
Or $$\sin\beta = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin\gamma}{1+e} = \frac{\sin\beta}{1}.$$

On en déduit

$$\sin\omega = \frac{1}{n^2}\left[(1+e)\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2-(1+e)^2}\right].$$

Premier cas : $n > 1 + e$. — Si e augmente, ω augmente depuis zéro jusqu'à la limite $\cos\omega = \frac{1}{n}$; cette limite est le complément de β. Si n augmente, ω diminue depuis $\cos\omega = \frac{1}{1+e}$ jusqu'à zéro.

Projetons sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation.



Le point E de l'équateur est visible sur l'arc $\pi + 2\omega$ de la circonférence qu'il décrit.

Le point C dont la latitude est $\frac{\pi}{2} - \omega$ et tous les points de latitude plus grande sont visibles pendant un tour complet.

Un point M de latitude quelconque φ est visible sur l'arc $\pi + 2\delta$. Or $OM = \cos\varphi$ et le triangle OME donne $\frac{\sin\delta}{1} = \frac{\sin\omega}{\cos\varphi}$; le point M est donc visible sur l'arc $\pi + 2\arcsin\frac{\sin\omega}{\cos\varphi}$.

Pour étudier plus complètement l'aspect de l'astre, considérons à sa surface un point P situé à une distance angulaire $POx = \alpha$ de la direction Ox. L'observateur le voit projeté au point I situé sur la surface de l'atmosphère à une distance angulaire i de la même direction. On établit une relation entre α et i à l'aide des équations suivantes, dans lesquelles on représentera par ε l'angle IOP et

par r l'angle PIO,

$$\alpha = i + \varepsilon, \qquad \varepsilon = P - r, \qquad \frac{\sin P}{1+e} = \frac{\sin r}{1}, \qquad \sin i = n \sin r.$$

On en déduit en particulier la dérivée de α par rapport à i :

$$\frac{d\alpha}{di} = 1 + \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{\frac{n^2}{(1+e)^2} - \sin^2 i}} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Pour $i = 0$, $\frac{d\alpha}{di} = 1 + \frac{e}{n}$; le déplacement angulaire du point I, dans le voisinage de la direction Ox, est toujours moins rapide que le déplacement angulaire du point P.

Pour $i = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\alpha}{di} = 1$; près du bord de l'astre, les déplacements des points correspondants sont les mêmes.

Prenons encore la dérivée de $\frac{d\alpha}{di}$ par rapport à i ; on peut la mettre sous la forme de facteurs positifs multipliant l'expression suivante

$$(n^2 - 1)\left(\frac{n^2}{(1+e)^2} - \sin^2 i\right)^2 - (n^2 - \sin^2 i)^2\left(\frac{n^2}{(1+e)^2} - 1\right).$$

Pour $i = 0$, cette expression a le même signe que

$$3 + 3e + e^2 - n^2.$$

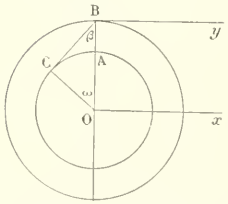
Pour $i = \frac{\pi}{2}$, elle est toujours négative.

Ceci conduit à distinguer deux cas secondaires.

1° $n^2 > 3 + 3e + e^2$. — Si i croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, la dérivée de $\frac{d\alpha}{di}$ est toujours négative, donc $\frac{di}{d\alpha}$ augmente constamment depuis $\frac{n}{n+e}$ jusqu'à l'unité : les points visibles suivant un rayon apparent paraissent relativement plus serrés au milieu que s'il n'y avait pas d'atmosphère et gardent, au contraire, près du bord, leur aspect ordinaire ; en d'autres termes, une fraction de l'hémisphère postérieur étant devenue visible, cela a lieu par suite d'une condensation apparente qui diminue depuis le centre jusqu'au bord.

2° $n^2 < 3 + 3e + e^2$. — Le rapport $\frac{di}{d\alpha}$, toujours inférieur à 1 pour $i = 0$, diminue quand i augmente, passe par un minimum, puis augmente jusqu'à l'unité. La condensation observée au centre augmente jusqu'à une certaine distance du centre, puis diminue et les distances prennent près du bord leur aspect naturel.

Deuxième cas : $n = 1 + e$. — L'angle ω prend la valeur $\frac{\pi}{2} - \beta$.

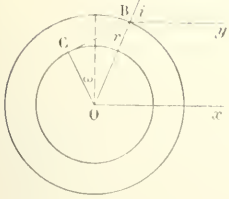


La relation entre la latitude et la visibilité d'un point ne présente rien de particulier. La dérivée $\frac{d\alpha}{di}$ prend la forme simple

$$\frac{d\alpha}{di} = 2 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Le minimum de $\frac{di}{d\alpha}$ a lieu pour $i = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que le maximum de condensation a atteint le bord apparent avec la valeur 2. En résumé, ce maximum de condensation est apparu au centre quand n^2 est passé par la valeur $3 + 3e + e^2$ et est arrivé au bord pour $n = 1 + e$.

Troisième cas : $n < 1 + e$. — Le rayon limite est défini par la relation $\sin r = \frac{1}{1+e}$, ou $\sin i = \frac{n}{1+e}$.



Le diamètre apparent est

$$2(1 + e)\sin i = 2n;$$

l'astre paraît donc agrandi en proportion de l'indice de refraction.

Le calcul de ω donne

$$\sin\omega = \frac{1}{1+e}\left[\sqrt{n^2 - \frac{n^2}{(1+e)^2}} - \sqrt{1 - \frac{n^2}{(1+e)^2}}\right].$$

Si e augmente, ω diminue jusqu'à zéro. En résumant les trois cas, on peut dire que, pour une valeur déterminée de n, e augmentant depuis zéro jusqu'à l'infini, ω part de zéro, passe par le maximum $\frac{\pi}{2} - \beta$ et revient à zéro.

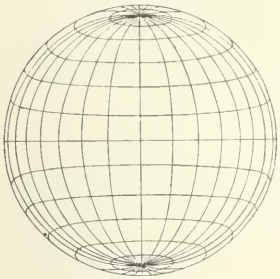
Si n augmente, ω augmente depuis zéro jusqu'à $\cos\omega = \frac{1}{1+e}$. En résumant les trois cas, pour une valeur déterminée de e, n augmentant depuis l'unité, ω part de zéro, passe par le maximum $\cos\omega = \frac{1}{1+e}$ et revient à zéro.

La dérivée de $\frac{d\alpha}{di}$ a la même expression générale que dans le premier cas, mais elle est positive aux deux limites; donc $\frac{di}{d\alpha}$ diminue constamment, et la condensation augmente du centre à la circonférence.

Pour $i = 0$, $\frac{di}{d\alpha} = \frac{n}{n+e}$.

Pour $\sin i = \frac{n}{1+e}$, $\frac{di}{d\alpha} = 0$, la condensation est infinie.

L'aspect des méridiens et des parallèles se déduit aisément de ce qui précède. On remarquera en particulier que le méridien perpendiculaire à la direction des rayons visuels apparaît sous forme de cercle concentrique au contour de l'astre et que ses intersections avec les divers parallèles conservent leurs distances angulaires véritables. Les proportions de la figure ci-contre ont été calculées dans l'hypothèse où l'on aurait $n = 2$ et $e = \frac{1}{2}$, ce qui rentre dans le premier cas; les parallèles et les méridiens y sont figurés de 15° en 15°.



Remarque. — Les calculs précédents s'appliquent à l'apparence d'une boule ou d'un tube de verre contenant un liquide, du mercure par exemple : si la cavité est assez petite, elle paraît grossie dans le rapport de n à l'unité; si au contraire la paroi est mince, la cavité paraît se confondre avec le volume extérieur.

CONCOURS DE 1898 (*Suite*).

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires.

On considère un triangle T dont les sommets sont A, B, C, et une droite Δ dans son plan. On prend les symétriques d'un point O quelconque de la droite Δ par rapport aux côtés du triangle T, et on construit le centre O′ du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les trois points ainsi obtenus.

I. Trouver le lieu du point O′ lorsque le point O décrit la droite Δ. Ce lieu est une conique S dont on discutera le genre en faisant varier la position de la droite Δ par rapport au triangle T. On indiquera également les positions de Δ pour lesquelles S lui est tangente.

II. Trouver le lieu du centre de la conique S lorsque la droite Δ se déplace parallèlement à elle-même. Ce lieu est une conique S_1 qui dépend de la direction de Δ.

III. Trouver le lieu du centre de S_1 lorsqu'on fait varier la direction de Δ.

IV. Démontrer que par tout point I de S on peut mener trois droites OO′ et faire voir que deux de ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent le point I aux points de rencontre de Δ et de S.

V. Dans le cas particulier où la droite Δ passe par le centre ω d'un cercle inscrit au triangle T, on propose de trouver l'enveloppe de la droite OO′. Démontrer que, dans ce cas, les centres des trois autres cercles inscrits au triangle T et les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet ayant pour côtés Δ et les côtés de T sont six points placés sur une même conique.

(*1er juillet, de 7 h. à 2 h.*)

Mathématiques spéciales.

762. — Au système des deux points M, M′, dont les coordonnées rectangulaires sont respectivement (x, y, z) (x', y', z'), on en fait correspondre un troisième P de coordonnées (X, Y, Z) par les formules

$$X = xx', \qquad Y = yy', \qquad Z = zz'.$$

1° On suppose que les points M, M′ décrivent une même droite Δ issue d'un point A (a, b, c) et ayant pour cosinus directeurs α, β, γ.

On demande quels lieux décrit le point P quand M et M′ décrivent la droite Δ indépendamment l'un de l'autre, ou bien quand, l'un des points décrivant la droite Δ, l'autre reste fixe sur cette droite, ou bien, enfin, quand les deux points décrivent Δ, mais en restant confondus. Dire quelles relations existent entre ces divers lieux.

2° On suppose maintenant que les points M, M′ décrivent non plus une même droite, mais une même conique Ω, les coordonnées d'un point courant de cette conique Ω étant des fonctions rationnelles d'un paramètre λ,

$$x = \frac{a_2\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0}, \qquad y = \frac{b_2\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0}, \qquad z = \frac{c_2\lambda^2 + 2c_1\lambda + c_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0},$$

où les a, b, c, d sont des coefficients constants.

Lorsque M et M′ décrivent Ω indépendamment l'un de l'autre, le point P décrit une surface S ; ses coordonnées sont des fonctions rationnelles du second degré de deux paramètres convenablement choisis. Dire quel lieu décrit le point P sur la surface S quand, M′ restant fixe sur la conique Ω, le point M décrit seul cette conique. Dire ensuite quel lieu décrit le point P quand M et M′ décrivent Ω, mais en restant liés par une relation homographique involutive. Quelles conclusions peut-on tirer du résultat relativement aux coniques situées sur la surface S ?

3° Quelle est la nature de la correspondance qui relie les points M et M′ sur la conique Ω, quand le point P décrit une section plane de la surface S ? Etudier et interpréter les cas de décomposition.

(*2 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$(px + qy)^2 - 2a(py - qx) + 2F(z) = 0$$

où a désigne une constante, et $F(z)$ une fonction déterminée de z.

1° Former le système des équations différentielles des caractéristiques.

2° Trouver une intégrale de ce système d'équations différentielles;

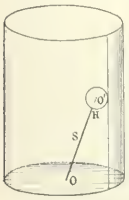
3° Au moyen de cette intégrale, former une intégrale complète de l'équation proposée.

4° Dire à quoi doit se réduire la fonction $F(z)$ pour que les caractéristiques soient des lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales.

(4 juillet, de 7 h. à 2 h.)

Mécanique rationnelle.

Un vase cylindrique, circulaire, droit, repose par le fond sur une table horizontale fixe. Le centre O de ce fond est lui-même fixe, de sorte que le vase ne peut que tourner autour de la verticale du point O; on suppose d'ailleurs que ce mouvement de rotation a lieu sans frottement.



A l'intérieur du vase se trouve une tige OH, homogène et pesante, d'épaisseur constante infiniment petite, dont une extrémité est immobile au centre O, tandis qu'à l'autre extrémité H est fixée d'une manière invariable une sphère, aussi homogène et pesante, ayant son centre O' sur l'axe de la tige et s'appuyant contre la paroi interne du vase. Le corps solide S, constitué par la tige et la sphère, peut se mouvoir librement autour du point fixe O; mais on suppose que des frottements se développent au contact de ce corps avec la paroi interne du vase. On négligera les frottements de pivotement et de roulement, pour ne tenir compte que du frottement de glissement, dont le coefficient sera f.

A l'instant initial $t = 0$, le solide S est immobile et le vase est animé d'une vitesse de rotation ω_0 autour de la verticale ascendante du point O: trouver les mouvements du vase et du solide.

On désignera par R le rayon intérieur du vase, et par μ son moment d'inertie par rapport à son axe. On représentera par m la masse de la tige OH et par M celle de la sphère. On appellera $2a$ la longueur OO', que l'on supposera supérieure à R, et ρ le rayon OH' de la sphère:

1° On trouvera d'abord les mouvements absolus du vase et du solide S dans le cas particulier où le rayon ρ de la sphère est nul;

2° On les obtiendra ensuite dans le cas général où ρ a une valeur quelconque moindre que R;

3° On discutera enfin le pivotement et le roulement du solide S sur le vase, et on écrira en particulier la condition nécessaire et suffisante pour que le roulement s'effectue constamment dans le même sens pendant toute la durée du mouvement. Négligeant ensuite la masse m de la tige et supposant invariable le rayon intérieur R du vase, on résumera la discussion précédente en la basant sur la valeur du rayon ρ de la sphère.

(5 juillet, de 7 h. à 2 h.

BOURSES DE LICENCE PRÈS LES FACULTÉS DES SCIENCES

I. — Mathématiques.

763. — On considère dans l'espace les droites (D) définies par les équations

$$x = uz - v,$$
$$y = (u^3 - 2uv)z - v(u^2 - v),$$

où u et v sont deux paramètres.

1° Quel est le lieu des droites (D) qui rencontrent l'axe des z?

2° Par un point M de l'espace passent en général deux droites (D); il existe une courbe (C), dont on demande les équations, telle que par chacun de ses points passent une infinité de droites (D).

3° Montrer qu'une quelconque des droites (D) rencontre la courbe (C) en deux points (réels ou imaginaires); déterminer, pour une droite (D) donnée, les z des points d'intersection de cette droite et de la courbe (C).

4° Former l'équation de la surface (S), lieu des milieux des droites qui joignent deux points de la courbe (C). Connaissant les coordonnées $x = x_0$ et $z = z_0$ d'un point M_0 pris sur la surface (S) en dehors de la courbe (C), déterminer les deux droites (D) qui passent par ce point, et reconnaître, d'après la position dans le plan des xz de la projection du point M_0, si les droites (D) qui passent par ce point M_0 rencontrent la courbe (C) en des points réels ou imaginaires.

5° Par la courbe (C) et un point M non situé sur elle, on peut faire passer une surface du second degré: quelle est la nature de cette surface dans le cas où les droites (D) qui passent par ce point M sont réelles, et dans le cas où ces droites sont imaginaires?

(28 juin, de 8 h. à midi.)

II. — Sciences physiques.

Physique.

764. — Une cloche cylindrique à parois verticales, et dont la partie supérieure est un plan horizontal, repose sur un bain de mercure. Le diamètre intérieur de la cloche est 20^{cm}, le diamètre extérieur est 24^{cm} ; sa hauteur intérieure est 10^{cm}, et elle pèse 15^{kg}.

Cette cloche renferme 2^{gr} d'air sec. La température de tout ce système est 0° ; la pression atmosphérique est équilibrée par 750^{mm} de mercure à 0°, en cet endroit où l'intensité de la pesanteur est 983.

On demande la hauteur occupée par l'air dans la cloche.

Densité du mercure à 0°, 13.6. Intensité de la pesanteur à Paris, 981.

Chimie.

765. — 1° Indiquer les réactions permettant de reconnaître les acides sulfurique, azotique et phosphorique et les sels donnés par ces acides ;

2° On prend deux poids P et P′ de bioxyde de baryum pur et sec. Sur le poids P on fait passer à chaud un excès de bioxyde d'azote. Le produit repris par l'eau acidulée avec de l'acide sulfurique donne, après filtration, une liqueur A.

Le poids P′ mélangé avec de l'acide sulfurique étendu donne, après filtration, une liqueur B.

On demande quel doit être le rapport des poids P et P′ pour que les deux liqueurs A et B décolorent le même volume d'une dissolution de permanganate de potassium acidulée par l'acide sulfurique.

(29 juin, de 8 h. à midi.)

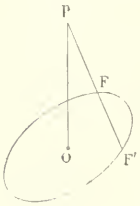
QUESTIONS PROPOSÉES

766. — Des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ situées dans un plan admettent une résultante R.

Démontrer que si l'on fait tourner ces forces dans le même sens et d'un même angle autour de n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ choisis arbitrairement dans le plan, leur résultante tourne dans le même sens et du même angle autour du point d'un plan. Examiner le cas particulier où toutes les forces sont parallèles.

Th. Caronnet.

767. — On donne une conique (C) de centre O, et un point P. Par P on mène une sécante variable rencontrant la conique en deux points F et F′.



1° Lieu des sommets des coniques admettant F et F′ pour foyers et passant par O.

2° Traiter la question dans le cas où (C) est un cercle. Solution géométrique et formes du lieu suivant la position de P dans le plan.

3° Lieu des sommets des coniques admettant F et F′ pour foyers et PO pour direction asymptotique.

Enveloppe des asymptotes de ces coniques.

4° Traiter la question dans le cas où (C) est un cercle et démontrer que les asymptotes de toutes les coniques considérées passent par deux points fixes.

F. Hon.

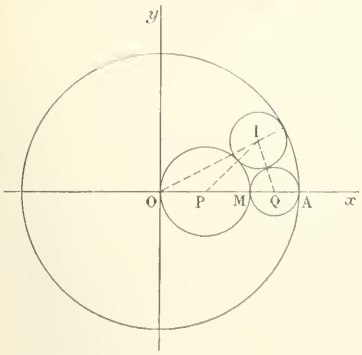
DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

713. — *On considère un cercle fixe* (C) *et un rayon fixe de ce cercle* OA ; *sur* OA *se meut un point* M. *On considère en outre les cercles* (Γ) *et* (Γ′) *décrits respectivement sur* OM *et* MA *comme diamètres.*

Trouver le lieu du centre d'un cercle tangent aux trois cercles (C), (Γ) *et* (Γ′) *et construire ce lieu.*

Prenons pour axe des x le rayon OA et pour axe des y le diamètre perpendiculaire ; désignons par R le rayon du cercle donné, par λ l'abscisse du centre du cercle décrit sur OM comme diamètre



et par x, y les coordonnées du centre du cercle tangent aux trois cercles indiqués, par ρ son rayon. Le rayon du cercle OM est alors $|\lambda|$, celui du cercle AM, $\left|\frac{R}{2} - \lambda\right|$; l'abscisse du centre de ce second cercle est $\frac{R}{2} + \lambda$, dans tous les cas.

Cela posé, il est visible que si le point M est entre O et A, le cercle ρ touche intérieurement le cercle donné et extérieurement les deux autres; que si M est au-delà de A, le cercle ρ touche extérieurement le cercle donné et le cercle AM, intérieurement le cercle OM. De même, si le point M est à gauche de O et à l'intérieur du cercle R, il n'y a pas d'autre cercle réel ρ touchant les trois cercles que le cercle décrit sur OA comme diamètre. Enfin, si le point M est à gauche et en dehors du cercle R, le cercle ρ devra toucher extérieurement le cercle R et le cercle OM, intérieurement le cercle AM.

Nous allons mettre le problème en équation en supposant le point M compris entre O et A. Nous aurons alors, en écrivant que le contact avec le cercle R est intérieur et que les deux autres sont extérieurs,

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = (R - \rho)^2, \\ (x - \lambda)^2 + y^2 = (\lambda + \rho)^2, \\ \left(x - \frac{R}{2} - \lambda\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2} - \lambda + \rho\right)^2. \end{cases}$$

Ces équations conviennent aussi au second cas, où le point M est à droite de A, en supposant ρ négatif. Elles conviennent enfin au dernier cas, en prenant encore ρ négatif, puisque λ est aussi négatif, conformément aux conventions habituelles. Il résulte de ces remarques que nous aurons le lieu total en éliminant λ et ρ entre les trois équations (1).

Or, la première de ces équations donne $\rho = R + \sqrt{x^2 + y^2}$; la seconde donne

$$x^2 + y^2 - \rho^2 = 2\lambda x + 2\lambda\rho$$

et, par suite, $2\lambda = -R\dfrac{R + 2\sqrt{x^2 + y^2}}{x + R + \sqrt{x^2 + y^2}}$. Nous n'avons plus qu'à combiner les deux dernières équations (1) par soustraction, puis à y remplacer λ et ρ par ces valeurs pour obtenir l'équation du lieu; nous avons ainsi successivement

$$R(x + \rho) - 2\lambda(2\rho + R) = 0,$$

et

$$(x + R + \sqrt{x^2 + y^2})^2 + (3R + 2\sqrt{x^2 + y^2})(R + 2\sqrt{x^2 + y^2}) = 0.$$

Cette dernière équation, développée et rendue entière, s'écrit finalement ainsi

$$(2)\qquad (6x^2 + 5y^2 + 2Rx + 4R^2)^2 - 4(x^2 + y^2)(x + 5R)^2 = 0.$$

Elle nous montre que le lieu est du quatrième degré, qu'il est symétrique par rapport à Ox, et qu'il admet pour points doubles les deux points imaginaires où la droite $x + 5R = 0$ rencontre la conique imaginaire $6x^2 + 5y^2 + 2Rx + 4R^2 = 0$; d'autre part, si nous ordonnons l'équation (2) par rapport aux puissances décroissantes de y, nous obtenons l'équation bicarrée

$$25y^4 + 4(14x^2 - 5Rx - 15R^2)y^2 + 16(x - R)^2(x + R)^2 = 0;$$

celle-ci montre que le point $x = R$, $y = 0$ est un point double, que la courbe passe aux deux points $x = -R$, $y = 0$, $x = -\frac{R}{2}$, $y = 0$ et qu'en chacun de ces points elle est tangente à une parallèle à Oy.

Pour achever de construire la courbe, il faut discuter l'équation bicarrée en y ; à cet effet, il est commode de prendre pour inconnue transitoire

$$6x^2 + 5y^2 + 2Rx + 4R^2 = u\,;$$

l'équation (2) devient alors

$$5u^2 - 4u(x+5R)^2 + 4(x+5R)^2(x^2+2Rx+4R^2) = 0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation du second degré en u est

$$4(x+5R)^4 - 20(x+5R)^2(x^2+2Rx+4R^2) \geqslant 0\,;$$

elle se réduit à $(x+5R)^2 - 5x^2 - 10Rx - 20R^2 \geqslant 0$, ou $5R^2 - 4x^2 \geqslant 0$.

Nous voyons donc déjà que x doit être compris entre $-\frac{R\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{R\sqrt{5}}{2}$.

Mais pour que u soit acceptable, il faut en outre que y^2 soit positif, c'est-à-dire que u soit plus grand que $6x^2 + 2Rx + 4R^2$. Remplaçons donc u par cette quantité dans l'équation du second degré en u ; nous aurons à étudier le signe de

$$5(6x^2+2Rx+4R^2)^2 - 20x^2(x+5R)^2,$$

ou de

$$5(8x^2+12Rx+4R^2)(4x^2-8Rx+4R^2),$$

ou enfin de

$$2x^2 + 3Rx + R^2.$$

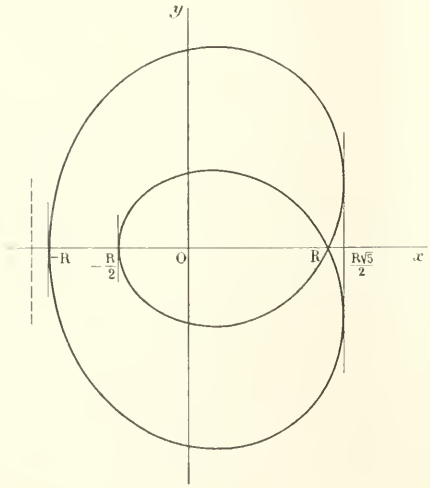
Ce trinome est négatif quand x est compris entre $-R$ et $-\frac{R}{2}$, et positif dans tout autre cas. Quand il est négatif, une valeur de u convient et une seule, la plus grande ; quand il est positif, elles conviennent toutes les deux ou ne conviennent ni l'une ni l'autre, suivant que $6x^2 + 2Rx + 4R^2$ est moindre que la demi-somme des racines, $\frac{2(x+5R)^2}{5}$, ou supérieure à cette demi-somme. En exprimant qu'elle est moindre, nous avons la condition

$$5(3x^2+Rx+3R^2) < (x+5R)^2,$$

ou

$$14x^2 - 5Rx - 15R^2 < 0.$$

Les racines de ce nouveau trinome sont $\frac{5-\sqrt{865}}{28}$ et $\frac{5+\sqrt{865}}{28}$; la première est comprise entre $-R$ et $-\frac{R}{2}$, la seconde est plus grande que $\frac{R\sqrt{5}}{2}$.



La discussion peut donc se résumer ainsi :

1° Entre $-\frac{R\sqrt{5}}{2}$ et $-R$, aucune valeur de u n'est acceptable, la courbe n'existe pas ;

2° Entre $-R$ et $-\frac{R}{2}$, une seule valeur de u est acceptable, il y a deux valeurs de y réelles, égales et de signes contraires ;

3° Entre $-\frac{R}{2}$ et $\frac{R\sqrt{5}}{2}$, les deux valeurs de u sont acceptables, les quatre valeurs de y sont réelles et deux à deux égales et de signes contraires.

En rapprochant ces résultats des remarques faites primitivement, on aperçoit de suite la forme de la courbe. Rien n'empêche d'ailleurs, pour plus de précision, de calculer les valeurs de y pour $x = -\frac{R}{2}$, $x = 0$, $x = R$ et $x = \frac{R\sqrt{5}}{2}$.

714 — *On considère les coniques qui admettent pour sommet l'origine et pour foyer un point donné, sur Ox.*

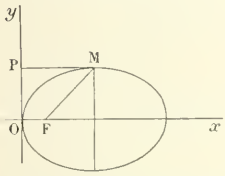
1° *Montrer qu'il y a lieu de distinguer deux séries de coniques répondant à la question, suivant que l'origine est située ou non sur l'axe focal.*

2° *La première série contient des ellipses, des hyperboles et une parabole. Trouver le lieu des sommets situés sur l'axe non focal.*

3° *La seconde série ne contient que des ellipses. Trouver le lieu du centre, du second foyer, et du sommet opposé au sommet O. Trouver aussi le lieu des sommets situés sur l'axe focal.*

1. Toutes les coniques, ellipses, hyperboles, paraboles ont des sommets réels sur l'axe focal, tandis que l'ellipse seule admet des sommets réels sur l'axe non focal. Par conséquent, si le point O est situé sur l'axe focal, les coniques correspondantes peuvent être des ellipses, des hyperboles ou des paraboles. Au contraire, si le point O est sommet d'axe non focal, les coniques correspondantes ne peuvent être que des ellipses.

2. Supposons que l'origine O soit sommet d'axe focal. Bien que les coniques correspondantes puissent être des ellipses, des hyperboles ou des paraboles, le lieu demandé n'existe que pour les ellipses.



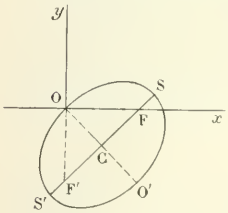
Soit une ellipse ayant le point F pour foyer, pour sommet d'axe focal le point O. Soit M un des sommets du petit axe ; abaissons MP perpendiculaire sur Oy et joignons MF. Les longueurs MF et MP sont toutes deux égales au demi-grand axe, par conséquent le lieu du point M est la parabole qui a pour foyer le point F et pour directrice Oy.

3. Supposons maintenant que l'origine O soit située sur l'axe non focal. Les coniques considérées sont des ellipses.

Soient C le centre de l'une d'elles, F′ le second foyer, S et S′ les sommets de l'axe focal et O′ le sommet opposé à O.

Le lieu du centre C est évidemment le cercle décrit sur OF comme diamètre.

Comme $OF' = OF$, le lieu du point F′ est le cercle qui a pour centre le point O et pour rayon OF.



Le lieu du point O′ est visiblement le cercle de centre F et de rayon FO.

Enfin, pour avoir le lieu des sommets S et S′ il suffit d'observer que

$$CS = CS' = OF.$$

Les points S et S′ sont donc situés sur une *conchoïde* du cercle décrit sur OF comme diamètre. De plus, comme CS et CS′ sont égaux au diamètre de ce cercle, cette conchoïde est un limaçon de Pascal à point de rebroussement, c'est-à-dire une *cardioïde*. Le point de rebroussement est le point F et le sommet est le point symétrique de F par rapport au point O.

E. N. BARISIEN.

Bonne solution par M. L. Chadenson, Le Puy (Haute-Loire).
Solution analytique : M. F. Pégorier, à Cette.

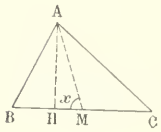
TRIGONOMÉTRIE

709. — *Dans le triangle ABC on connaît le rapport p de la longueur BC à la médiane relative à ce côté et le rapport q du côté AC au côté AB.*

1° *Calculer la tangente du demi-angle aigu x que fait cette médiane avec le côté* BC. *Conditions de possibilité. Déduire de la formule trouvée la valeur de l'angle x dans les hypothèses* $p = 3$, $q = 1{,}89572$.

2° *Établir les formules pour le calcul des angles* B *et* C *du triangle, et trouver entre les angles,* B, C, x *une relation trigonométrique indépendante des rapports p et q.*

(*Ecole Centrale, 1897, 2e session.*)



1. *Calcul de* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. — On a $\frac{a}{m} = p$, $\frac{b}{c} = q$.

Supposant $q > 1$, l'angle aigu x est l'angle AMB et on a

$$b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} + am\cos x, \qquad c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - am\cos x,$$

$$q^2 = \frac{a^2 + 4m^2 + 4am\cos x}{a^2 + 4m^2 - 4am\cos x} = \frac{p^2 + 4 + 4p\cos x}{p^2 + 4 + 4p\cos x}.$$

Remplaçant $\cos x$ par $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, il vient

$$q^2 = \frac{(p^2+4)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + 4p\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{(p^2+4)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) - 4p\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{(p+2)^2 + (p-2)^2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{(p-2)^2 + (p+2)^2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{(p+2)^2 - q^2(p-2)^2}{q^2(p+2)^2 - (p-2)^2}.$$

Condition de possibilité : Il faut que la valeur trouvée pour $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ soit positive, ce qui exige

$$\frac{(p-2)^2}{(p+2)^2} < q^2 < \frac{(p+2)^2}{(p-2)^2},$$

et comme on a supposé $q > 1$, cette condition se réduit à $q^2 < \frac{(p+2)^2}{(p-2)^2}$.

Application : $p = 3$, $q = 1{,}89572$, $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{25 - q^2}{25q^2 - 1} = \frac{(5-q)(5+q)}{(5q-1)(5q+1)}$.

$5 - q = 3{,}10428$	$\log(5-q) = 0{,}4919609$	$\log(5q-1) = 0{,}9283241$
	$\log(5+q) = 0{,}8385797$	$\log(5q+1) = 1{,}0203033$
	$\log(25 - q^2) = 1{,}3305406$	$\log(25q^2 - 1) = 1{,}9486274$
$5 + q = 6{,}89572$		
	$1{,}3305406$	$\log \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \bar{1}{,}6909566$
$5q - 1 = 8{,}47860$	$1{,}9486274$	$26°8'40''$ $\quad \frac{51}{55}$ $\quad \Delta = 533$
		$0'',3\ldots$
$5q + 1 = 10{,}47860$	$2\log \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \bar{1}{,}3819132$	$\frac{x}{2} = 26°8'40'',3 \qquad x = 52°17'20'',6$

2. *Calcul des angles* B *et* C. — On a dans le triangle ABM

$$\frac{\frac{a}{2}}{\sin(x + B)} = \frac{m}{\sin B},$$

et dans le triangle ACM

$$\frac{\frac{a}{2}}{\sin(x - C)} = \frac{m}{\sin C};$$

on en déduit

$$\frac{p}{2} = \frac{\sin(x + B)}{\sin B} = \frac{\sin(x - C)}{\sin C},$$

d'où

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\frac{p}{2} - \cos x}{\sin x}, \qquad \operatorname{cotg} C = \frac{\frac{p}{2} + \cos x}{\sin x}.$$

Enfin la relation entre les angles B, C, x est la suivante

$$\frac{\sin(x+B)}{\sin B} = \frac{\sin(x-C)}{\sin C},$$

qu'on peut encore écrire, en résolvant par rapport à $\operatorname{tg} x$,

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \sin B \sin C}{\sin(B-C)}.$$

Remarque. — En éliminant $\frac{p}{2}$ entre les expressions de $\operatorname{cotg} B$ et $\operatorname{cotg} C$, on trouve

$$2 \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} B = \frac{\sin(B-C)}{\sin B \sin C}.$$

C'est la même relation. Il est facile de la vérifier géométriquement. Soit AH la hauteur du triangle.

$$\operatorname{cotg} x = \frac{MH}{AH}, \qquad \operatorname{cotg} B = \frac{BH}{AH}, \qquad \operatorname{cotg} C = \frac{CH}{AH}.$$

La relation ci-dessus revient à

$$2MH = CH - BH,$$

relation évidente puisque $CH = CM + MH$ et $BH = BM - MH$ et que de plus $BM = MC$.

CONCOURS DE 1898 (*Suite*).

ÉCOLE CENTRALE

Première session.

Géométrie analytique.

768. — Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on donne les points A ($x = a$, $y = 0$), B ($x = 0$, $y = b$) et la parallèle OC menée par l'origine O à AB.

On considère une parabole S tangente à OC et passant par les points A, B.

1° Quel est le lieu du pôle de AB ?

2° Former l'équation du lieu N du point de concours des normales en A et B à la parabole S.

Considérations géométriques vérifiant le résultat.

Tangentes à N aux points situés sur AB.

Tracé de la courbe N.

3° Former l'équation du lieu P du point de rencontre de la parabole S avec son diamètre passant par l'origine.

Tangentes à P aux points A, B, O.

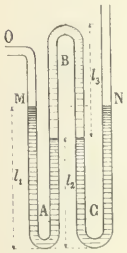
4° Dans l'hypothèse $a = b$, former l'équation du lieu R des sommets des angles droits circonscrits à P. Reconnaître que ce lieu est une parabole.

5° Tracé de l'ensemble des lignes P, R dans l'hypothèse

$$a = b = 108 \text{ unités (l'unité est arbitraire).}$$

(*1er juillet, de 7 h. à 11 h.*)

Physique et Chimie.



I. — **769.** — Un manomètre à air libre formé par un tube coudé ABC de section constante contient en A et C des colonnes l_1 et l_2 d'un liquide de poids spécifique D, et en B des colonnes l_3 d'un liquide d'un poids spécifique d. Lorsque la pression atmosphérique H s'exerce par les tubes ouverts, les positions relatives des niveaux libres M et N et des surfaces de séparation P et Q sont représentées par la figure. Si la pression exercée en O devient X, tous les niveaux M, P, Q, N se déplacent d'une même quantité h; on demande de calculer X d'après ces données.

II. — Quel est le volume de la vapeur fournie à 273° sous la pression de 76cm de mercure par 1 gramme d'eau ?

III. — On donne 100 litres de gaz ammoniac mesurés à 0° et 76cm.

1° Comment faut-il les traiter pour obtenir du cyanogène et quel volume de ce gaz obtiendra-t-on ?

2° Comment transformer en cyanure de potassium la totalité de ce cyanogène ? Dire le poids du cyanure.

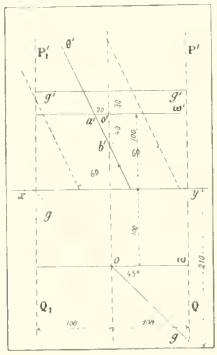
IV. — Chlorures de phosphore.

(*1er juillet, de 3 h. à 6 h.*)

Epure.

INTERSECTION D'UN HYPERBOLOÏDE AVEC UN CYLINDRE DE REVOLUTION.

770. — I. — L'hyperboloïde a son axe ($o\omega$, $o'\omega'$) parallèle à la ligne de terre (cote du point o', 100mm, éloignement du point o, 100mm, projetante oo' au milieu de la feuille de l'épure). La génératrice horizontale (gg, $g'g'$) fait avec l'axe ($o\omega$, $o'\omega'$) un angle de 45° et est située à 30mm au-dessus du plan horizontal contenant cet axe.



II. — Le cylindre de révolution a 60mm de rayon, son axe θ' est de front, il rencontre l'axe $o'\omega'$ en a' (distance $o'a'$, à gauche de o', 20mm) et la projetante de oo' en b' en dessous de o' (distance $o'b' = 40^{mm}$).

On demande de déterminer l'intersection de l'hyperboloïde et du cylindre en ayant soin d'indiquer d'une manière très nette les constructions nécessaires pour obtenir un point de la courbe et sa tangente. Il sera tenu compte de la recherche des points et tangentes remarquables.

On représentera l'hyperboloïde seul, limité aux deux plans de profil P'Q et P'_1Q_1 à distance égale (100mm) du centre oo' en supprimant de ce corps la portion contenue dans le cylindre.

Cadre de 27cm sur 45cm. Ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et à 210mm du côté inférieur.

Titre extérieur : GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Titre intérieur : HYPERBOLOÏDE ET CYLINDRE.

(*2 juillet, de 7 h. à 11 h.*)

Trigonométrie.

CALCUL.

771. — Résoudre l'équation

$$\cos^2\left(\frac{a+x}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{c}\,\sin a.\,\mathrm{tang}\,b}{2d\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

$a = 75°17'25'',1$; $b = 127°15'30'',1$; $c = 0,097561,7$; $d = 2,086152$.

PROBLÈME.

772. — 1° Résoudre le triangle qui a pour sommets les pieds α, β, γ des hauteurs d'un triangle donné ABC dont les angles A, B, C sont aigus.

2° Démontrer que parmi tous les triangles inscrits dans ABC, le triangle $\alpha\beta\gamma$ a le périmètre minimum.

(*2 juillet, de 3 h. à 6 h.*)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1897)

Géométrie analytique (M. GOUILLY.)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

696. — Que représente l'équation $PQ + \lambda = 0$? Montrer que la surface admet une ligne de centres (P, Q désignent deux polynomes du 1er degré en x, y, z).

697. — Que représente l'équation $P^2 + \lambda Q = 0$? Chercher les centres.

698. — Que représente l'équation $S + \lambda P^2 = 0$, $S = 0$ désignant une quadrique donnée et $P = 0$ un plan également donné ? Qu'arrive-t-il si $P = 0$ est le plan de l'infini ? — Cône asymptote.

699. — Que représentent les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a(x + y + z) = 0\,; \qquad x^2 + y^2 = \lambda(z - h)^2\,; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda(z - h)^2\,;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2\,; \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)\,; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = (lx + my + nz + p)^2\,;$$
$$x^2 + y^2 - yz = 0. \quad \text{(Sections circulaires.)}$$
$$yz + zx + xy = 0. \quad \text{(Vérifier sur l'équation en S que la surface est de révolution.}$$

700. — Déterminer λ de manière que $x^2 + zy + x + y + \lambda = 0$ représente un cone.

701. — Cône asymptote des surfaces

$$xy + z^2 + x - z = 0\,; \qquad x^2 + zy + x + y + 1 = 0\,; \qquad y^2 + z^2 + xy + x + y = 0\,;$$
$$x^2 + y^2 + yz + x + y + z = 0\,; \qquad x^2 + xy + z^2 + x + y = 0\,; \qquad x^2 + yz + z^2 + y + x = 0.$$

702. — Que représentent les équations

$$x^2 + y(ax + bz + c) = 0, \qquad (x - a)(y - b) + z - c = 0\,?$$

703. — Discuter les équations

$$y = z \pm \sqrt{z^2 + x^2}, \qquad y = \pm\sqrt{(x-1)(z+1)}, \qquad y = x \pm \sqrt{(x-1)(z+1)}, \qquad y = z \pm \sqrt{(x-1)(z+1)},$$
$$y = 2x + 1 \pm \sqrt{(x-1)(x+z)}, \qquad y = z \pm \sqrt{(x+z)^2 - 1}, \qquad y = z \pm \sqrt{(x+z)^2 + 1}, \qquad y = x \pm \sqrt{z}.$$

704. — Discuter les équations

$$y = x \pm \sqrt{x^2 + z^2 - 1}, \qquad y = x \pm \sqrt{(z-2)(x-1) - 1}, \qquad y = z \pm \sqrt{(x-1)(z-1) + 1}, \qquad y = z \pm \sqrt{x^2 + 4xz - z^2 + 5}$$
$$y = \pm\sqrt{x^2 + z}, \qquad y = x \pm \sqrt{x^2 + z}, \qquad y = z \pm \sqrt{x^2 + z}, \qquad y = \sqrt{(x+y)^2 + z}.$$

Géométrie (M. Levi).

705. — Construire un carré dont la surface soit à celle d'un carré donné dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

706. — On donne trois cercles; construire un quatrième cercle qui les coupe orthogonalement.

707. — On donne trois points A, B, C; par chacun d'eux passe une droite de longueur donnée; construire le cercle admettant ces trois droites pour tangentes.

708. — On considère un hexagone régulier ABCDEF et on prolonge chaque côté d'une longueur constante $AA' = BB' = \ldots = FF'$. Montrer que le polygone A'B'C'D'E'F' est un hexagone régulier et évaluer le rapport des surfaces.

709. — Trouver une droite de longueur donnée, parallèle à un plan P et s'appuyant sur deux droites données A et B.

710. — Lieu des points de l'espace dont la différence des distances à deux points fixes A et B est constante.

711. — Lieu des points de l'espace dont la somme des carrés des distances à deux points fixes A et B est constante.

712. — Etant donnés un plan P et deux points A et B hors de ce plan, lieu des points M du plan P tels que l'angle AMB soit droit.

713. — Lieu des projections d'un point de l'espace sur une droite qui pivote autour d'un point fixe O dans un plan donné.

714. — Lieu du milieu d'une droite de longueur constante s'appuyant sur deux droites rectangulaires non situées dans un même plan.

715. — Lieu des centres des circonférences tangentes à deux circonférences données.

716. — Construire une ellipse, connaissant les sommets situés sur un même axe et un point ou une tangente. Déterminer les deux autres sommets.

717. — Construire une conique connaissant :

1° Trois points et un foyer.

2° Un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles.

3° Un foyer, un sommet de l'axe focal ou non focal et une tangente.

4° Un foyer, un sommet de l'axe non focal et la longueur b de l'axe non focal.

718. — Construire une hyperbole connaissant :
1° Une direction asymptotique et les foyers.
2° Un foyer, une asymptote et un point.
3° Un foyer, une asymptote et la longueur de l'axe focal.

719. — Parabole considérée comme limite d'une ellipse. Propriété de la tangente.

720. — Construire une parabole connaissant :
1° Le foyer et deux points.
2° Le foyer et deux tangentes.
3° Le foyer, un point et une tangente.
4° La directrice et deux points.
5° La directrice et deux tangentes.
6° La directrice, un point et une tangente.
7° La tangente au sommet et deux autres tangentes.
8° Quatre tangentes.

721. — Lieu des pôles des droites passant par un foyer d'une conique. Lieu des points dont la polaire passe par le foyer.

722. — L'angle sous lequel on voit d'un foyer la portion d'une tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes est constant. Cas où les deux tangentes fixes sont les tangentes aux extrémités de l'axe focal.

723. — On inscrit une sphère variable dans un cône de révolution. Lieu des points de la sphère tels que les plans tangents en ces points coupent le cône suivant des paraboles.

QUESTIONS PROPOSÉES

773. — On considère une parabole (P) et un point M de son plan. On considère en outre un cercle de rayon donné R, qui passe au sommet de la parabole et au point M. Ce cercle rencontre la parabole en trois autres points et les normales en ces points sont concourantes.

Lieu de leur point de concours quand le point M parcourt une droite passant au sommet de la parabole. Construire ce lieu quand cette droite fait un angle de 45° avec l'axe de la parabole.

G. Pouilliart.

774. — Lieu du symétrique de l'origine par rapport aux tangentes à la spirale $\rho = ae^{k\omega}$.

(*Ecole des Mines de Saint-Etienne, oral, 1897*).

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT

BAR-LE DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

EXERCICES SUR LA DÉTERMINATION DES POINTS DOUBLES D'UNE QUARTIQUE PLANE UNICURSALE

par M. **Appell**, Membre de l'Institut.

On peut étendre aux quartiques unicursales la méthode employée précédemment (*Revue*, n° de Juin) pour la détermination du point double d'une cubique unicursale.

I. Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a_1t^4 + a_2t^3 + a_3t^2 + a_4t + a_5, \\ y = b_1t^4 + b_2t^3 + b_3t^2 + b_4t + b_5, \\ z = c_1t^4 + c_2t^3 + c_3t^2 + c_4t + c_5, \end{cases}$$

les coordonnées homogènes d'un point d'une courbe unicursale plane du quatrième ordre.

Cherchons d'abord les relations qui existent entre les valeurs du paramètre t correspondant à quatre points en ligne droite de la courbe. Pour cela, coupons la courbe par une droite

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Les valeurs de t correspondant aux points d'intersection sont données par l'équation

$$(2)\qquad \alpha(a_1t^4 + \cdots) + \beta(b_1t^4 + \cdots) + \gamma(c_1t^4 + \cdots) = 0.$$

Appelons t_1, t_2, t_3, t_4 les quatre racines; désignons par S_1, S_2, S_3, S_4 les fonctions symétriques

$$\Sigma t_1,\ \Sigma t_1t_2,\ \Sigma t_1t_2t_3,\ t_1t_2t_3t_4;$$

nous aurons en appelant δ le coefficient de t^4,

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 - \delta = 0, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 + \delta S_1 = 0, \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 - \delta S_2 = 0, \\ \alpha a_4 + \beta b_4 + \gamma c_4 + \delta S_3 = 0, \\ \alpha a_5 + \beta b_5 + \gamma c_5 - \delta S_4 = 0 \end{cases}$$

L'élimination de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entre ces équations linéaires et homogènes donne deux relations linéaires entre S_1, S_2, S_3, S_4; soient

$$(4)\qquad \begin{cases} AS_4 + BS_3 + CS_2 + DS_1 + E = 0, \\ A'S_4 + B'S_3 + C'S_2 + D'S_1 + E' = 0, \end{cases}$$

ces deux relations, où $A, B, \ldots, A', B', \ldots$ sont des coefficients constants. Quand on prend, sur la courbe, deux points t_1 et t_2, les relations (4) déterminent les deux autres points t_3 et t_4 en ligne droite avec les premiers : ces deux relations sont en effet du premier degré en t_3t_4 et t_3+t_4.

Écrivons les relations (4) en les ordonnant par rapport à t_3t_4 et t_3+t_4 ; nous aurons, en faisant

$$t_1t_2 = X, \qquad t_1+t_2 = Y,$$

$$(5)\quad \begin{cases} t_3t_4(AX+BY+C)+(t_3+t_4)(BX+CY+D)+CX+DY+E=0, \\ t_3t_4(A'X+B'Y+C')+(t_3+t_4)(B'X+C'Y+D')+C'X+D'Y+E'=0. \end{cases}$$

Quand t_1 et t_2, c'est-à-dire X et Y sont donnés, ces équations donnent t_3t_4 et t_3+t_4 ; on en conclut les points t_3 et t_4 en ligne droite avec t_1 et t_2.

Mais, supposons maintenant que t_1 et t_2 soient les paramètres d'un point double ; alors la droite joignant les points t_1 et t_2 est *indéterminée* et les points t_3 et t_4 en ligne droite avec t_1 et t_2 ne sont plus déterminés : les deux équations linéaires (5) en t_3t_4 et t_3+t_4 doivent donc se réduire à *une*, ce qui exige

$$\frac{AX+BY+C}{A'X+B'Y+C'} = \frac{BX+CY+D}{B'X+C'Y+D'} = \frac{CX+DY+E}{C'X+D'Y+E'} = -\lambda,$$

où nous appelons $-\lambda$ la valeur commune des rapports. On en déduit

$$(6)\quad \begin{cases} X(A+\lambda A')+Y(B+\lambda B')+C+\lambda C'=0, \\ X(B+\lambda B')+Y(C+\lambda C')+D+\lambda D'=0, \\ X(C+\lambda C')+Y(D+\lambda D')+E+\lambda E'=0. \end{cases}$$

Ces équations donnent par l'élimination de X et Y, l'équation cubique

$$(7)\quad \begin{vmatrix} A+\lambda A', & B+\lambda B', & C+\lambda C' \\ B+\lambda B', & C+\lambda C', & D+\lambda D' \\ C+\lambda C', & D+\lambda D', & E+\lambda E' \end{vmatrix} = 0.$$

A chaque racine de cette équation correspond un système de valeurs de X et Y tiré des équations (6) et par suite un système de valeurs des paramètres t_1 et t_2 d'un point double, définis par

$$t_1t_2 = X, \qquad t_1+t_2 = Y.$$

Remarque. — Le calcul qui donne X et Y est identique à celui qu'il faudrait faire pour chercher les points ayant même polaire par rapport aux deux coniques qui auraient pour équations :

$$AX^2+2BXY+CY^2+2CX+2DY+E=0,$$
$$A'X^2+2B'XY+C'Y^2+2C'X+2D'Y+E'=0.$$

Points d'inflexion de la quartique. — Si t est un point d'inflexion, la tangente en t coupe la courbe en trois points confondus avec t et en un point t'. On a donc, en faisant, dans les relations (4),

$$t_1 = t_2 = t_3 = t, \qquad t_4 = t',$$
$$t'(At^3+3Bt^2+3Ct+D)+Bt^3+3Ct^2+3Dt+E=0,$$
$$t'(A't^3+\cdots)+B't^3+\cdots+E'=0.$$

L'élimination de t' fournit une équation du sixième degré donnant les paramètres des points d'inflexion.

II. **Autre méthode.** — On peut présenter les calculs précédents d'une autre façon en les rattachant au problème d'algèbre suivant : *Mettre un polynome en* t, $P_n(t)$, *de degré* n, *sous la forme*

$$P_n(t) = M(t-a)^n + N(t-b)^n,$$

M, N, a et b *désignant des constantes.* Quand $n=3$, le problème est toujours possible ; quand

$n > 3$, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit qu'il existe $n-3$ relations de condition entre les coefficients du polynome P_n.

1° Soit d'abord un polynome du troisième degré

$$P_3(t) = p_0 t^3 + 3p_1 t^2 + 3p_2 t + p_3;$$

en l'identifiant avec

$$M(t-a)^3 + N(t-b)^3$$

on a

$$(8)\quad \begin{cases} M + N = p_0, \\ Ma + Nb = -p_1, \\ Ma^2 + Nb^2 = p_2, \\ Ma^3 + Nb^3 = -p_3; \end{cases}$$

ces quatre équations déterminent M, N, a, b.

Posons

$$ab = X, \qquad a + b = Y,$$

nous aurons

$$a^2 - aY + X = 0,$$
$$b^2 - bY + X = 0.$$

Donc en multipliant la première des relations (8) par X, la deuxième par $-Y$ et ajoutant à la troisième,

$$p_0 X + p_1 Y + p_2 = 0;$$

de même, en multipliant la deuxième par X, la troisième par $-Y$ et ajoutant à la quatrième,

$$p_1 X + p_2 Y + p_3 = 0.$$

Ces deux équations déterminent X et Y; les quantités a et b sont alors racines de l'équation en t

$$t^2 - tY + X = 0,$$

ou, en éliminant X et Y

$$(9)\quad \begin{vmatrix} t^2 & -t & 1 \\ p_2 & p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est la Hessienne de l'équation $P_3(t) = 0$.

2° Soit maintenant un polynome du quatrième degré

$$P_4(t) = p_0 t^4 + 4p_1 t^3 + 6p_2 t^2 + 4p_3 t + p_4;$$

en l'identifiant avec

$$M(t-a)^4 + N(t-b)^4$$

on a

$$(10)\quad \begin{cases} M + N = p_0, \\ Ma + Nb = -p_1, \\ Ma^2 + Nb^2 = p_2, \\ Ma^3 + Nb^3 = -p_3, \\ Ma^4 + Nb^4 = p_4; \end{cases}$$

en faisant, comme plus haut,

$$X = ab, \qquad Y = a + b,$$

on trouve de même, pour déterminer X et Y, les trois relations

$$(11)\quad \begin{cases} p_0 X + p_1 Y + p_2 = 0, \\ p_1 X + p_2 Y + p_3 = 0, \\ p_2 X + p_3 Y + p_4 = 0; \end{cases}$$

d'où la condition, obtenue en éliminant X et Y

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette condition est satisfaite, les équations (11) se réduisent à deux : les quantités X et Y, et par suite a et b sont déterminées ; les relations (10) donnent ensuite M et N. Le déterminant (12) est un invariant du polynome. Ces considérations s'étendent aisément à un polynome de degré quelconque.

3° Ceci posé, soit d'abord une cubique unicursale ; les valeurs t_1, t_2, t_3 du paramètre, correspondant à trois points en ligne droite, vérifient une condition de la forme

$$(13)\qquad DS_3 - CS_2 + BS_1 - A = 0$$

établie dans le précédent article. D'autre part, on voit facilement que, si a et b sont les valeurs du paramètre correspondant au point double, cette même condition (13) peut aussi s'écrire sous la forme

$$(14)\qquad (t_1 - a)(t_2 - a)(t_3 - a) + k(t_1 - b)(t_2 - b)(t_3 - b) = 0$$

où k est une constante. (Voyez, par exemple, dans la *Géométrie analytique* de Briot et Bouquet, les Notions sur les courbes unicursales). Pour déterminer a et b en fonction de A, B, C, D il faut identifier les relations (13) et (14). On doit donc avoir, identiquement, en désignant par M un facteur de proportionnalité,

$$DS_3 - CS_2 + BS_1 - A \equiv M[(t_1 - a)(t_2 - a)(t_3 - a) + k(t_1 - b)(t_2 - b)(t_3 - b)].$$

Cette identité devant avoir lieu quels que soient t_1, t_2, t_3, a lieu, en particulier quand on fait $t_1 = t_2 = t_3 = t$. On a donc, identiquement, en désignant Mk par N,

$$Dt^3 - 3Ct^2 + 3Bt - A \equiv M(t - a)^3 + N(t - b)^3.$$

Cette dernière identité montre que a et b sont les racines du Hessien du polynome

$$Dt^3 - 3Ct^2 + 3Bt - A,$$

dont les racines sont les paramètres des points d'inflexion.

4° Soit enfin une quartique unicursale. Les valeurs t_1, t_2, t_3, t_4 du paramètre correspondant à quatre points en ligne droite vérifient deux relations de la forme (4)

$$f \equiv AS_4 + BS_3 + CS_2 + DS_1 + E = 0,$$
$$f' \equiv A'S_4 + B'S_3 + C'S_2 + D'S_1 + E' = 0.$$

D'autre part, si a et b sont les paramètres d'un point double, on démontre que t_1, t_2, t_3, t_4 sont liés par la relation

$$\varphi \equiv (t_1 - a)(t_2 - a)(t_3 - a)(t_4 - a) + k(t_1 - b)(t_2 - b)(t_3 - b)(t_4 - b) = 0$$

où k est une constante. Cette relation $\varphi = 0$ devant être une conséquence des relations

$$f = 0, \qquad f' = 0,$$

on doit avoir identiquement

$$(15)\qquad f + \lambda f' \equiv M\varphi$$

où λ et M sont des constantes. Cette identité ayant lieu quels que soient t_1, t_2, t_3, t_4, donne en particulier, en y faisant $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t$,

$$(16)\qquad (A + \lambda A')t^4 + 4(B + \lambda B')t^3 + 6(C + \lambda C')t^2 + 4(D + \lambda D')t + E + \lambda E' \equiv M(t - a)^4 + N(t - b)^4$$

où N est égal à Mk. Le polynome du premier membre de cette identité pouvant se mettre sous la forme

$$M(t - a)^4 + N(t - b)^4,$$

ses coefficients $p_0 = A + \lambda A'$, $p_1 = B + \lambda B'$, ...
vérifient la relation (12), et les quantités

$$X = ab, \qquad Y = a + b$$

sont données ensuite par les équations (11). On retrouve ainsi les résultats obtenus par la première méthode.

ALGÈBRE

721. — *Etablir la formule*

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x(x-1) + \ldots + C_n^n x(x-1)^{n-1},$$

et en déduire d'autres formules, par exemple des relations entre les symboles C_n^p.

La formule indiquée est absolument évidente. Le premier membre peut s'écrire, en effet, $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$; dès lors, la formule à établir est

$$x^{n+1} = x + C_n^1 x(x-1) + C_n^2 x(x-1)^2 + \ldots,$$

ou

$$x^n = 1 + C_n^1(x-1) + C_n^2(x-1)^2 + \ldots,$$

et il suffit d'écrire $x^n = (1 + x - 1)^n$ et de développer par la formule du binome pour apercevoir l'exactitude de la formule ainsi modifiée.

Mais elle résulte non moins immédiatement de la théorie des différences. Posons, en effet, $u_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, et considérons les $n+1$ nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ et leurs différences successives ; nous aurons, en particulier, $\Delta u_0 = x$, $\Delta^2 u_0 = x(x-1)$, ..., $\Delta^n u_0 = x(x-1)^n$. La formule à établir est alors celle qui donne u_n en fonction de $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots, \Delta^n u_0$.

Formons maintenant la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n + 1 + nx + (n-1)x^2 + \ldots + x^n$, et désignons-la par v_n ; nous aurons $v_0 = 1$, $\Delta v_0 = 1$, $\Delta^2 v_0 = x$, $\Delta^3 v_0 = x(x-1)$, ...

Par conséquent,

$$n + 1 + nx + (n-1)x^2 + \ldots + x^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 x + C_n^3 x(x-1) + \ldots + C_n^n x(x-1)^{n-1}.$$

En continuant ainsi, nous aurons des formules de plus en plus compliquées.

Revenons maintenant à la formule proposée et égalons les coefficients de x^p dans les deux membres, nous aurons

$$C_n^p - C_p^1 C_n^{p+1} + C_{p+1}^2 C_n^{p+2} \ldots \pm C_n^{n-1} C_n^n = 1.$$

Pour $p = 0$, on a $C_n^0 = 1$; pour $p = 1$, on a

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots = 0,$$

formule connue ; pour $p = n$, on a $C_n^n = 1$. Toutes les autres valeurs de p fournissent des relations nouvelles. En particulier pour $p = 2$, on a

$$C_n^2 - 2C_n^3 + 3C_n^4 - 4C_n^5 + \ldots + (-1)^n(n-1)C_n^n = 1.$$

E. L'HOSTE.

Bonnes solutions : MM. L. ORLANDO, à Turin ; PROUHET (lycée de Toulouse).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

697. — *D'un point* P *extérieur à une parabole donnée, on mène les trois normales de pieds* A, B, C, *et on désigne par* I_1, I_2, I_3, I_4 *les centres des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle* ABC.

1° *Où doit se trouver le point* P *pour qu'il coïncide avec l'un des points* I ? *Dans ces conditions, trouver le lieu des trois autres points* I.

2° *On se donne l'un des points* I, *le point* I_1, *pour fixer les idées ; montrer qu'il y a deux points* P *correspondants*, P_1 *et* P_2. *Réalité de ces points.*

3° *Aux deux points* P_1 *et* P_2 *correspondent deux systèmes de points* I ; *soient* I_1, I_2, I_3, I_4, I'_1, I'_2, I'_3, I'_4. *Sur quelle courbe doit se trouver le point* I_1 *pour que les cercles circonscrits aux deux triangles* $I_2I_3I_4$, $I_2I'_3I'_4$ *soient orthogonaux ?*

4° *Dans les mêmes conditions, trouver le lieu des points d'intersection de ces deux cercles, ainsi que le lieu du milieu de la droite* P_1P_2.

Soient α, β les coordonnées du point P, x, y les coordonnées du pied A d'une normale, et $uX + vY + w = 0$, l'équation de la droite BC qui joint les pieds des deux autres.

La parabole étant rapportée à ses axes ordinaires, l'hyperbole d'Apollonius relative au point P a pour équation $XY + (p - \alpha)Y - p\beta = 0$. On doit donc avoir, pour une valeur convenable de λ,

$$XY + (p - \alpha)Y - p\beta + \lambda(Y^2 - 2pX) \equiv (uX + vY + w)(Y - y),$$

ce qui donne les relations

$$u = 1, \qquad v = \lambda, \qquad yu = 2p\lambda, \qquad w - yv = p - \alpha, \qquad w = \frac{p\beta}{y};$$

ou après avoir éliminé λ

$$u = 1, \qquad v = \frac{y}{2p}, \qquad w = \frac{p\beta}{y},$$

avec

$$(1) \qquad y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0,$$

équation aux ordonnées des points A, B, C.

Cela posé, l'équation tangentielle d'un cercle étant

$$(2) \qquad (x_0u + y_0v + w)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0,$$

nous formerons les conditions pour qu'il soit tangent aux trois côtés du triangle ABC, en remplaçant dans (2) u, v, w respectivement par 1, $\frac{y}{2p}$, $\frac{p\beta}{y}$, et en exprimant que l'équation en y ainsi trouvée

$$(y_0^2 - r^2)y^4 + 4px_0y_0y^3 + 4p^2(x_0^2 + \beta y_0 - r^2)y^2 + 8p^2\beta x_0y + 4p^4\beta^2 = 0,$$

admet les trois racines de l'équation (1). Son premier membre doit être identique à

$$[y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta][(y_0^2 - r^2)y - 2p^2\beta],$$

d'où les conditions

$$2x_0y_0 = -p\beta, \qquad (p - \alpha)(y_0^2 - r_0^2) = 2p(x^2 + \beta y_0 - r^2), \qquad (y_0^2 - r^2) + 2p(p - \alpha) = -4px_0$$

ou, après élimination de r^2,

$$(3) \qquad 2x_0y_0 + p\beta = 0$$

et

$$(4) \qquad x_0^2 - y_0^2 - 2(p + \alpha)x_0 + \beta y_0 + \alpha^2 - p^2 = 0.$$

1. Si P coïncide avec un des points I, les équations (3) et (4) admettent la solution $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, ce qui donne $2\alpha + p = 0$. Le point P doit se trouver sur la directrice de la parabole. Dans ces conditions (3) et (4) s'écrivent

$$2x_0y_0 + p\beta = 0, \qquad x_0^2 - y_0^2 - px_0 + \beta y_0 - \frac{3p^2}{4} = 0$$

Il nous suffit d'éliminer β pour avoir le lieu des points I :

$$8x_0y_0^2 - 4p(x_0^2 - y_0^2 - px_0) + 3p^3 = 0,$$

ou

$$(2x_0 + p)(4y_0^2 - 2px_0 + 3p^2) = 0.$$

Le premier facteur égalé à 0 représente le lieu du point I qui coïncide avec P ; le deuxième représente une parabole, lieu des trois autres points I.

2. Les équations (3) et (4), où x_0, y_0, coordonnées de I_1 sont données, ont deux solutions en α, β, ce qui montre l'existence de deux points P_1, P_2 correspondants. L'équation aux abscisses de ces points obtenue en portant dans (4) la valeur de β tirée de (3) est

$$\alpha^2 - 2x_0\alpha - \frac{2x_0y_0^2}{p} + x_0^2 - y_0^2 - 2px_0 - p^2 = 0.$$

De la réalité de ses racines α_1, α_2 dépend celle des points P_1, P_2. Écrivons que le discriminant est > 0.

$$\frac{2x_0y_0^2}{p} + y_0^2 + 2px_0 + p^2 > 0, \qquad \text{ou} \qquad (y_0^2 + p^2)(2x_0 + p) > 0.$$

Les points P_1, P_2 sont donc réels si le point I_1 se trouve du même côté de la directrice que la parabole.

3. (3) et (4) où l'on a remplacé x_0, y_0 par les coordonnées courantes X, Y sont deux hyperboles équilatères passant par I_1 et par les trois autres centres de cercles inscrits I_2, I_3, I_4. On peut les mettre sous la forme

$$\begin{cases} (Y + y_0)(X - x_0) + (X + x_0)(Y - y_0) = 0, \\ (X + x_0 - 2(p + \alpha))(X - x_0) - (Y + y_0 - \beta)(Y - y_0) = 0 \end{cases}$$

L'élimination de $(X - x_0)$, $(Y - y_0)$ nous fournit l'équation d'une conique passant par les sommets du triangle $I_2I_3I_4$, et qui est précisément le cercle circonscrit à ce triangle :

$$(X + x_0 - 2(p + \alpha))(X + x_0) + (Y + y_0 - \beta)(Y + y_0) = 0.$$

Nous voyons en passant que ce cercle passe par le point $X = -x_0$, $Y = -y_0$.

En posant $X + x_0 = \xi$, $Y + y_0 = \eta$, les équations des deux cercles $I_2I_3I_4$, $I_1I_2I_3$ deviennent

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - 2(p + \alpha_1)\xi - \beta_1\eta = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 - 2(p + \alpha_2)\xi - \beta_2\eta = 0. \end{cases}$$

La condition d'orthogonalité est

$$4(\alpha_1 + p)(\alpha_2 + p) + \beta_1\beta_2 = 0,$$

ou, comme

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2x_0, \qquad \alpha_1\alpha_2 = -\frac{2x_0y_0^2}{p} + x_0^2 - y_0^2 - 2px_0 - p^2, \qquad \beta_1 = \beta_2 = -\frac{2x_0y_0}{p}$$

$$(5) \qquad x_0^2y_0^2 - 2px_0y_0^2 + p^2(x_0^2 - y_0^2) = 0.$$

Cette courbe très facile à construire en résolvant par rapport à y_0, est une quartique admettant l'axe des X pour axe de symétrie, un point double à l'origine (tangentes rectangulaires), et les deux droites $X = -p(1 \pm \sqrt{2})$ pour asymptotes.

4. Les points d'intersection des deux cercles sont sur l'axe radical et le cercle dont on obtient l'équation en retranchant celles des deux cercles

$$\begin{cases} 2(\alpha_1 - \alpha_2)\xi + (\beta_1 - \beta_2)\eta = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 - (2p + \alpha_1 + \alpha_2)\xi - \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{2}\eta = 0, \end{cases}$$

ou, comme $\beta_1 = \beta_2$, $\qquad \xi = 0, \qquad \eta\left(\eta - \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) = 0.$

Prenons d'abord $\xi = 0$, $\eta = 0$, ou $X + x_0 = 0$, $Y + y_0 = 0$. Ces équations montrent qu'une partie du lieu cherché est constituée par la symétrique de la quartique (5) par rapport à l'axe des Y.

L'autre partie correspond aux équations $X + x_0 = 0$, $Y + y_0 + \frac{x_0 y_0}{p} = 0$, ou $Y + y_0\left(1 - \frac{X}{p}\right) = 0$; en transportant dans (5) ces valeurs de x_0, y_0, on a la courbe

$$X^2(X^2 + Y^2) - (2pX - p^2)(X^2 - Y^2) = 0,$$

quartique ayant les mêmes asymptotes, le même point double (avec mêmes tangentes) que la quartique (5).

Les coordonnées du point milieu de P_1P_2 sont

$$X = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = x_0, \qquad Y = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = -\frac{2x_0 y_0}{p} = -\frac{2Xy_0}{p}.$$

En portant dans (5) les valeurs de x_0, y_0, nous obtenons le lieu du milieu de P_1P_2

$$X^2(4X^2 + Y^2) - 2pXY^2 - p^2Y^2 = 0,$$

quartique ayant pour asymptotes les droites $X = p(1 \pm \sqrt{2})$, pour point double l'origine (tangentes confondues avec l'axe des X).

VASNIER.

Deuxième solution. — **1.** Faisons d'abord quelques remarques. Considérons les coniques conjuguées à un triangle, pris comme triangle de référence et représentées en coordonnées normales par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0.$$

La condition qui exprime que cette équation représente une hyperbole équilatère est alors

$$A + A' + A'' = 0.$$

Elle exprime justement que la conique passe par l'un ou l'autre des quatre points

$$x = \pm y = \pm z,$$

c'est-à-dire par les centres des cercles tangents aux côtés du triangle de référence. Donc, pour avoir l'équation générale des coniques passant par les centres des cercles tangents aux côtés d'un triangle, il suffit de chercher l'équation générale des hyperboles équilatères conjuguées à ce triangle.

Considérons maintenant trois coniques ayant trois points communs, que nous prendrons comme sommets d'un triangle de référence, coniques qui seront représentées respectivement par des équations telles que

$$a_1yz + b_1zx + c_1xy = 0, \qquad a_2yz + b_2zx + c_2xy = 0, \qquad a_3yz + b_3zx + c_3xy = 0.$$

Cherchons alors l'équation générale des coniques harmoniquement inscrites à chacune d'elles. Si

$$\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2\beta'' uv = 0$$

est l'équation de l'une de ces coniques, nous aurons les trois conditions

$$\beta a_1 + \beta' b_1 + \beta'' c_1 = 0, \qquad \beta a_2 + \beta' b_2 + \beta'' c_2 = 0, \qquad \beta a_3 + \beta' b_3 + \beta'' c_3 = 0.$$

Le déterminant de β, β', β'' dans ces équations n'est pas nul, sans quoi les coniques données auraient quatre points communs. Nous en concluons donc que β, β', β'' sont nuls et que l'équation générale des coniques cherchées est

$$\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 = 0$$

qui n'est autre que l'équation générale des coniques conjuguées au triangle de référence.

Ainsi, si l'on connaît trois coniques ayant trois points communs (sans en avoir quatre), en cherchant l'équation générale des coniques harmoniquement inscrites aux trois proposées, on obtient l'équation générale des coniques conjuguées au triangle ayant pour sommets les trois points communs.

Cela étant, revenons au problème. Soient $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole rapportée à ses axes ordinaires; x_1, y_1 les coordonnées du point P. Nous connaissons trois coniques passant par les pieds A, B, C des normales issues de P (et n'ayant en commun que ces trois points). Ce sont d'abord la parabole, puis l'hyperbole d'Apollonius relatives au point P, et enfin le cercle de Joachimstal. Les équations respectives de ces courbes sont

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & y^2 - 2px = 0, \\ & xy + (p - x_1)y - py_1 = 0, \\ & x^2 + y^2 - (p + x_1)x - \frac{y_1}{2}y = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous allons former l'équation générale des coniques (hyperboles équilatères) passant par les quatre points

I_1, I_2, I_3, I_4, c'est-à dire, d'après la première remarque, l'équation générale des hyperboles équilatères conjuguées au triangle ABC. Pour cela, d'après la seconde remarque, commençons par chercher l'équation générale des coniques harmoniquement inscrites à chacune des coniques (1).

Soit
$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0$$
cette équation. Nous aurons les trois conditions suivantes :
$$c - 2dp = 0, \qquad b + e(p - x_1) - pfy_1 = 0, \qquad a + c - d(p + x_1) - \frac{ey_1}{2} = 0,$$
d'où on tire de suite :
$$c = 2dp, \qquad a = \frac{ey_1}{2} + d(x_1 - p), \qquad b = pfy_1 + e(x_1 - p)$$
et l'équation cherchée est
$$\left[e\frac{y_1}{2} + d(x_1 - p)\right]u^2 + 2[py_1f + e(x_1 - p)]uv + 2dpv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0.$$

Telle est l'équation générale des coniques conjuguées au triangle ABC. Il nous faudrait maintenant exprimer que cette équation représente une hyperbole équilatère; le calcul est compliqué et nous allons opérer un peu autrement. Remarquons que si dans l'équation générale trouvée plus haut, nous annulons les coefficients de d, e, f, nous aurons trois coniques particulières conjuguées au triangle ABC. Les équations de ces coniques sont
$$(x_1 - p)u^2 + 2pv^2 + 2uw = 0, \qquad \frac{y_1}{2}u^2 + 2(x_1 - p)uv + 2vw = 0, \qquad 2py_1uv + w^2 = 0.$$

Les équations ponctuelles de ces coniques se calculent facilement et on trouve
$$y^2 + 4px - 2p(x_1 - p) = 0, \qquad x^2 - 2(x_1 - p)x + y_1y + (x_1 - p)^2 = 0, \qquad 2xy + py_1 = 0.$$

Ainsi ces trois coniques sont conjuguées au triangle ABC. L'équation générale des coniques conjuguées à ce triangle est alors visiblement
$$x^2 - 2(x_1 - p)x + y_1y + (x_1 - p)^2 + \lambda(2xy + py_1) + \mu[y^2 + 4px - 2p(x_1 - p)] = 0.$$

Pour avoir des hyperboles équilatères, il faut prendre $\mu = -1$ et l'équation devient

(2) $$x^2 - y^2 - 2(p + x_1)x + y_1y + x_1^2 - p^2 + \lambda(2xy + py_1) = 0.$$

En résumé, cette équation (2) représente l'équation générale des coniques passant par les quatre points I_1, I_2, I_3, I_4. On voit que ces quatre points sont à l'intersection des deux hyperboles équilatères

(3) $$x^2 - y^2 - 2(p + x_1)x + y_1y + x_1^2 - p^2 = 0,$$

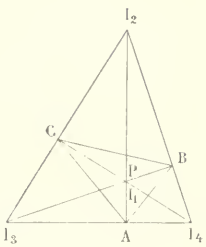
(4) $$2xy + py_1 = 0,$$

dont la dernière a une équation remarquablement simple; on peut remarquer qu'elle reste la même si le point P décrit une parallèle à l'axe de la parabole donnée.

Pour exprimer que le point P coïncide avec l'un des points I, il suffit d'exprimer que ses coordonnées vérifient les équations (3) et (4), ce qui donne
$$-2px_1 - p^2 = 0, \qquad 2x_1y_1 + py_1 = 0.$$

La première donne $x_1 = -\frac{p}{2}$ valeur qui satisfait à la seconde; donc le point P doit se trouver sur la directrice de la parabole donnée. Si on remplace x_1 par $-\frac{p}{2}$ dans les équations (3) et (4) elles deviennent
$$x^2 - y^2 - px + y_1y - 3\frac{p^2}{4} = 0, \qquad 2xy + py_1 = 0$$
et on aura le lieu des points I en éliminant y_1 entre ces deux équations ce qui donne
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x - \frac{3p}{2}\right) - y\left(y + \frac{2xy}{p}\right) = 0$$
ou, en supprimant le facteur $x + \frac{p}{2}$ qui correspond au point I confondu avec P,
$$y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{3p}{2}\right).$$

Donc le lieu des trois autres points I est la parabole lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à la parabole donnée.



Remarque géométrique. — Les quatre points I_1, I_2, I_3, I_4 forment un groupe orthocentrique et le triangle ABC a pour sommets les pieds des hauteurs de ce triangle. Supposons alors le point P en I_1; alors les normales à la parabole étant I_1A, I_1B, I_1C, la parabole est inscrite au triangle $I_2I_3I_4$, les points de contact étant A, B, C. D'après une propriété bien connue, la directrice de la parabole passe par l'orthocentre I_1 de ce triangle, c'est-à-dire par le point P. Dans ces conditions, les points I_2, I_3, I_4 sont les pôles tangentiels des cordes AB, BC, CA dont les pôles normaux sont tous trois en I_1. En employant les formules de Desboves, au cas où le pôle normal est sur la directrice de la parabole, on verra facilement que le lieu des pôles tangentiels est la parabole $y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{3p}{2}\right)$ trouvée tout à l'heure.

2. Supposons qu'on se donne les coordonnées (α, β) d'un des points $I_2 I_4$, par exemple. Ces coordonnées doivent vérifier (3) et (4) d'où

$$(3)' \qquad \alpha^2 - \beta^2 - 2(p + x_1)\alpha + y_1\beta + x_1^2 - p^2 = 0,$$

$$(4)' \qquad 2\alpha\beta + py_1 = 0.$$

Ces deux équations donnent les coordonnées x_1, y_1 du point P; on voit bien qu'il y a deux solutions P_1, P_2. La seconde donne $y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}$ ce qui montre que les deux points P sont sur une parallèle à l'axe de la parabole; portant cette valeur dans la première, on a pour déterminer x_1 l'équation du second degré :

$$(5) \qquad x_1^2 - 2\alpha x_1 + \alpha^2 - \beta^2 - \frac{2\alpha\beta^2}{p} - 2\alpha p - p^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation (5) est

$$\alpha^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \frac{2\alpha\beta^2}{p} + 2\alpha p + p^2 \geqslant 0$$

ou $\qquad (2\alpha + p)(\beta^2 + p^2) \geqslant 0, \qquad$ ou enfin $\qquad 2\alpha + p \geqslant 0.$

Le point I_1 doit donc se trouver par rapport à la directrice de la parabole, dans la même région que cette parabole. Si $2\alpha + p = 0$, les deux points P sont confondus en I_1 d'après la première partie.

3. Nous avons deux coniques qui passent par les points I_1, I_2, I_3, I_4 ; ce sont les coniques (3) et (4); d'après une méthode connue, nous allons éliminer ce point I_1 en nous servant de (3)′ et (4)′. En retranchant respectivement ces équations de (3) et (4), nous mettrons en évidence que nos coniques passent par le point α, β. Nous obtenons

$$x^2 - \alpha^2 - (y^2 - \beta^2) - 2(p + x_1)(x - \alpha) + y_1(y - \beta) = 0, \qquad xy - \alpha\beta = 0.$$

Transportons l'origine au point α, β nous aurons pour nouvelles équations de ces coniques

$$x[x + 2\alpha - 2(p + x_1)] - y(y + 2\beta - y_1) = 0, \qquad x(y + 2\beta) + y(x + 2\alpha) = 0.$$

En éliminant le rapport $\frac{x}{y}$, nous aurons une conique ne passant plus par l'origine, mais qui passera encore par $I_2I_3I_4$; le résultat de cette élimination est

$$(x + 2\alpha)[x + 2\alpha - 2(p + x_1)] + (y + 2\beta)(y + 2\beta - y_1) = 0.$$

Cette équation représente justement un cercle; elle représente donc dans le nouveau système le cercle circonscrit au triangle $I_2I_3I_4$. Transportons alors l'origine (à partir de l'origine actuelle) au point -2α, -2β; ce cercle prend la forme simple

$$(6) \qquad x^2 + y^2 - 2(p + x_1)x - y_1 y = 0.$$

On voit qu'il passe par la nouvelle origine ω qui, on le voit facilement, est le symétrique du point I_1 par rapport à l'origine du début O, sommet de la parabole donnée.

En remplaçant dans (6) y_1 par $\frac{2\alpha\beta}{p}$, puis x_1 successivement par les racines x_1', x_1'' de l'équation (5), nous aurons les équations des cercles circonscrits aux deux triangles $I_2I_3I_4$, $I_2'I_3'I_4'$, toujours dans notre système d'origine ω. Pour écrire que ces deux cercles sont orthogonaux, il suffit d'écrire que leurs tangentes à l'origine sont perpendiculaires, ce qui donne de suite

$$4(p + x_1')(p + x_1'') + y_1^2 = 0,$$

ou en nous servant de (5),

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{p^2} + p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 - \beta^2 - \frac{2\alpha\beta^2}{p} - 2\alpha p - p^2 = 0,$$

ou

$$(7) \qquad \beta^2(\alpha^2 - p^2 - 2\alpha p) + \alpha^2 p^2 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu du point t_1 (α, β), rapporté au système primitif d'origine O.

4. Dans le système ω, l'axe radical des deux cercles (6) est évidemment $x = 0$; ces cercles se coupent alors aux deux points

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad\qquad x = 0, \qquad y = y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}.$$

Le premier de ces points, dans le système fixe O a pour coordonnées on change x en $x + \alpha$, y en $y + \beta$

$$x = -\alpha, \qquad y = -\beta.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, il est le symétrique de t_1 par rapport à O; son lieu est donc la symétrique de (7) par rapport à O, qui s'obtient d'ailleurs en remplaçant dans (7) α par $-x$, β par $-y$.

Quant à l'autre point d'intersection, ses coordonnées par rapport aux anciens axes sont

$$x = -\alpha, \qquad y = -\frac{2\alpha\beta}{p} - \beta.$$

On aura son lieu en éliminant α et β entre ces deux relations et (7); on trouve ainsi pour ce lieu

$$y^2(x^2 - 2px - p^2) + x^2(2x - p)^2 = 0.$$

Enfin le milieu de la droite P_1P_2 a pour coordonnées

$$x = \frac{x_1' + x_1''}{2} = \alpha, \qquad y = y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}.$$

En éliminant α et β entre ces deux relations et (7), on aura le lieu de ce point. On trouve

$$y^2(x^2 - 2px - p^2) + 4x^4 = 0.$$

La construction des courbes qu'on vient de trouver pour ces différents lieux ne présente aucune difficulté.

G. LAPOINTE.

---

698. — *Une droite* Δ *coupe une cissoïde droite en trois points* M, P, Q.

1° *Trouver l'enveloppe de* Δ *lorsque les normales en ces points sont concourantes et le lieu de leur point de concours.*

2° *Les tangentes aux trois points* M, P, Q *rencontrent de nouveau la courbe en trois points* M', P', Q' *qui sont en ligne droite. Trouver l'enveloppe de cette droite* Δ' *et le lieu du point de concours de* Δ *et* Δ'.

1. Soit $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$ l'équation de la cissoïde; les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe s'expriment par les formules

$$x = \frac{at^2}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{at^3}{1 + t^2}.$$

Une droite, $ux + vy + w = 0$, rencontre cette courbe en trois points qui sont définis par l'équation

$$u\,\frac{at^2}{1 + t^2} + v\,\frac{at^3}{1 + t^2} + w = 0$$

ou

$$(1) \qquad vat^3 + (ua + w)t^2 + w = 0.$$

Le coefficient de t étant nul, la condition nécessaire et suffisante pour que trois points de la courbe correspondant aux valeurs t_1, t_2, t_3 du paramètre t soient en ligne droite, est

$$(2) \qquad \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = 0.$$

Cela posé, la normale à la cissoïde au point (x, y) a pour équation

$$\frac{X - x}{3x^2 + y^2} = \frac{Y - y}{2xy - 2ay},$$

ou en y remplaçant x et y par leurs valeurs en fonction de t, et simplifiant,

$$2X + Y(3t + t^3) - at^2(t^2 + 2) = 0.$$

Ecrivons que cette normale passe par le point $A(x_0, y_0)$, nous avons

$$(3) \qquad at^4 - t^3 y_0 + 2at^2 - 3ty_0 - 2x_0 = 0.$$

Nous voyons ainsi que du point A on peut mener quatre normales à la cissoïde ; il s'agit de voir dans quel cas trois de leurs pieds sont en ligne droite.

Il faut pour cela que trois des racines de l'équation (3) vérifient la relation (2), ce qui revient à dire que le premier membre de l'équation (3) doit être divisible par un trinome de la forme $t^3 + \alpha t^2 + \beta$.

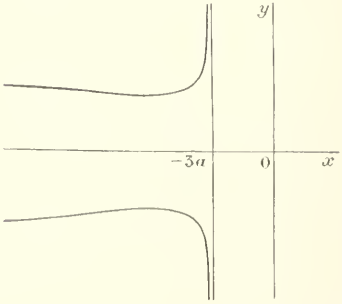
Faisons la division, nous obtenons pour reste le polynome

$$(2a + \alpha y_0 + \alpha^2 a)t^2 - (3y_0 + \beta a)t - 2x_0 + \beta y_0 + \alpha\beta a ;$$

pour qu'il soit identiquement nul, il faut qu'on ait

$$(4) \qquad \begin{cases} 2a + \alpha y_0 + \alpha^2 a = 0, \\ 3y_0 + \beta a = 0, \\ -2x_0 + \beta y_0 + \alpha\beta a = 0. \end{cases}$$

En éliminant α, β entre ces équations, nous aurons la courbe que doit décrire le point A pour que les pieds de trois normales issues de ce point à la cissoïde soient en ligne droite.



Nous obtenons ainsi l'équation

$$3y_0^2(x_0 + 3a) + 2ax_0^2 = 0.$$

Elle représente une cubique qu'il est aisé de construire en résolvant l'équation par rapport à y_0^2.

Les valeurs de t relatives aux trois pieds de normale en ligne droite vérifient l'équation

$$t^3 + \alpha t^2 + \beta = 0 ;$$

en comparant cette équation à l'équation (1), on voit que les coefficients u, v, w de la droite qui passe par les points M, P, Q vérifient les équations

$$\alpha = \frac{ua + w}{va}, \qquad \beta = \frac{w}{va}.$$

Pour obtenir l'enveloppe de cette droite, nous n'avons qu'à éliminer x_0, y_0 entre les équations (4), ce qui donne

$$3\alpha^2 - \alpha\beta + 6 = 0,$$

puis à remplacer dans cette relation α et β par leurs valeurs en fonction de u, v, w ; nous obtenons ainsi

$$6a^2v^2 + (ua + w)(3ua + 2w) = 0,$$

ou

$$3a^2u^2 + 6a^2v^2 + 5auw + 2w^2 = 0.$$

C'est l'équation tangentielle de l'enveloppe ; elle représente une conique.

D'après l'équation $6a^2v^2 + (ua + w)(3ua + w) = 0$, on reconnait que cette conique passe par les

points $A(a, 0)$ et $B\left(\frac{3a}{2}, 0\right)$ et que les tangentes en ces points sont parallèles à Oy. Il en résulte que la droite AB est axe de la conique. Le centre est le milieu de AB, il a pour abscisse $\frac{5a}{4}$.

Cherchons les tangentes issues de ce point, c'est-à-dire les asymptotes. Pour cela écrivons que la droite $y - m\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0$ est tangente; nous obtenons $m^2 = 48$, ce qui montre que les coefficients angulaires des asymptotes sont $\pm 4\sqrt{3}$.

L'enveloppe considérée est donc une hyperbole qui se trouve bien déterminée par ses sommets et ses asymptotes.

2. Soient t_1, t_2, t_3 les valeurs de t correspondant aux points M, P, Q; les tangentes en ces points rencontrent la cissoïde aux points M′, P′, Q′ qui correspondent aux valeurs t'_1, t'_2, t'_3. D'après la relation (3) nous avons

$$\frac{2}{t_1} + \frac{1}{t'_1} = 0, \qquad \frac{2}{t_2} + \frac{1}{t'_2} = 0, \qquad \frac{2}{t_3} + \frac{1}{t'_3} = 0.$$

Il en résulte que si les points M, P, Q sont en ligne droite, c'est-à-dire si l'on a $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = 0$, on a aussi $\frac{1}{t'_1} + \frac{1}{t'_2} + \frac{1}{t'_3} = 0$, ce qui montre que les points M′, P′, Q′ sont en ligne droite.

Soit $ux + vy + w = 0$, $u'x + v'y + w' = 0$ les équations des droites Δ et Δ'; t_1, t_2, t_3 et t'_1, t'_2, t'_3 sont racines respectivement des équations

$$\begin{aligned} &vat^3 + (ua + w)t^2 + w = 0, \\ (5) \qquad &v'at'^3 + (u'a + w')t'^2 + w' = 0; \end{aligned}$$

entre les racines de ces équations nous avons les relations $\frac{2}{t} + \frac{1}{t'} = 0$, ou $t = -2t'$. Remplaçons dans la première t par $-2t'$, nous obtenons l'équation

$$-8vat'^3 + 4(ua + w)t'^2 + w = 0$$

qui doit avoir mêmes racines que l'équation (5). Nous avons ainsi les relations

$$\frac{v'}{-8v} = \frac{u'a + w'}{4(ua + w)} = \frac{w'}{w}.$$

Cela posé, pour avoir l'enveloppe de la droite Δ', nous n'avons qu'à tirer de ces équations u, v, w en fonction de u', v', w' et à porter les valeurs obtenues dans l'équation tangentielle de l'enveloppe de Δ. Nous avons

$$u = \frac{u'a - 3w'}{4a}, \qquad v = -\frac{v'}{8}, \qquad w = w',$$

d'où l'équation tangentielle de l'enveloppe

$$\frac{3(u'a - 3w')^2}{16} + \frac{6a^2v'^2}{64} + \frac{5(u'a - 3w')w'}{4} + 2w'^2 = 0,$$

ou, en simplifiant et en supprimant les accents,

$$6a^2u^2 + 3a^2v^2 + 4auw - 2w^2 = 0,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$3a^2v^2 + 2(3au - w)(au + w) = 0.$$

Cette équation représente une conique ayant pour sommets les deux points $(a, 0)$ et $(-3a, 0)$. Le centre a pour abscisse $-a$. En opérant comme précédemment on reconnaît que les asymptotes sont imaginaires; par suite, la courbe est une ellipse. Pour obtenir les autres sommets de cette ellipse, il suffit de chercher les tangentes parallèles à Ox; on obtient sans difficulté les droites $y = \pm a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Cherchons maintenant le lieu du point de rencontre des droites Δ et Δ'.

Calculons u', v', w' en fonction de u, v, w; nous avons

$$u' = \frac{4au + 3w}{a}, \qquad v' = -8v, \qquad w' = w.$$

L'équation de Δ' peut donc s'écrire

$$\frac{(4au + 3w)}{a} x - 8vy + w = 0.$$

Nous sommes conduit à éliminer u, v, w entre cette équation et les suivantes

$$ux + vy + w = 0,$$

$$3a^2u^2 + 6a^2v^2 + 5auw + 2w^2 = 0.$$

Des deux premières on tire

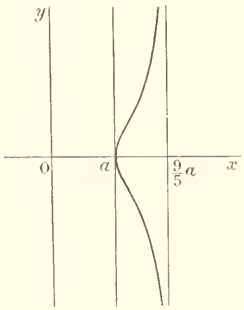
$$\frac{u}{-y(x+3a)} = \frac{v}{x(x-a)} = \frac{w}{4axy},$$

et en remplaçant dans la dernière nous obtenons

$$3a^2y^2(x+3a)^2 + 6a^2x^2(x-a)^2 - 20a^2xy^2(x+3a) + 32a^2x^2y^2 = 0,$$

ou

$$(x-a)[(5x-9a)y^2 + 2x^2(x-a)] = 0.$$



Pour expliquer la présence du facteur $x - a$, nous revenons aux valeurs de u, v, w en fonction de x et de y; nous voyons alors que pour $x = a$, nous avons $v = 0$ et $ua + w = 0$. Par suite, les droites Δ et Δ' coïncident avec la droite $x - a = 0$.

Le véritable lieu est donc la cubique qui a pour équation

$$(5x - 9a)y^2 + 2x^2(x - a) = 0.$$

On la construit aisément en résolvant l'équation par rapport à y^2; elle a un point double isolé à l'origine et admet pour asymptote la droite $x = \frac{9a}{5}$.

G. A. POUILLIART, à Nevers.

Autres solutions par MM. E. N. Barisien, C. Grolleau.

PHYSIQUE

679. — *Un baromètre à siphon contient de l'air sec dans la petite branche, qui est fermée.*

A la température de 0°, *et en un point* A *du globe, la distance verticale des niveaux du mercure dans les deux branches est* 76^{cm},235, *et le volume de l'air dans la petite branche est* 5^{cc},000.

A la température de 23°, *et en un autre point* B *du globe, la distance verticale des niveaux du mercure dans les deux branches est* 76^{cm},985, *et le volume de l'air dans la petite branche* 5^{cc},375.

Quel est le rapport des intensités de la pesanteur aux points A *et* B? *Le coefficient de dilatation de l'air est* 0,00367. *Le coefficient de dilatation absolue du mercure*, 0,00918.

(*Bourses de licence, 1897.*)

Soient, pour le point A, g la gravité, t la température, p la pression de l'air contenu dans la petite branche, v son volume, α son coefficient de dilatation, h la différence des niveaux du mercure, μ sa masse spécifique, m son coefficient de dilatation, et, pour le point B, g', t', p', v', h', μ' les quantités analogues.

L'équilibre du mercure donne $p = h\rho g$ et $p' = h'\rho' g$.

La dilatation du mercure $\rho(1 + mt) = \rho'(1 + \rho t)$.

La dilatation de l'air
$$\frac{vp}{1 + \alpha t} = \frac{v'p'}{1 + \alpha t}$$

De ces trois équations, on tire
$$\frac{g}{g'} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{v}{v'} \cdot \frac{1 + mt}{1 + mt'} \cdot \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t},$$

ou, en remplaçant les lettres par leurs valeurs,
$$\frac{g}{g'} = \frac{76{,}985}{76{,}235} \cdot \frac{5{,}375}{5{,}000} \cdot \frac{1}{(1 + 0{,}00018 \times 23)(1 + 0{,}00367 \times 23)}.$$

Le calcul donne
$$\frac{g}{g'} = 0{,}997.$$

CONCOURS DE 1898 (*Suite*).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Épure.

775. — On donne 1° une sphère S ayant pour centre oo', $x = 0$, $y = 10$, $z = 9$ et pour rayon 9.

2° Un cône de révolution C ayant pour sommet $x = 0$, $y = 10$, $z = 18$. Son axe est parallèle à la ligne de terre, les génératrices faisant avec l'axe un angle de 45°.

Soit I l'intersection de ces deux surfaces. On fait tourner cette courbe I autour de la parallèle à la ligne de terre $y = 10$, $z = 15$, elle engendre une surface de révolution II.

Représenter la partie solide de la sphère S extérieure à cette nouvelle surface II. On calculera :

1° En degrés l'angle des asymptotes de la méridienne de II avec l'axe de cette surface ;

2° Les coordonnées des points de la courbe I pour lesquels la tangente est de front, en prenant comme origine le centre de la sphère.

(*22 juillet, de 8 h. à midi.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

776. — On donne un ellipsoïde E et un plan P qui le coupe suivant une conique C.

1° Lieu d'un point M, tel qu'on puisse le joindre à trois points de la conique C, par trois droites formant un trièdre trirectangle.

2° Ce lieu est une quadrique qui coupe E suivant la conique C et suivant une autre courbe, située dans un plan Q ; montrer que la droite $\gamma\gamma'$ qui joint les pôles de P et Q par rapport à E est perpendiculaire au plan P.

3° Enveloppe du plan P lorsque les deux plans P et Q sont conjugués par rapport à l'ellipsoïde.

4° Dans les mêmes conditions, et en supposant de plus que P passe par un point fixe de l'un des axes de E, trouver le lieu décrit par la droite $\gamma\gamma'$.

5° Revenant au cas où P est donné, on mène les normales à E en tous les points de sa section par le plan Q ; trouver la courbe formée par les traces de ces normales sur le plan P.

G. Lapointe.

777. — On considère un ellipsoïde E et une droite D.

1° Trouver le lieu des centres des coniques de contact des cônes circonscrits à l'ellipsoïde et ayant pour sommets les points de la droite D.

2° On obtient ainsi une conique dont on demande le lieu quand la droite D tourne autour d'un point fixe A dans un plan fixe P. Ce lieu est une quadrique Q.

3° Dans les mêmes conditions, on demande le lieu du diamètre conjugué du plan de la conique variable dans la quadrique Q.

4° Trouver le lieu des centres des cercles de la quadrique Q qui passent au centre de l'ellipsoïde E, quand le plan P passe par un point fixe A et reste tangent à l'ellipsoïde E.

E. H.

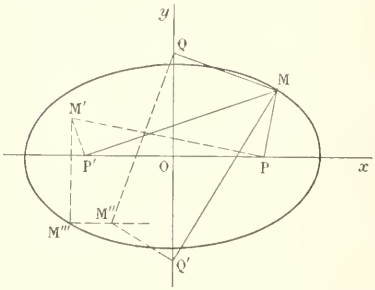
DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

718. — *Soient* P *et* P′ *deux points situés sur le grand axe d'une ellipse de centre* O *et tels que* OP = OP′, *deux points* Q *et* Q′ *situés sur le petit axe de la même ellipse et tels que* OQ = OQ′. *Si on considère un point* M *variable sur l'ellipse, les perpendiculaires à* MP *et à* MP′ *en* P *et* P′ *se rencontrent en* M′, *les perpendiculaires à* MQ *et* MQ′ *en* Q *et* Q′ *se rencontrent en* M″.

La parallèle au petit axe menée par M′ *et la parallèle au grand axe menée par* M″ *se rencontrent en* M‴. *Montrer que le lieu du point* M‴ *est l'ellipse donnée, quelles que soient les positions des points* P, P′, Q *et* Q′ *sur les axes.*

La solution géométrique de ce problème est absolument évidente.



En effet, le cercle décrit sur MM′ comme diamètre passe aux points P et P′; il a donc son centre sur Oy et le milieu de MM′ est sur cette droite; il en résulte que l'abscisse du point M′ est égale et de signe contraire à celle de M. On voit de même que l'ordonnée de M″ est égale et de signe contraire à celle de M. Donc le point M‴ est le symétrique de M par rapport au centre de l'ellipse.

La solution analytique ne présente pas non plus de difficulté.

Il n'est pas nécessaire de supposer que la courbe donnée est une ellipse : il suffit de considérer une courbe ayant pour centre le point O.

On voit de même que si le point M décrit une courbe quelconque, le point M‴ décrit la symétrique par rapport au point O.

A. BERTRAND, à Azillanet.

Solutions analogues : MM. Prouhet (lycée de Toulouse); E.-L. L'Hoste; A. Gresser (lycée de Brest); P. Barroué (lycée de Brest).

Bonnes solutions analytiques : MM. L. Orlando, à Turin; P. Barroué (lycée de Brest); F. Pégorier, à Cette; P. Bresson (Valbenoîte-Saint-Etienne); Valère Maes, à Gand.

725. — *On considère toutes les paraboles qui ont pour directrice une droite donnée* Oy *et qui passent par un point donné* A. *Soit* P *l'une d'elles. On mène la tangente en* A *à la parabole* P, *et on prend le point* B *de cette tangente symétrique du point* A *par rapport au point où elle coupe* Oy.

1° *Si par le point* B *on mène la seconde tangente* BC *à la parabole* P, *le point de contact étant* C, *la droite* AC *est normale en* A *à la parabole.*

2° *Trouver le lieu géométrique du point milieu de* AC.

3° *Trouver le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

4° *Le point* B *décrit une droite. Trouver le lieu géométrique du pôle de cette droite par rapport à chaque parabole* P.

5° *Trouver le lieu géométrique du sommet de la parabole* P.

L'énoncé indique que la droite donnée u doit être prise pour axe des y. Rien n'oblige à se conformer à cette indication et nous prendrons pour axe des y la parallèle à la droite menée par le point A et pour axe des x la perpendiculaire, de sorte que l'équation de cette droite soit $x + a = 0$, a étant positif.

En désignant alors par α et β les coordonnées du foyer de la parabole, l'équation de cette courbe sera $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (x+a)^2 = 0$; il faut exprimer qu'elle passe à l'origine, ce qui donne finalement pour équation

$$y^2 - 2(\alpha + a)x - 2\beta y = 0,$$

avec la relation $\alpha^2 + \beta^2 - a^2 = 0$.

Cette relation exprime que le lieu du foyer est le cercle décrit du point A comme centre et tangent à la droite u.

1. La droite AC est la polaire du point B. Ce point est situé sur la tangente à la parabole à l'origine et a pour abscisse $x = -2a$; ses coordonnées sont donc $x = -2a$, $y = \frac{2a(\alpha + a)}{\beta}$. Par conséquent, la polaire de ce point a pour équation

$$[2a(\alpha + a) - \beta^2]y - \beta(\alpha + a)x = 0,$$

et si on y remplace $-\beta^2$ par $\alpha^2 - a^2$, puis que l'on divise le premier membre de l'équation ainsi obtenue par $\alpha + a$, elle se réduit à

$$(\alpha + a)y - \beta x = 0.$$

Sous cette forme, il est évident qu'elle est perpendiculaire à la droite AB, dont l'équation est

$$\beta y + (\alpha + a)x = 0.$$

2. Le milieu de AC est le point de rencontre de AC avec le diamètre de la parabole qui passe au point B. Nous aurons donc le lieu de ce point en éliminant α et β entre les équations

$$(\alpha + a)y - \beta x = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta y - 2a(\alpha + a) = 0,$$

jointes à la relation $\alpha^2 + \beta^2 - a^2 = 0$. Mais cette relation elle-même est inutile, car les deux premières équations ne contiennent que le rapport $\frac{\alpha + a}{\beta}$ et l'élimination de ce rapport est immédiate. Nous trouvons ainsi

$$(1) \qquad y^2 - 2ax = 0,$$

qui représente une parabole ayant pour sommet le point A et pour directrice la droite u.

3. Le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle ABC est le milieu de l'hypoténuse BC; nous aurons donc les coordonnées de ce point en cherchant le second point de rencontre de AC avec la parabole et formant le milieu de BC. Les coordonnées du point C sont données par

$$\frac{x}{a + \alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{4a}{a - \alpha};$$

celles du milieu de BC sont donc

$$x = -a + \frac{2a(a + \alpha)}{a - \alpha} = \frac{a(3\alpha + a)}{a - \alpha},$$

$$y = \frac{a(\alpha + a)}{\beta} + \frac{2a\beta}{a - \alpha} = \frac{3a\beta}{a - \alpha};$$

la première donne α, la seconde β, et, en portant dans la relation $\alpha^2+\beta^2-a^2=0$, nous trouvons l'équation du lieu

$$(2) \qquad 2y^2-9a(x+a)=0.$$

Ce lieu est une parabole ayant pour axe l'axe des x et ayant son sommet sur la droite donnée u.

4. Le point B décrit évidemment la droite $x+2a=0$. Le pôle de cette droite s'obtient en identifiant l'équation générale de la polaire avec l'équation précédente ; ce calcul fournit les deux équations

$$f'_y=0 \qquad \text{et} \qquad 2af'_x-f'_z=0,$$

ou

$$y-\beta=0 \qquad \text{et} \qquad (\alpha+a)x+\beta y-2a(\alpha+a)=0.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer α et β entre ces équations et la relation $\alpha^2+\beta^2=a^2$. Ce calcul est sans difficulté et donne

$$(3) \qquad x^2+y^2-2ax=0,$$

équation qui représente un cercle ayant son centre sur Ox, au point d'abscisse a, et passant à l'origine.

5. L'axe de la parabole a pour équation $y=\beta$; par conséquent, le lieu du sommet de cette courbe s'obtient en éliminant α et β entre les trois équations

$$y=\beta, \qquad y^2-2(\alpha+a)x-2\beta y=0 \qquad \text{et} \qquad \alpha^2+\beta^2-a^2=0.$$

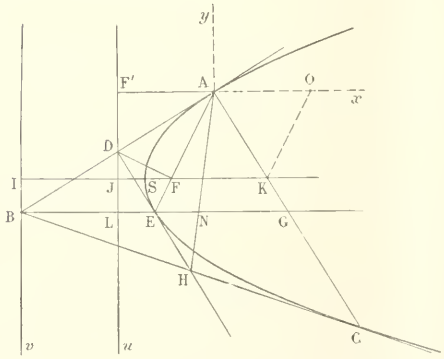
La première donne β, la seconde α, et en portant les valeurs ainsi trouvées dans la dernière, on a de suite l'équation du lieu

$$(4) \qquad 4x^2+y^2+4ax=0\,;$$

ce lieu est une ellipse ayant pour axe de symétrie Ox, un sommet à l'origine et l'autre sur la droite u.

Bonnes solutions : MM. A. Gressier, à Brest ; F. Pégorier, à Cette ; E.-N. Barisien ; P. Bresson, à Saint-Etienne.

Solution géométrique. — Soit D le point de rencontre de AB avec la droite donnée u ; le point D est le milieu de AB. Si l'on mène par le point B une parallèle à Ax, on obtient le diamètre des cordes parallèles à AC ; ce diamètre coupe la parabole en E, et la parallèle à AC menée par le point E est tangente à la parabole ; d'ailleurs elle passe au milieu D de AB, et, par suite, elle est perpendiculaire à DA, puisque les deux tangentes DA et DE sont issues d'un point de la directrice ; donc AC est aussi perpendiculaire sur AB.



La droite DE enveloppe une parabole ayant Ax pour axe, A pour foyer, F' pour sommet et u pour tangente au sommet. Cette droite touche la parabole indiquée au point E ; le lieu du point E est donc cette parabole, et, en outre, les paraboles de l'énoncé enveloppent celle-ci.

Pour avoir le lieu du point G, milieu de AC, il suffit de remarquer que le point B décrit une droite v parallèle à u et que BG = 2BE.

Le lieu du point G est donc une autre parabole, qu'on obtient en doublant les ordonnées de la précédente par rapport à la droite v, et qui a Ax pour axe, A pour sommet et Ay pour tangente au sommet.

Le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle ABC est le milieu H de l'hypoténuse ; les deux droites AH et BG sont des médianes de ce triangle. Elles se coupent en N et on a $AH=\frac{3}{2}AN$, $BG=\frac{3}{2}BN$; par conséquent, $BN=\frac{4}{3}BE$, et le lieu du point N est une parabole ayant pour axe Ax. Le lieu de H est une parabole homothétique, dans le rapport $\frac{3}{2}$, par rapport au point A.

Soit F le symétrique de F′ par rapport à la tangente AB ; c'est le foyer de la parabole mobile ; comme AF = AF′, le lieu du point F est un cercle ayant pour centre le point A ; d'ailleurs IS (S sommet de la parabole) est égale à $\frac{AF}{2}$. Donc le lieu du sommet de la parabole est une ellipse ayant pour sommets du petit axe F′ et A, et pour grand axe une longueur double de AF′.

Le pôle de la droite v est un point K de la droite AC, situé sur l'axe de la parabole mobile et tel que IS = SK ; on a donc IJ = FK et, en menant par le point K une parallèle à AF jusqu'à la rencontre avec Ax en O, on a OK = AF = FK = OA. Le lieu du point K est donc un cercle décrit du point O comme centre avec OA pour rayon.

Bonnes solutions : MM. Bailly ; Prouhet (lycée de Toulouse) ; J. Roda-Plius (lycée de Toulouse).

---

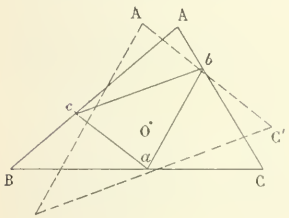
295. — *Dans un triangle donné ABC on inscrit des triangles abc semblables au triangle donné et dont les sommets a, b, c, sont respectivement situés sur les côtés opposés aux sommets A, B, C du premier triangle.*

On demande le lieu du point de concours m des médianes du triangle abc.

Examiner le cas où le triangle ABC est rectangle.

(Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, 1893.)

Je prends pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires passant par le centre de gravité du triangle ABC et je suppose que le triangle inscrit, *abc* ait même sens de rotation que le triangle donné ; on pourra toujours, en faisant tourner ce triangle autour de l'origine d'un certain angle φ, l'amener en A′B′C′ de façon à être homothétique de *abc*.



Cherchons les coordonnées $x'y'$ du point M obtenu en faisant tourner le point M(x, y) d'un angle φ autour de l'origine ; les coordonnées polaires du point M étant ρ, ω, celles du point M′ sont ρ, $\omega + \varphi$ et on a

$$x' = \rho\cos(\omega+\varphi) = \rho\cos\omega\cos\varphi - \rho\sin\omega\sin\varphi = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = \rho\sin(\omega+\varphi) = \rho\sin\omega\cos\varphi + \rho\cos\omega\sin\varphi = x\sin\varphi + y\cos\varphi;$$

ces formules donneront les coordonnées (x'_1, y'_1) (x'_2, y'_2) (x'_3, y'_3) des points A′, B′, C′ en fonction des coordonnées (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3) des points A, B, C et de l'angle φ.

Désignons par (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) les coordonnées des points a, b, c. Soient α, β les coordonnées du centre d'homothétie S des triangles *abc*, A′B′C′ et λ le rapport d'homothétie. On aura

$$\lambda = \frac{Sa}{SA'} = \frac{X_1 - \alpha}{x'_1 - \alpha} = \frac{Y_1 - \beta}{y'_1 - \beta},$$

d'où $\qquad X_1 = \alpha + \lambda(x'_1 - \alpha), \qquad Y_1 = \beta + \lambda(y'_1 - \beta);$

et même, $\qquad X_2 = \alpha + \lambda(x'_2 - \alpha), \qquad Y_2 = \beta + \lambda(y'_2 - \beta);$

$\qquad X_3 = \alpha + \lambda(x'_3 - \alpha), \qquad Y_3 = \beta + \lambda(y'_3 - \beta).$

Soient enfin, X, Y les coordonnées du centre de gravité (m) du triangle *abc* : en ajoutant membre à membre les relations précédentes et remarquant que

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 = (x_1 + x_2 + x_3)\cos\varphi - (y_1 + y_2 + y_3)\sin\varphi = 0,$$
$$y'_1 + y'_2 + y'_3 = (x_1 + x_2 + x_3)\sin\varphi + (y_1 + y_2 + y_3)\cos\varphi = 0,$$

il vient $\qquad X = \alpha(1 - \lambda), \qquad Y = \beta(1 - \lambda).$

Cela étant, les coordonnées du point a s'expriment en fonction des coordonnées X, Y du point m par les formules

$$X_1 = X + \lambda x_1' = X + \lambda x_1 \cos\varphi - \lambda y_1 \sin\varphi,$$
$$Y_1 = Y + \lambda y_1' = Y + \lambda y_1 \cos\varphi + \lambda x_1 \sin\varphi.$$

Ecrivons que ce point est situé sur BC et nous aurons la relation suivante entre X, Y, λ et φ

$$\begin{vmatrix} X + \lambda\cos\varphi.x_1 - \lambda\sin\varphi.y_1 & Y + \lambda\cos\varphi.y_1 + \lambda\sin\varphi.x_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \lambda\cos\varphi \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \lambda\sin\varphi \begin{vmatrix} -y_1 & x_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En écrivant de même que b est sur CA et c sur AB, on obtiendra deux équations analogues, linéaires en $\lambda\cos\varphi$ et $\lambda\sin\varphi$. — On éliminera λ et φ en écrivant que le déterminant complet des trois équations est nul et on obtiendra une équation du premier degré en X et Y, qui représente une droite. Le lieu du point m est donc une ligne droite.

L'équation précédente peut s'écrire

$$X(y_2 - y_3) - Y(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2 + \lambda\cos\varphi[x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1] + \lambda\sin\varphi[x_1(x_3 - x_2) + y_1(y_3 - y_2)] = 0,$$

ou, en remarquant que

$$x_2y_3 - x_3y_2 = x_3y_1 - x_1y_3 = x_1y_2 - x_2y_1 = \frac{2S}{3},$$

$$X(y_2 - y_3) - Y(x_2 - x_3) - \lambda\sin\varphi[x_1(x_2 - x_3) + y_1(y_2 - y_3)] + \frac{2S}{3}(1 + 2\lambda\cos\varphi) = 0.$$

En transformant de même les deux autres équations et éliminant $-\lambda\sin\varphi$ et $\frac{2S}{3}(1 + 2\lambda\cos\varphi)$, il vient

$$\begin{vmatrix} X(y_2 - y_3) - Y(x_2 - x_3) & x_1(x_2 - x_3) + y_1(y_2 - y_3) & 1 \\ X(y_3 - y_1) - Y(x_3 - x_1) & x_2(x_3 - x_1) + y_2(y_3 - y_1) & 1 \\ X(y_1 - y_2) - Y(x_1 - x_2) & x_3(x_1 - x_2) + y_3(y_1 - y_2) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation du lieu. — Elle représente une droite passant par l'origine, c'est-à-dire par le centre de gravité du triangle donné.

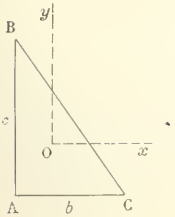
Si on ajoute les éléments des deux dernières lignes à ceux de la première on obtient 0, 0, 3 ; de sorte que l'équation se réduit à

$$\begin{vmatrix} X(y_3 - y_1) - Y(x_3 - x_1) & x_2(x_3 - x_1) + y_2(y_3 - y_1) \\ X(y_1 - y_2) - Y(x_1 - x_2) & x_3(x_1 - x_2) + y_3(y_1 - y_2) \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$X[x_1y_1(x_2 - x_3) + x_2y_2(x_3 - x_1) + x_3y_3(x_1 - x_2) - (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 - y_2)]$$
$$= Y[x_1y_1(y_2 - y_3) + x_2y_2(y_3 - y_1) + x_3y_3(y_1 - y_2) - (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)].$$

Cas où le triangle ABC *est rectangle.* — En prenant pour axes de coordonnées les parallèles menées par le centre de gravité aux côtés de l'angle droit et désignant par b et c les longueurs de ces côtés, on aura



$$x_1 = -\frac{b}{3}, \qquad x_2 = -\frac{b}{3}, \qquad x_3 = \frac{2b}{3};$$

$$y_1 = -\frac{c}{3}, \qquad y_2 = \frac{2c}{3}, \qquad y_3 = -\frac{c}{3},$$

d'où

$$x_2 - x_3 = -b, \qquad x_3 - x_1 = b, \qquad x_1 - x_2 = 0;$$

$$y_2 - y_3 = c, \qquad y_3 - y_1 = 0, \qquad y_1 - y_2 = -c.$$

L'équation du lieu devient, toutes réductions faites,

$$bX + cY = 0.$$

C'est l'équation d'une droite de coefficient angulaire $-\frac{b}{c}$ et par suite perpendiculaire à la médiane OA, dont le coefficient angulaire est $\frac{c}{b}$.

P. L.

PHYSIQUE ET CHIMIE

685 — *Quelle épaisseur e faut-il donner à une sphère creuse, en métal, de poids spécifique* D *et de poids total* P, *pour qu'un hémisphère surnage dans un liquide de poids spécifique d ?*

On négligera l'influence de l'air.

(*Ecole Centrale, 1897, 1re session.*)

Soit R le rayon extérieur de la sphère, r son rayon intérieur. Nous aurons

$$e = R - r.$$

Ecrivons l'équation d'équilibre

$$\frac{2}{3}\pi R^3 d = P.$$

Ecrivons que la sphère a pour poids P

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)D = P.$$

De ces deux équations, on tire

$$R^3 = \frac{3P}{2\pi d}$$

et

$$r^3 = \frac{3P}{2\pi d}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d}{D}\right).$$

Donc

$$e = \sqrt[3]{\frac{3P}{2\pi d}}\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{2}\frac{d}{D}}\right).$$

G. ROUSIER, à Rochechouart.

Solution exacte de M. G. POUILLIART.

686. — *Quelles sont dans le système* C. G. S., *les dimensions du coefficient* $k = 6{,}7.10^{-8}$ *de la loi de Newton* $F = k\frac{MM'}{D^2}$; *et quelle devrait être l'unité de masse pour que, la seconde étant l'unité de temps, la vitesse de la lumière* (3.10^{10}) *étant l'unité de vitesse, ce coefficient k devînt égal à l'unité ?*

(*Ecole Centrale, 1897, 1re session.*)

Considérons deux masses déterminées situées à une distance déterminée et exprimons l'attraction qui s'exerce entre elles à l'aide de deux systèmes différents d'unités ; nous aurons les deux formules

$$f = k\frac{m_1 m_2}{d^2} \qquad \text{et} \qquad f' = k'\frac{m'_1 m'_2}{d'^2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{k}{k'} = \frac{f}{f'}\cdot\frac{m'_1}{m_1}\cdot\frac{m'_2}{m_2}\cdot\frac{d^2}{d'^2}.$$

Or le rapport des nombres qui mesurent une même grandeur est inverse du rapport des unités ; nous aurons donc, en représentant par L, M, T, F les unités de longueur, de masse, de temps et de force du premier système, par L′, M′, T′, F′ les unités du second système,

$$\frac{k}{k'} = \left(\frac{F}{F'}\right)^{-1}\left(\frac{M}{M'}\right)^{2}\left(\frac{L}{L'}\right)^{-2},$$

ou bien, en remplaçant F par ses dimensions MLT^{-2},

$$\frac{k}{k'} = \frac{M}{M'}\left(\frac{L}{L'}\right)^{-3}\left(\frac{T}{T'}\right)^{2}.$$

Le cofficient k est donc proportionnel à l'unité de masse et au carré de l'unité de temps, et inversement proportionnel au cube de l'unité de longueur.

Supposons maintenant que L, M, T soient les unités C.G.S.; alors $k = 6{,}7.10^{-8}$; que L′, M′, T′ soient les unités du nouveau système ; alors $k' = 1$, $\frac{T}{T'} = 1$ et $\frac{L'}{L}$ est égal au rapport, 3.10^{10}, des unités de vitesse, puisque l'unité de temps est la même ; on trouve ainsi

$$\frac{M'}{M} = \frac{27}{6{,}7}10^{38}.$$

Autrement : soit m la nouvelle unité de masse ; l'attraction entre deux masses égales à m placées à une distance égale à la nouvelle unité de longueur est, toutes les grandeurs étant évaluées en unités C.G.S.,

$$f = 6{,}7.10^{-8}\frac{m^2}{9.10^{20}}.$$

D'autre part, pour que le coefficient k devienne égal à l'unité, il faut que cette attraction soit égale à la nouvelle unité de force, c'est-à-dire capable de donner à la masse m une accélération de 3.10^{10} unités C.G.S.; donc

$$f = m.3.10^{10}.$$

En égalant ces deux valeurs, on retrouve $m = \frac{27}{6{,}7}10^{38}$.

---

687. — *On attaque complètement à chaud* 20^{gr} *d'un alliage d'argent et de cuivre par l'acide sulfurique concentré. Le gaz produit est envoyé dans un excès d'eau de chlore. On verse ensuite, dans la liqueur très étendue d'eau, une solution de chlorure de baryum également en excès. Le précipité obtenu étant lavé et séché pèse* $47^{gr},765$.

On demande la composition en poids de l'alliage.

$$H = 1, \qquad O = 16, \qquad S = 32, \qquad Cl = 35{,}5,$$
$$Cu = 63, \qquad Ag = 108, \qquad Ba = 137.$$

(*Ecole centrale, 1897, 1re session.*)

Les réactions successives sont représentées par les équations suivantes :

$$x\{Ag^2 + 2SO^4H^2 = SO^4Ag^2 + 2H^2O + SO^2\}$$
$$y\{Cu + 2SO^4H^2 = SO^4Cu + 2H^2O + SO^2\}$$
$$(x + y)\{SO^2 + Cl^2 + 2H^2O = SO^4H^2 + 2HCl\}$$
$$(x + y)\{SO^4H^2 + BaCl^2 = SO^4Ba + 2HCl\}$$

Les données numériques s'expriment par les équations

$$x.216 + y.63 = 20,$$
$$(x + y)233 = 47,765.$$

Le calcul donne : poids d'argent, $x.216 = 10$,

poids de cuivre, $y.63 = 10$.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1897)

Géométrie descriptive. (M. Levi).

724. — Amener un plan défini par trois points, à être parallèle à une droite donnée Δ.

725. — Angle de deux plans donnés par leurs lignes de plus grande pente.

726. — Distance d'un point de la ligne de terre à un plan déterminé par deux droites.

727. — Plus courte distance de deux droites, l'une horizontale et l'autre de profil.

728. — Plus courte distance de deux droites données par leurs projections cotées. — Distance d'un point à une droite.

729. — Mener à un cylindre de révolution déterminé par son axe et son rayon un plan tangent parallèle à une direction donnée.

730. — On donne un cône de révolution par son axe et son angle au sommet. Plans tangents perpendiculaires au second plan bissecteur.

731. — Contours apparents d'un cône ayant pour sommet un point donné s, s' et pour directrice un cercle donné par son plan et son rabattement sur le plan horizontal.

732. — Contours apparents d'un cône de révolution admettant trois droites concourantes comme génératrices.

733. — Mener par un point o, o' une droite faisant des angles donnés α, β, avec deux plans donnés, l'un vertical, l'autre de bout.

734. — Mener par un point un plan faisant des angles donnés avec un plan et une droite donnés.

735. — Mener par un point donné (ou parallèlement à une droite donnée) une droite qui soit à des distances données de deux droites données.

736. — Mener par un point une droite faisant un angle donné α avec un plan P et à une distance d d'une droite Δ.

737. — Un cône de révolution à axe de front est coupé par un plan déterminé par la ligne de terre et un point. Trouver un point de la section et la tangente en ce point.

738. — Intersection d'un cône de révolution à axe horizontal avec le premier plan bissecteur.

739. — Intersection de deux cylindres tangents au plan horizontal.

740. — Intersection de deux cylindres ayant pour base commune une ellipse donnée dans le plan vertical, et leurs génératrices parallèles au plan horizontal.

741. — Intersection de deux cônes ayant pour base commune un cercle situé dans un plan de profil et pour sommets deux points de la ligne de terre.

742. — On donne trois points par leurs projections et leurs cotes. Déterminer le contour apparent horizontal d'une sphère passant par les trois points et tangente au plan horizontal.

743. — Mener par deux points une sphère tangente aux deux plans de projection.

744. — On donne une sphère tangente au plan horizontal. On considère le cône ayant pour sommet un point donné par sa projection et sa cote et pour directrice la section de la sphère par un plan vertical. Intersection de la sphère et du cône.

745. — Intersection d'une sphère et d'un cylindre ayant pour directrice une section horizontale de la sphère.

746. — On coupe un ellipsoïde à axe vertical par un plan de bout : on considère le cône ayant pour directrice la section et pour sommet le point le plus haut de l'ellipsoïde. Intersection des deux surfaces et trace horizontale du cône.

747. — Intersection d'un ellipsoïde à axe vertical et d'un cône dont le sommet est dans le plan de front de l'axe et la directrice est la section de l'ellipsoïde par un plan de bout.

748. — Intersection d'un tore et d'un cône ayant pour base une section plane du tore.

749. — Intersection d'un cône ou d'un cylindre de révolution dont l'axe est de front avec une sphère dont le centre est dans le même plan de front.

750. — Intersection d'un tore à axe vertical avec un cylindre dont la base est une parabole dans le plan horizontal.

751. — Normale à un cône de révolution dont l'axe est de front, par un point (a, a').

752. — Normale commune à une sphère et à un cône de révolution.

753. — On a un hyperboloïde de révolution défini par son axe vertical et une génératrice ; déterminer les génératrices qui ont leurs projections horizontales parallèles à une direction donnée.

754. — Méridienne de l'hyperboloïde engendré par une droite verticale en tournant autour d'un axe de front.

755. — Mener par une génératrice d'un hyperboloïde un plan tangent faisant un angle donné avec un plan donné.

756. — Intersection d'une droite parallèle à la ligne de terre avec un hyperboloïde engendré par une droite quelconque en tournant autour de la ligne de terre. — Déterminer un point connaissant sa projection horizontale et construire le plan tangent en ce point.

757. — On donne un hyperboloïde et un point. Mener par ce point un plan faisant un angle donné avec le plan horizontal et coupant la surface suivant une parabole.

758. — Intersection de deux hyperboloïdes engendrés par une même droite en tournant autour de deux axes verticaux.

759. — On donne un plan P par sa ligne de plus grande pente et une courbe C dans ce plan. On fait tourner le plan autour d'une verticale. Construire un point de la surface engendrée et le plan tangent en ce point.

760. — On donne un plan parallèle à la ligne de terre et une courbe dans ce plan. On considère la surface engendrée par cette courbe en tournant autour de la ligne de terre. Construire un point de la surface et le plan tangent en ce point.

QUESTIONS PROPOSÉES

778. — On considère une ellipse de foyers F et F′ et sur l'ellipse qui a pour sommets les points de rebroussement de la développée, un point variable M. Montrer que le lieu du centre de l'hyperbole équilatère tangente à MF et MF′ en F et F′ est l'ellipse primitive.

E.-N. Barisien.

779. — Lieu des foyers des paraboles bitangentes à un cercle, et dont les directrices passent par un point donné.

(*École des Mines de Saint-Etienne, Oral, 1897.*)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

TABLE DES MATIÈRES

ANNÉES 1895-96 ET 1897-98

ALGÈBRE

Nos des questions — Pages

563 On donne $2n$ quantités au moyen desquelles on forme des expressions algébriques classées en n groupes. Calculer le nombre de ces expressions 143

721 Etablir la formule
$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$$
$$=1+C_n^1x+C_n^2x(x-1)+\ldots+C_n^{n-1}x(x-1)\ldots(x-n+2).$$ 589

690 Variation d'une aire 529

568 Variation du rapport de deux volumes . . 148

649, 650 Si dans une équation
$$\ldots ax^k+bx^{k-1}+cx^{k-2}+dx^{k-3}+\ldots=0$$
on a $(b^2-ac)(bd-c^2)>0$,
ou $(bc-ad^2)-4(ac-b^2)(bd-c^2)>0$
l'équation a au moins deux racines imaginaires 434, 435

694 Exercice sur l'équation du 4e degré 545

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

575 Les tangentes en M et M' à une courbe plane rencontrent les normales en M' et M aux points N et N'. Limite du point de rencontre de MM' et NN' quand M' tend vers M. 184

496 Trouver une courbe passant par l'origine O et telle que le rayon de courbure en un point quelconque M de cette courbe ait même longueur que l'arc de courbe OM. . 6

515 Lieu du point de contact de deux cercles variables tangents à des droites fixes . . . 25

566 Exercices sur les normales issues d'un point à la cubique $a^2y=x^3$ 160

576 Lieu des centres de similitude de deux cercles variables 192

577 Exercices relatifs à un cercle tangent à trois droites 193

578 Relation relative à un triangle 195

609 Par les extrémités O et A d'un rayon fixe d'un cercle on fait passer un cercle variable. Exercices 199

570 Lieu des centres des cercles orthogonaux à un cercle fixe et tangents à un autre cercle également fixe. 243

599, 695 Exercices relatifs à des cercles et des droites 250, 503

596 Cercle circonscrit à un triangle isocèle. — Exercices 262

608 Triangle rectangle ayant ses côtés de l'angle droit placés sur deux droites fixes, la somme de ces côtés étant constante. Exercices divers 343

627 Cercles passant par un point, tangents à une droite et associés deux à deux de manière à être orthogonaux. Exercices 359

640 Lieu du pôle d'une corde d'un cercle qui est vue d'un point fixe sous un angle constant. 389

642 Exercices relatifs à deux cercles orthogonaux. 419

636 Lieux des milieux des tangentes communes à deux cercles variables 442

584 Soient φ_1 et φ_2 les arguments de deux points M et N d'un cercle. Si on a la relation $f(\varphi_1, \varphi_2)=0$, trouver le point où MN touche son enveloppe. Cette enveloppe est une épicycloïde si la relation est linéaire . 205

605, 698 Exercices sur une cissoïde 254, 595

630 Exercice sur la courbe $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 346

651 Enveloppe des symétriques des tangentes à un cercle par rapport à une droite fixe. 436, 484

658 Soit P la projection d'un point M d'un cercle sur un rayon fixe OA. Lieu du centre de gravité et des cercles inscrits du triangle OMP 444

660 Exercices relatifs à des droites et des cercles. 445

675 Déterminer une courbe C de façon que la tangente en un point quelconque M rencontre une droite donnée en un point N tel que l'angle MON soit constant ; O étant un point fixe 479

671 Equation de cubiques satisfaisant à certaines conditions. 487

696 Sur deux axes rectangulaires Ox, Oy on prend des points A et B tels que OA + OB soit constant. Lieu du point de rencontre de AB avec l'axe radical des cercles décrits sur OA et OB comme diamètres 557

693 Exercice sur la strophoïde droite 567

Nos des questions		Pages
713	Lieu du centre d'un cercle tangent à trois cercles variables	576
478	D'un point M du plan d'une ellipse on mène les tangentes MP et MQ à cette courbe. Propriétés du point de concours des hauteurs du triangle MPQ	4
501	Coniques bitangentes à une conique fixe et passant par un point A. Lieu du point de rencontre de la tangente en A avec la corde des contacts, etc	7
510	Exercices divers sur les paraboles $(y-\lambda x)^2-2p\lambda^3 y=0$	9,66
498	La tangente et la normale à un point M d'une parabole rencontre l'axe et la tangente au sommet aux points A, B et A', B'. Lieu des centres, des cercles circonscrits aux triangles OAB, OA'B', enveloppe de ces cercles et lieu de leur second point de rencontre. (O, sommet)	27
499,500	Exercices sur une ellipse de grandeur constante	30,47
511	Enveloppe des paraboles tangentes aux deux axes d'une conique fixe ainsi qu'à la tangente et à la normale à cette conique en un point variable	36
512	Enveloppe d'une parabole variable tangente à la tangente et à la normale en un point variable d'une parabole fixe et ayant pour tangente au sommet l'axe de la parabole donnée	37
513,514	Lieu de centre des coniques osculatrices à un cercle fixe en un point donné et assujetties à d'autres conditions	38,39
519,524	Exercices sur une ellipse	41,50
582,579	—	187,196
595,601	—	197,318
626,645	—	333,433
674,718		478,600
523	Parabole variable ayant un foyer F fixe et un axe fixe. On mène une corde focale MN de grandeur constante. Lieu du milieu de MN, des points M et N, enveloppe du cercle de diamètre MN, etc	48
502	Exercice sur les normales à une ellipse	57
520	Étant données trois coniques et une droite D, si l'on joint un point M aux points de rencontre de ces coniques avec la droite on obtient trois nouvelles cordes. Lieu des points M pour lesquels ces cordes sont concourantes	60
521	Conique variable ayant ses foyers réels sur deux axes rectangulaires Ox, Oy. Lieu du centre, enveloppe des axes, etc	62
548	Exercices sur les points communs et les tangentes communes aux deux paraboles $y^2-2x=0$, $x^2-2y+m=0$	131
551	Paraboles tangentes en O à Ox et telles que les axes touchent leur enveloppe au foyer correspondant. Exercices divers	134
552	On donne une hyperbole équilatère, une droite fixe et une droite mobile. Exercices	138
553	On donne trois points O, A, B et une droite Δ. Trouver sur cette droite les deux points M et M' tels que la parabole tangente aux deux couples de droites MA, MB et MA, M'B ait pour foyer le point O, etc	142
561,574,562	Lieux relatifs aux tangentes issues d'un point à une parabole	146,181,260
569	Lieu de l'intersection des normales aux extrémités d'une corde d'une parabole dont la projection sur l'axe est constante	169
571	Exercices relatifs à un cercle passant par le sommet d'une parabole et par les extrémités d'une corde variable passant par un point fixe de l'axe	171
572	Réalité des points de rencontre de deux paraboles	191
583	Par un point M du cercle circonscrit à un triangle passent deux paraboles inscrites. Les tangentes M à ces paraboles sont rectangulaires et enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements	204
598	On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et deux points A et A'. Il existe trois droites Δ rencontrant Ox et Oy en B et B' tels que AB et A'B' soient perpendiculaires à Δ. Propriétés de ces droites	206
594	Construction d'un triangle ayant un côté sur une tangente à une ellipse	223
597	Cercle tangent à une parabole et ayant pour diamètre une corde de cette parabole. Lieux et enveloppe	227
612	Autour d'un point P on fait pivoter une droite dont on prend les pôles Q et Q' par rapport à deux coniques. — L'enveloppe de QQ' est une conique. Condition pour que P soit foyer de cette conique	255
600	Lieux et enveloppes relatifs à une parabole inscrite dans un quadrilatère variable	266
603	Hyperboles circonscrites à un triangle équilatéral et dont une asymptote est tangente au cercle inscrit. Exercices	277
614	En un point A d'une hyperbole équilatère on mène la normale qui rencontre la courbe en A_1. Du point A_1 on déduit de même le point A_2, ..., etc. Coordonnées du point A_n	282
623	Deux paraboles de grandeurs constantes tournent autour de leurs sommets respectifs de façon que par les quatre points de rencontre passe un cercle. Lieu du centre de ce cercle. Lieu du centre, enveloppe des axes et des asymptotes des hyperboles équilatères passant par les points de rencontre	291-342
615	Construire les paraboles circonscrites à un triangle et tangentes à une droite	300
602	Coniques tangentes à des droites. Lieux géométriques	319
610	Lieux des foyers des hyperboles équilatères	

N^os des questions		Pages
	bitangentes à un cercle et passant par un point	322
624	Lieux relatifs à une hyperbole équilatère touchant une parabole, passant par son sommet et ayant un axe parallèle à celui de la parabole	324
625	Exercices relatifs à deux coniques dont l'une est inscrite dans un quadrilatère et l'autre est inscrite dans le triangle des diagonales.	331
613	Lieu des centres des coniques d'excentricité donnée, tangentes aux trois côtés d'un triangle	354
636	Coniques bitangentes à deux coniques fixes.	363
611	Cercle tangent à deux droites rectangulaires. Sécante mobile. Exercices	370
631	Lieu des foyers et des sommets d'une hyperbole de grandeur constante dont les asymptotes passant par deux points fixes	373
632	Lieu des foyers des paraboles circonscrites à un triangle variable	375
633	Lieu des points de rencontre des normales à une ellipse aux extrémités de la polaire d'un point d'une hyperbole équilatère qui a ses sommets aux foyers de l'ellipse	375
638	Lieu des foyers des coniques bitangentes à deux cercles	379,410
634	Déterminer les normales à l'ellipse dont la distance au centre ou au foyer est maximum.	388
641	Lieu des sommets des coniques circonscrites à un triangle OAB rectangle en O et telles que la normale en O passe au milieu de AB	391
637	Ellipse variable ayant ses foyers sur un cercle et tangente à ce cercle. Lieux et enveloppes.	404
644	D'un point M pris sur une droite D on mène les tangentes MP, MQ à une conique C. Déterminer D de façon que le cercle MPQ passe par un point fixe, etc.	413
646	Coniques tangentes à une droite, passant par un point et ayant un foyer donné. Lieu des centres. Paraboles du faisceau	420
648	Hyperboles passant par un point A d'une ellipse et ayant pour asymptotes deux diamètres conjugués de l'ellipse. Lieux.	423
652	Exercices relatifs à trois coniques ayant un foyer commun	439
647	Paraboles bitangentes à une hyperbole équilatère. Propriété et lieu	440
657	Parabole P, point A, droite D passant par A. On considère l'hyperbole H ayant pour asymptotes D et la perpendiculaire abaissée du foyer sur cette droite, et passant par le sommet de la parabole. Lieux divers	443
653	Enveloppe des asymptotes et des axes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle	465
536	Construire une hyperbole équilatère connaissant deux tangentes et le point de contact	483
670	Exercices sur des coniques tangentes	485
672	Propriétés d'un quadrilatère circonscrit à la fois à une conique et à une parabole ayant pour foyer le centre de cette conique	489
659	La tangente en M à une parabole de foyer F rencontre l'axe en M', soit F' le symétrique de F par rapport à MM'. Lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles MFF', MFF', MMF, MMF'	495
676	Paraboles de foyer donné et tangentes à une droite. Lieu des sommets, etc.	498
691	Coniques tangentes en O à Oy et ayant une directrice donnée. Lieu des foyers et du centre	499
682	Exercices relatifs à deux coniques ayant même cercle orthoptique l'une inscrite, l'autre circonscrite à un même triangle	509
699	Lieu du point de rencontre de deux tangentes perpendiculaires à deux paraboles qui ont même axe et même sommet	532
683	Exercices relatifs à une conique et des tangentes	542
714	Coniques ayant un sommet et un foyer donnés.	579
697	Exercice sur les normales issues d'un point à une parabole	589
725	Paraboles ayant pour directrice une droite donnée et passant par un point. Exercices divers.	600

GÉOMETRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

639	D'un point P on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices et les plans tangents à un cône du 2e degré. Lieu du point P pour que ces lieux soient des courbes planes	384
646	Les cubiques gauches qui passent par les sommets et l'orthocentre d'un tétraèdre orthocentrique sont équilatères.	302
564	On donne une quadrique Q et deux points A et A' diamétralement opposés sur Q. On considère les deux cônes de sommet A et A' ayant pour directrice commune la section de Q par un plan P passant par une droite Δ. Ces cônes ont une deuxième courbe plane située dans un plan P'. Lieu de la droite intersection de P et de P'. Lieu du centre et des foyers de la section contenue dans P'	156
565	Intersection des quadriques $yz = ax = 0$, $zx + a(y - z) = 0$. Paraboloïdes et cônes passant par l'intersection.	159
573	Exercices sur un ellipsoïde.	162
581	Lieux relatifs aux génératrices d'un paraboloïde hyperbolique.	185
604	Exercices sur des surfaces de révolution. Lieux de foyers, d'axes, etc	231

N° des questions		Pages
643	On considère deux quadriques Q et Q_1 dont les axes sont parallèles ; Q est fixe, Q_1 est variable et reste homothétique à elle-même. Exercices	410

PHYSIQUE

116	Etudier les niveaux d'un liquide situé dans deux vases communiquants quand on fait tourner le système autour de l'axe de l'un des vases	44
482	Un récipient clos est exactement rempli d'eau liquide à 0° sous la pression atmosphérique. On refroidit le tout à $-4°$. Que devient la pression intérieure dans l'hypothèse où l'eau reste en surfusion	90
462	Exercice sur une lentille convergente	145
567	Problème relatif à un ballon qui s'enlève dans l'air sec	303
607	Calcul de la force élastique de la vapeur d'eau contenue dans l'air	334
618	Image d'un objet lumineux par rapport à une sphère réfringente	367
619	La surface d'une masse d'eau éclairée par le soleil est couverte d'un écran mince, opaque, percé d'une petite ouverture. Forme du faisceau lumineux qui pénètre dans l'eau par cette ouverture	417
629	Eclairement produit par une lumière réfractée	467
654	Exercice sur l'appareil de Regnault relatif à la dilatation des gaz à volume constant	493

NOTES ET COMMUNICATIONS

	Pages
Lemme d'arithmétique, par M. A. Goulard	541
Notes sur les équations linéaires	81
Sur la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ par M. Ch. Méray	425
Même question par M. H. Padé	481
Réduction simultanée de deux formes quadratiques à trois variables à des sommes de trois carrés, par M. A. Lagrange	177
Sur l'éliminant de deux polynomes	130
Sur le nombre des inégalités distinctes qui doivent être vérifiées par les coefficients d'une équation entière de degré m et à coefficient réels pour que cette équation ait toutes ses racines réelles et distinctes	297
Sur la continuité des racines d'une équation algébrique, par M. A. Tresse	377
Sur la condition pour que trois cercles passent par un même point, par M. M. d'Ocagne	509
Sur le cercle coupant trois cercles donnés sous des angles donnés, par M. Girod	201
Sur la classification des cubiques planes, par M. A. Dumont	153
Note sur les axes de symétrie des courbes algébriques	329
Sur la détermination du point double d'une cubique unicursale, par M. A. Naud	449
Sur la détermination du point double d'une cubique unicursale, par M. Appell	505
Exercices sur la détermination des points doubles d'une quartique plane unicursale, par M. Appell	585
Sur la concavité ou la convexité d'une courbe plane vers un point ; application à la transformée par développement d'une courbe plane tracé sur un cône, par M. A. Naud	537
Sur les formules de Plücker, par M. G. Fontené	561
Etude multilinéaire des coniques, par M. P. Barbarin	450
Une généralisation du théorème de Joachimstal, par M. P. Barbarin	353
Sur le théorème de Joachimstal, par M. Paoli	482
Sur l'équation générale des coniques qui passent par l'intersection des deux autres	33
Points d'inflexion par développement d'une courbe tracée sur un cône par M. H. Bordeux	1
Extension à l'espace d'une propriété de l'hyperbole équilatère par M. G. Lapointe	2
Sur une correspondance entre les droites de l'espace et les cercles d'un plan par M. N. Antomari	225
Condition pour que deux équations représentent une même courbe ou une même surface par M. J. Richard	353
Paraboles asymptotes dans l'intersection de deux quadriques par M. J. Caron	506
Axes des projections des sections planes du cylindre et du cône par M. Achille Provost	105,129
Sur les surfaces de Steiner par M. J. Richard	401
Démonstrations des propriétés des biquadratiques gauches	403
Quelques questions d'examens par M. G. Lapointe	426
Lieu d'une force dont la grandeur reste invariable et qui a même moment par rapport à quatre droites données, par M. J. Richard	249
Essai de géométrie analytique et synthétique par M. R. Laurent	273,297
Correspondance	176

Pages

BIBLIOGRAPHIE

Leçons d'algèbre élémentaire, par C. Bourlet. . . 32

Cours de géométrie descriptive, par X. Antomari. 80

Corso de analyse infinitesimal, por F. Gomés Teixeira. 104

Leçons sur les applications géométriques de l'analyse, par L. Raffy 128

Eléments de géométrie par Amiot, nouvelle édition revue et augmentée par F. Vintéjoux . . . 247

Géométrie dirigée : les angles dans un plan orienté avec des droites dirigées ou non dirigées, par G. Fontené 248

Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne, par J. Richard 399

Traité d'algèbre élémentaire, par N. Cor et J. Riemann. 400

Leçons d'algebre, par Ch. Briot, revues et mises au courant des nouveaux programmes par E. Lacour 448

Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications, par Lucien Lévy. 535

La Mathématique, Philosophie, Enseignement, par C.-A. Laisant 536

EXAMENS ET CONCOURS

Agrégation des Sciences Mathématiques

1896. . . . . 114.
1897. . . . . 256, 513, 518.
1898. . . . . 574.

Concours général de Mathématiques spéciales

Mathématiques. . . { 1897. 234, 452, 457.
1898. 525.

Physique et Chimie. { 1895. 91.
1896. 166, 211.
1897. 234, 521, 523, 597.
1898. 516.

Bourses de Licence

Mathématiques. . . { 1897. 258, 490.
1898 575.

Physique. . . . . { 1896. 284, 285.
1897. 258.
1898. 576.

ÉCOLES

École Normale Supérieure

1896. . . . . 110, 209, 214.
1897. . . . . 236, 285, 460, 570.
1898. . . . . 548, 599.

École Polytechnique

1896. . . . . 85, 96.
1897. . . . . 235, 335, 457.
1898. . . . . 547.

École Centrale

1894. 2e session . . . . . 125.
1896. { 1re session . . . . . 69, 149, 173, 245, 246.
2e » . . . . 54, 216, 268, 326, 348.
1897. { 1re session . . . . . 269, 470, 473, 605, 606.
2e » . . . . . 349, 476, 526, 579.
1898. 1re » . . . . . 581.

École des Ponts et Chaussées

Cours préparatoires. { 1893. 603.
1896. 55, 220, 259.
1897. 350, 394, 553.

Cours spéciaux. . { 1894. 385
1896. 45.
1897. 368.

École des Mines de Saint-Etienne

1896. . . . . 126, 286, 396, 397.
1897. . . . . 397, 555.

École Navale

1897. . . . . 238.
1898. . . . . 549.

EXAMENS ORAUX

École Normale Supérieure

1896. . . . . 189, 213.
1897. . . . . 468, 494, 598.

École Polytechnique

1896 . . . . . 13.
1897. . . . . 304, 337.

École Centrale

1895. . . . . 78, 102, 243.
1896. . . . . 270, 293, 327, 351.
1897. . . . . 533, 559, 582, 607.

École Navale

. . . . . 73, 95, 120

NOMS D'AUTEURS

AMAR (J.), 215, 435.
AMIOT, 247.
ANDOYER (A.), 168.
ANTOMARI (X.), 80, 216, 225.
APPELL (P.), 505, 585.
AUZERAM, 95.
D'AVILLEZ (Jorge-F.), 32, 196.
BADARD (J.), 104, 173, 195.
BARBARIN (P.), 245, 353, 450.
BARBIER (Aug.), 56, 223.
BARISIEN (E.-N.), 32, 56, 103, 152, 224, 328, 342, 347, 352, 376, 389, 391, 424, 434, 440, 442, 470, 478, 579, 608.
BARRÉ (E.), 138, 141, 191, 233, 246.
BERTRAND (A.), 600.
BERTRAND (V.), 9, 62, 440, 467, 499, 545.
BICART (L.-D.), 41, 47, 88, 127, 162, 370.
BLANDIN (J.), 48, 54.
BLOCH (E.), 465.
BORDEUX (H.), 1, 46, 69.
BOURLET (C.), 32.
BRESSON (Paul), 555.
BRIÈRE (A.), 95, 255.
BRIOT (Ch.), 448.
BRUCK (P.), 152.
BUNEL, 490, 523.
C., 297.
C. (N.), 94, 152, 211, 237, 396, 476, 557.
CAUS (M.), 533.
CARON (J.), 506.
CARONNET (Th.), 576.
COMBETTE, 270, 271, 293, 533, 535.
COR (N.), 400.
COURRIADÈS (J.), 193.
D. (É.), 243, 553.
DAVAUX (E.), 74, 75, 97, 98.
DEVIN (Eugène), 383.
DUCASSE (B), 441.
DUMONT (A.), 153.
FERRET d'EPERLEQUES, 120, 166, 303.
FONTENE (G.), 501.
FOULON (J.-B.), 6.
De FRANCE (G.), 200.
GAUTHIER (J.), 397, 480.
GIROD, 201.
GOUILLY, 294, 559, 583.
GOUJON (L.-J.), 7, 146.
GOULARD (A.), 32, 195, 541.
H. (E.), 25, 32, 36, 69, 80, 104, 128, 146, 176, 224, 237, 296, 331, 400, 536, 600.
HAUSER (R.), 322, 374, 387, 468.
HOUX (V.), 316, 473, 518.
HOH (F.), 576.
L. (P.), 475, 480, 504, 528, 555, 560, 605.
LACOUR (E.), 448.
LAGRANGE (A.), 177.
LAISANT (C.-A.), 536.
LAPOINTE (G.), 2, 25, 37, 38, 191, 266, 318, 367, 433, 470, 483, 592, 599.
LAUREAUX (A.), 39.
LAURENT (H.), 273, 297.
LEBESGUE (H.), 184.
LEMAIRE (J.), 403, 525.
LE SOURD (G.), 485.
LEVI, 327, 328, 331, 583, 607.
LEVY (Lucien), 535.
LHERIAUD (J.), 147, 187, 375, 489.
L'HOSTE (É.), 589.
LIMES (Eugène), 205, 209, 216, 342.
LIOGIER (L.), 290.
LOGNON, 25.
MALPLAT (M.), 50, 91, 149, 192, 243.
MARTHOURET (L.), 247.
MASCART (J.), 248.
MERAY (Ch.), 425.
MERLIN (J.), 388, 495, 519.
MUNICH (J.), 193.
NAUD (A.), 384, 440, 449, 537.
NICOL (J.), 272.
D'OCAGNE (M.), 238, 509.
OLLAGNIER (P.), 31.
ORLANDO (Lucien), 555.
P. (G.), 85.
PADÉ (H.), 481.
PAOLI, 482.
PEGORIER (F.), 74, 492, 559.
PONCET (A.), 197.
POUILLIART (G.-A.), 50, 224, 296, 328, 399, 418, 498, 535, 560, 584, 595.
PRIMET, 198.
PROVOST (Achille), 105, 129.
PUIG (P.), 46, 80, 120, 259, 286, 318, 359, 440.
R. (H.), 286.
RAFFY (Louis), 128.
RICHARD (J.), 249, 353, 399, 401.
RIEMANN (J.), 400.
ROUSIER (G.), 376, 385, 605.
S. (P.), 157.
SAILLY (P.), 502.
SAYOUS (L.), 144, 145, 158, 162, 333.
SICARD (P.), 32, 152, 324.
TEIXEIRA (Gomez), 104.
De TREGOMAIN (G.), 134, 148, 160.
TRESSE (A.), 377.
VASNIER, 56, 60, 68, 69, 94, 146, 168, 191, 237, 282, 334, 343, 370, 409, 413, 418, 487, 495, 525, 589.
VERCHÈRE (J.-C.), 246, 327.
VIDAILLET (J.), 259.
VINTEJOUX (F.), 247.
VOGT (H.), 400, 448.

QA
1
R486
année 7-8

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY